



## ADAPTAÇÃO DE TAREFAS MATEMÁTICAS PARA O ENSINO EXPLORATÓRIO: UMA EXPERIÊNCIA COM ANÁLISE COMBINATÓRIA

Eduardo Pereira de Oliveira Rossa  
Universidade Estadual do Paraná - UNESPAR  
eduardoporossa@gmail.com

Everton José Goldoni Estevam  
Universidade Estadual do Paraná - UNESPAR  
evertonjgestevam@gmail.com

**Resumo:** Considerando o papel fundamental da tarefa na perspectiva do Ensino Exploratório de Matemática e a complexidade que envolve a sua elaboração/adaptação, neste relato de experiência são descritos os processos de adaptação de duas tarefas realizadas a partir de questões de livros didáticos, vestibulares e videoaulas sobre o tema de Análise Combinatória. Esse processo de adaptação das tarefas foi orientado por um levantamento bibliográfico realizado com a finalidade de identificar características a serem consideradas em tarefas de natureza exploratória. Com a articulação entre as etapas teóricas (levantamento e estudo bibliográfico) e práticas (seleção, estudo e adaptação de tarefas) envolvidas nesta pesquisa, o presente relato pode servir como orientação para auxiliar professores e pesquisadores na realização de práticas com propósitos semelhantes.

**Palavras-chave:** Tarefas exploratórias. Educação Matemática. Comunicação. Antecipação.

### INTRODUÇÃO

O Ensino Exploratório de Matemática (EEM) constitui uma perspectiva de ensino que se contrapõe ao modelo de transmissão de conhecimento, associado a práticas expositivas e diretivas (PONTE, 2005). Esta perspectiva pressupõe que a aprendizagem decorre do trabalho que os alunos realizam, a partir do engajamento em tarefas desafiadoras, para as quais não possuem um método imediato de resolução (CANAVARRO, 2011).

Por outro lado, considerando a dificuldade de acesso a materiais que orientam a elaboração de propostas de aulas exploratórias assim como a complexidade que permeia o processo de seleção e adaptação de tarefas com potencial para sustentar este tipo de prática,

ganham relevância estudos acerca das características das tarefas apresentadas aos alunos como meio de apoiar práticas nesta perspectiva.

Assim, neste estudo é apresentado um relato de uma experiência de adaptação de tarefas Matemáticas com vistas a práticas de EEM no contexto de Análise Combinatória. A experiência ocorreu por meio da participação no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica, tendo financiamento do CNPq. A escolha do tema de Análise Combinatória teve como influência a possibilidade de articular a investigação realizada com as ações do estágio de regência obrigatório no ensino médio durante o curso de licenciatura. Sendo assim, os resultados serão abordados levando em conta as intenções envolvidas na ação do planejamento.

As ações para a realização da pesquisa foram divididas em três etapas. Inicialmente, foi realizado um levantamento e estudo bibliográfico a fim de compreender a perspectiva de ensino do EEM e identificar quais as orientações e características essenciais das tarefas que sustentam práticas assentes nesta perspectiva. A segunda etapa permitiu identificar, relacionar e diferenciar situações de combinatória, de acordo com a relevância e influência (natureza, ordem e reposição), buscando interpretar e significar os algoritmos de diferentes situações de Análise Combinatória que envolvem o Princípio Fundamental da Contagem, Permutação simples e com repetição, Combinação e Arranjo. A terceira etapa da pesquisa teve como enfoque a seleção e adaptação de situações e problemas propostos no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), vestibulares, livros didáticos e videoaulas envolvendo os conceitos em causa.

Por fim, foram articuladas as etapas de investigação de modo a sistematizar as características das tarefas de natureza exploratória que conferem potencial para a significação de fórmulas matemáticas, em particular, daquelas relacionadas aos conceitos de Arranjo, Combinações e Permutações. Assim, este relato tem como enfoque o processo realizado de adaptação de tarefas orientado pela fundamentação teórica a respeito do EEM e os estudos realizados sobre os conceitos de Análise Combinatória.

## **ENSINO EXPLORATÓRIO DE MATEMÁTICA**

Práticas de EEM privilegiam a comunicação de conjecturas, estratégias e dificuldades dos alunos, assim como incentivam que eles questionem suas ideias e também as dos colegas, refletindo sobre necessidades, potencialidades e encaminhamentos de estratégias de resolução, envolvendo um processo de colaboração e negociação em sala de aula. Assim, destacam-se

quatro aspectos fundamentais: colaboração; inquirição; reflexão; e comunicação (CHAPMAN; HEATER, 2010).

Para a mobilização destes aspectos, normalmente uma aula nesta perspectiva de ensino é dividida em fases sequenciadas, quais sejam: i) introdução ou apresentação da tarefa; ii) desenvolvimento ou exploração da tarefa; iii) apresentação e discussão das resoluções e; iv) sistematização das aprendizagens (CANAVARRO, 2011; RODRIGUES; CYRINO, 2017). Além destas fases, é essencial a antecipação que ocorre antes da efetivação da proposta em sala de aula, a qual envolve a seleção/elaboração de tarefa(s), antecipação de estratégias de resolução dos alunos e de aspectos a serem considerados para a condução da aula (CANAVARRO, 2011; OLIVEIRA; MENEZES; CANAVARRO, 2013). As ações problematizadas neste relato têm maior relação com essa etapa de antecipação, envolvendo o planejamento das tarefas e as possíveis estratégias que os alunos podem utilizar ao buscar soluções, mas também são consideradas as ações e influências das tarefas nas demais fases.

Nesse sentido, a tarefa é entendida como uma proposição feita pelo professor com o objetivo de concentrar a atenção dos alunos em uma ideia matemática (JESUS, 2011), cujas práticas de EEM privilegiam aquelas com exigências de nível elevado de demanda cognitiva (STEIN; SMITH, 1998). No entanto, não é suficiente escolher boas tarefas, é preciso ter cuidado com o modo de propor e conduzir suas realizações em sala de aula (PONTE, 2005), já que o professor pode, mesmo sem intenção, alterá-las (JESUS, 2011). Isso ocorre, por exemplo, quando ele reduz a exigência cognitiva da tarefa aos dar indícios de (re)soluções, gerencia o tempo e a sala de aula de maneira inadequada e não responsabiliza os alunos pelos resultados encontrados (STEIN; SMITH, 1998).

As discussões que emergiram do levantamento e do estudo bibliográfico realizados na primeira etapa da pesquisa, a fim de compreender a perspectiva de ensino do EEM e identificar orientações essenciais das tarefas que sustentam práticas assentes nesta perspectiva, permitiram a identificação de características a serem consideradas durante a adaptação de tarefas de natureza exploratória. Essas características, conforme discutem Rossa e Estevam (no prelo), são apresentadas no quadro a seguir:

<b>Características da tarefa</b>	<b>Autores que tratam do tema</b>	<b>Descritores</b>	<b>Aspectos que podem reduzir o potencial da tarefa</b>
<b>Propostas instigadoras</b>	- Ponte (2014); - Canavarro (2011); - Cyrino e Teixeira (2016);	- Permitir raciocínio matemático; - Não apresentar conceitos e procedimentos diretamente;	- Situações em que são utilizados procedimentos sem reflexão; - Apresentar

	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Oliveira e Carvalho (2013);</li> <li>- Paulek e Estevam (2017).</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Conter problema(s) ou situações significativas, com potencial para provocar os alunos;</li> <li>- Contribuir para aprendizagem significativa da matemática e o desenvolvimento de capacidades como o raciocínio e a comunicação.</li> </ul>	<p>diretamente conceitos ou procedimentos.</p>
<p><b>Envolver formas complexas de pensamento</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Paulek e Estevam (2017);</li> <li>- Ponte (2014);</li> <li>- Stein e Smith (1998).</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Situações consideradas de elevado grau de exigência cognitiva, que priorizam procedimentos com conexão e fazer matemática.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Situações consideradas de baixo grau de exigência cognitiva, em que são utilizados procedimentos mecânicos ou padronizados, sem reflexão.</li> </ul>
<p><b>Estimular o interesse dos alunos e possuir contexto(s) significativo(s)</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- NCTM (1994);</li> <li>- Paulek e Estevam (2017);</li> <li>- Ponte (2005).</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Temas de interesse dos alunos;</li> <li>- Envolvimento com situações cotidianas;</li> <li>- Contextos que estejam de acordo com a realidade dos alunos;</li> <li>- Situações acessíveis, mas que proporcionam certo desafio.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Situações descontextualizadas, que não possuem relação com as experiências dos alunos, podendo gerar a rejeição da tarefa.</li> </ul>
<p><b>Grau de desafio compatível com os alunos</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Paulek e Estevam (2017);</li> <li>- Pires (2011);</li> <li>- Ponte (2014);</li> <li>- Stein e Smith (1998).</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Linguagem e contexto acessíveis;</li> <li>- Conhecimentos e experiências que se supõem que os alunos possuem são necessários ou importantes para a resolução da tarefa;</li> <li>- Permitir que os alunos se apoiem em experiências anteriores.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- As situações propostas possuem caráter avançado em relação aos conhecimentos dos alunos;</li> </ul>
<p><b>Auxiliar o professor com pontos-chave</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Paulek e Estevam (2017).</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Possuir aspectos, por exemplo, no enunciado de uma situação, que podem ser utilizados para elucidar dúvidas dos alunos, seja como apoio ou provocações a percepção de ideias e conceitos fundamentais.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Possuir um único problema ou uma questão muito diretiva;</li> <li>- Itens desarticulados ou muito complexos.</li> </ul>
<p><b>Diferentes estratégias de resoluções e diferentes níveis de complexidade</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Cyrino e Jesus (2014);</li> <li>- Ponte (2014);</li> <li>- Stein e Smith (1998).</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Não ser limitada no sentido de possuir uma única estratégia de resolução;</li> <li>- Permitir resoluções que variam das mais simples às mais elaboradas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Situações em que é apresentado o que deve ser feito, não permitindo a exploração.</li> </ul>
<p><b>Articular aos</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Paulek e</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Tarefas elaboradas,</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Situações</li> </ul>

<b>objetivos do professor</b>	Estevam (2017); - Stein e Smith (1998).	selecionadas ou adaptadas com base em objetivos bem estabelecidos; - O efeito cumulativo de explorações de diferentes tipos de tarefas conduz ao desenvolvimento de ideias implícitas nos alunos sobre a natureza da Matemática.	selecionadas pelo professor sem critérios bem definidos.
<b>Autonomia no trabalho dos alunos e manutenção da exigência cognitiva da tarefa</b>	- Paulek e Estevam (2017); - Stein e Smith (1998).	- Permitir que iniciem e realizem o trabalho com intervenções mínimas do professor; - Fomentar justificativas para raciocínios, estratégias e procedimentos empregados e ações realizadas, em processos de negociação de significados; - Oferecer meios para avaliar seu próprio progresso.	- Linguagem complexa para os alunos; - Situações com caráter avançado em relação aos conhecimentos dos alunos; - Alunos não são responsabilizados pelo trabalho desenvolvido.
<b>Priorizar a indução</b>	- NCTM (1994); - Paulek e Estevam (2017).	- Apresentar situações com contextos ricos e com potencial para, a partir de casos e fatos identificados, oferecer fundamentos para generalizações matemáticas, a partir de processos de descontextualização.	- Apresentar diretamente conceitos ou procedimentos; - Itens desarticulados.

**Quadro 1** - Aspectos a serem considerados em tarefas de natureza exploratória

Fonte: Elaborado pelos autores

Ao considerar essas características em ações de elaboração ou adaptação de tarefas de natureza exploratória, o professor amplia as possibilidades de promover reflexões e de desencadear boas discussões matemáticas durante as diferentes fases da aula na perspectiva do EEM. No entanto, ao desconsiderá-las, corre-se o risco de comprometer a qualidade da aprendizagem matemática resultante (ROSSA; ESTEVAM, no prelo).

Na seção a seguir são apresentadas as adaptações de duas situações de Análise Combinatória, as quais foram realizadas considerando as características abordadas no Quadro 01.

#### **ANÁLISE COMBINATÓRIA E ADAPTAÇÃO DE TAREFAS DE NATUREZA EXPLORATÓRIA**

A terceira etapa da pesquisa consistiu na elaboração/adaptação de seis tarefas, cada uma envolvendo aspectos para a mobilização de determinados conceitos relacionados com

Análise Combinatória. Como todas as tarefas fazem parte de uma sequência, elas foram pensadas de forma que as tarefas iniciais fornecessem subsídios para as seguintes. Por conta do limite de espaço neste trabalho, serão apresentados os processos de adaptação de apenas duas tarefas.

Uma das tarefas foi estruturada a partir da análise de exemplos dados por Telles (2017) em uma videoaula que tratava sobre resoluções, em um minuto, de questões presentes em vestibulares com foco na Análise Combinatória. No exemplo em causa, Telles (2017) apresentou em sua fala a ideia de que haviam quatro elevadores a disposição para uma pessoa acessar determinado andar. Nesse caso, a pessoa poderia escolher um dos quatro elevadores para entrar e, ao sair, poderia também ter um entre quatro elevadores para escolher. A partir disto, o professor sugere a determinação de possibilidades diferentes em que poderia realizar estas escolhas, utilizando o Princípio Fundamental da Contagem para determinar 16 possibilidades. Em um segundo momento, é feita uma análise semelhante, porém neste caso o elevador utilizado para sair deve ser diferente do elevador utilizado para entrar. Assim, por meio do Princípio Fundamental da Contagem, poderiam ser determinadas 12 possibilidades. Esta ideia pareceu bastante interessante ao pensar em uma tarefa para problematizar e significar a ideia de Operador Fatorial, na qual não há “reposição” de elementos.

De modo a estimular o interesse dos alunos e fornecer um contexto significativo, o enunciado da tarefa deveria apresentar um contexto que fosse claro para o aluno e que permitisse a sua compreensão do problema (NTCM, 1994; PAULEK; ESTEVAM, 2017; PONTE, 2005). Além disto, o enunciado deveria evidenciar a desconsideração da possibilidade de chegar aos andares pelas escadas, já que isto poderia ser uma possibilidade levantada pelos alunos.

Como a tarefa tem por objetivo possibilitar a discussão e sistematização de Operador Fatorial, seria necessário realizar a associação da tarefa com os conceitos matemáticos, buscando problematizar a ideia de reposição de elementos. Desta forma, foram elaborados itens sequenciados nos quais, em um primeiro momento, são necessárias resoluções em que há reposição de elementos e em seguida um item em que fosse necessária uma resolução na qual não há reposição de elementos. Ainda, oferecendo fundamentos de modo a priorizar o raciocínio indutivo (NTCM, 1994; PAULEK; ESTEVAM, 2017), deveria ser pensado em maneiras de alcançar a generalização da situação a partir destas resoluções.

Em relação às resoluções dos alunos, buscou-se pensar em diferentes possibilidades de estratégias com níveis de complexidade distintos (CYRINO; JESUS, 2014; PONTE, 2014; STEIN; SMITH, 1998). Elas poderiam envolver: i) enumeração: determinando alguns ou

todos os agrupamentos por tentativas; ii) diagrama de possibilidades: elaborando um esquema para representar e determinar os agrupamentos através de um diagrama; iii) operações: utilizando raciocínios operatórios para determinar as possibilidades através de cálculos justificados e; iv) fórmulas: utilizando as fórmulas, porém com significado, para determinar as possibilidades (ALMEIDA, 2010).

A tarefa que resultou dos processos descritos anteriormente é a seguinte:

Uma pessoa deseja visitar um amigo que mora no sexto andar de um prédio. Sabendo que esta pessoa não gosta de subir escadas e que o prédio possui quatro elevadores:

a) De quantas maneiras diferentes é possível esta pessoa entrar e sair do prédio utilizando os elevadores?

b) De quantas formas é possível entrar e sair do prédio de maneira que o elevador utilizado para sair seja diferente do usado para entrar?

c) Se o indivíduo precisar ir uma segunda vez ao prédio, de quantas formas diferentes ele pode entrar e sair sem repetir, em nenhuma das vezes, um mesmo elevador?

**Quadro 2** – Tarefa adaptada para problematizar o conceito de Fatorial.

Fonte: Elaborado pelos autores.

Em relação ao item a), são 4 elevadores pelos quais um indivíduo pode entrar e 4 pelos quais pode sair, já que é possível a repetição. Possíveis resoluções para este item (e que podem ser utilizadas para a sistematização) são a utilização de quadros e diagrama de possibilidades.

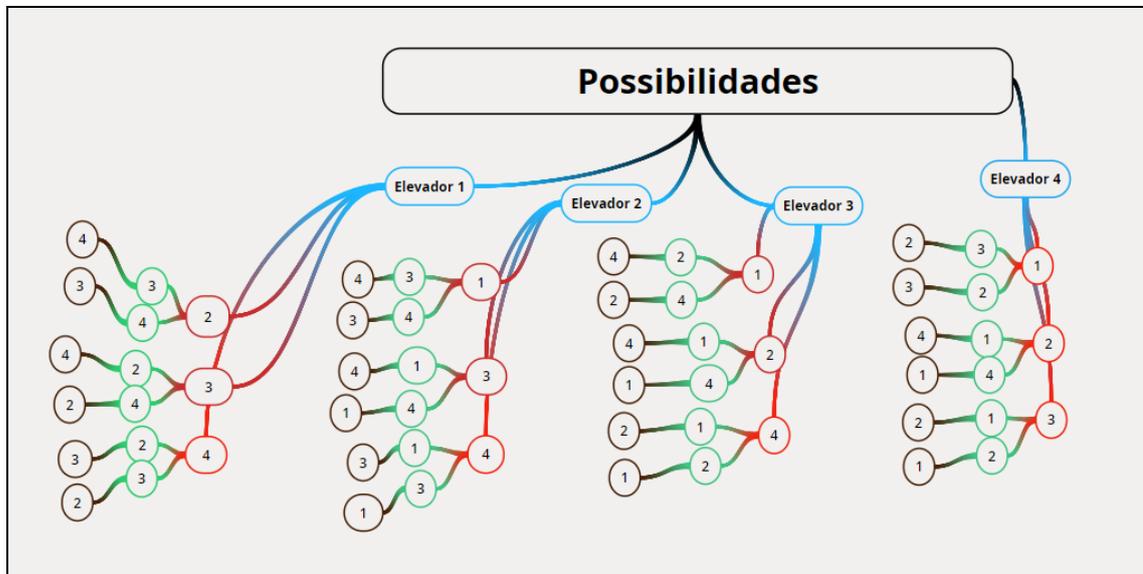
Em relação ao item b), é estabelecida a ideia de que não deve haver a repetição de escolhas já realizadas. Neste sentido, um elevador utilizado para entrar não pode ser utilizado para sair. Assim, se dá a ideia de que este novo item é um subconjunto das possibilidades do item anterior. No caso de estratégias de enumeração ou representação por esquemas de possibilidades, podem ser identificadas as possibilidades nas quais há repetições e assim desconsiderá-las.

Elevador		Saída					Elevador		Saída			
		1	2	3	4				1	2	3	4
Entrada	1	11	12	13	14		Entrada	1	11	12	13	14
	2	21	22	23	24			2	21	22	23	24
	3	31	32	33	34			3	31	32	33	34
	4	41	42	43	44			4	41	42	43	44

**Figura 1** - Representação das possibilidades de esquemas para os itens a) e b).

Fonte: Elaborado pelos autores.

Já de acordo com o item c), é proposta a ideia da sequência de etapas em que não há repetições de escolha, situação na qual se pretende permitir relacionar com o operador fatorial e, em conjunto com as resoluções dos alunos, realizar a generalização.



**Figura 2** - Representação de esquema de possibilidades para o item c).  
Fonte: Elaborado pelos autores<sup>1</sup>.

Já em relação à segunda tarefa, a seguinte situação, presente no vestibular da UNESP (2002), serviu de base para a sua estruturação:

Quatro amigos, Pedro, Luísa, João e Rita, vão ao cinema, sentando-se em lugares consecutivos na mesma fila. O número de maneiras que os quatro podem ficar dispostos de forma que Pedro e Luísa fiquem sempre juntos e João e Rita fiquem sempre juntos é:

a) 2                      b) 4                      c) 8                      d) 16                      e) 24

**Quadro 3** – Questão selecionada para adaptação.  
Fonte: UNESP (2002).

Para a adaptação desta situação, foram realizadas algumas etapas com intenção de reorganizar o enunciado e permitir atribuir características que favoreçam o raciocínio dos alunos e o trabalho do professor (PAULEK; ESTEVAM, 2017; PIRES, 2011; PONTE, 2014; STEIN; SMITH, 1998).

Inicialmente foi realizada a análise da questão e estruturação da tarefa. A questão tinha um contexto interessante ao tratar de uma situação de fácil compreensão, mas se apresentava de maneira direta, o que no contexto da perspectiva do EEM pode não favorecer a aprendizagem do aluno (PONTE, 2014; CANAVARRO, 2011; CYRINO; TEIXEIRA, 2016; OLIVEIRA; CARVALHO, 2013; PAULEK; ESTEVAM, 2017). Logo, o enunciado foi

<sup>1</sup>As ilustrações de diagramas de possibilidades foram elaboradas por meio do software GoConqr disponível em <<https://www.goconqr.com/pt-BR>>.

reescrito de modo a tratar o problema em duas etapas, iniciando por um item mais simples para avançar para outro item com algumas restrições, envolvendo formas complexas de pensamento (PAULEK; ESTEVAM, 2017; PONTE, 2014; STEIN; SMITH, 1998). Desta forma, foi considerado que ao compreender a situação proposta e com a resolução do primeiro item, os alunos poderiam se sentir motivados para dar sequência ao desenvolvimento da tarefa, o que destaca a autonomia no trabalho dos alunos e a manutenção da exigência cognitiva da tarefa (PAULEK; ESTEVAM, 2017; STEIN; SMITH, 1998). Além disto, aspectos utilizados na resolução do primeiro item poderiam servir de base para a resolução do próximo item, auxiliando o professor com pontos-chave para orientar os alunos.

De modo a articular os resultados do desenvolvimento da tarefa com os objetivos do professor para a aula (PAULEK; ESTEVAM, 2017; STEIN; SMITH, 1998), foi pensado na adaptação da tarefa para a sistematização e associação com os conceitos matemáticos. Como a situação deveria fornecer subsídios para a sistematização da Permutação simples, foi decidido separá-la em dois itens, chamando atenção para dois aspectos diferentes: i) a disposição de  $n$  elementos, sem reposição, em  $n$  lugares e; ii) a disposição de  $n$  elementos, sem reposição, em  $n$  lugares, porém com uma restrição em relação às posições dos elementos.

Em relação à solução da questão, foram considerados aspectos que possibilitassem o emprego de estratégias com diferentes níveis de complexidade (CYRINO; JESUS, 2014; PONTE, 2014; STEIN; SMITH, 1998), quais sejam: i) enumeração; ii) diagrama de possibilidades; iii) operações e; iv) fórmulas.

Por fim, no sentido de auxiliar o professor (PAULEK; ESTEVAM, 2017) e de manter a autonomia dos alunos durante a resolução da tarefa (PAULEK; ESTEVAM, 2017; STEIN; SMITH, 1998), o item inicial da tarefa foi elaborado de modo que os alunos deveriam obter os casos totais de agrupamentos envolvendo quatro elementos em quatro posições. Já no segundo item, existe uma restrição em relação aos agrupamentos, dando a entender que deve ser obtido um subconjunto dos agrupamentos do item anterior, o que pode estimular diferentes tipos de estratégias para a resolução (CYRINO; JESUS, 2014; PONTE, 2014; STEIN; SMITH, 1998). Assim, caso os alunos utilizem estratégias de enumeração ou diagrama das possibilidades, poderiam selecionar os casos que estão adequados à restrição. Se os alunos não identificarem a relação entre os agrupamentos em cada item, se faz necessária a intervenção do professor, que pode chamar a atenção e orientar a partir de aspectos identificados pelos alunos.

Estas adaptações deram origem a seguinte tarefa:

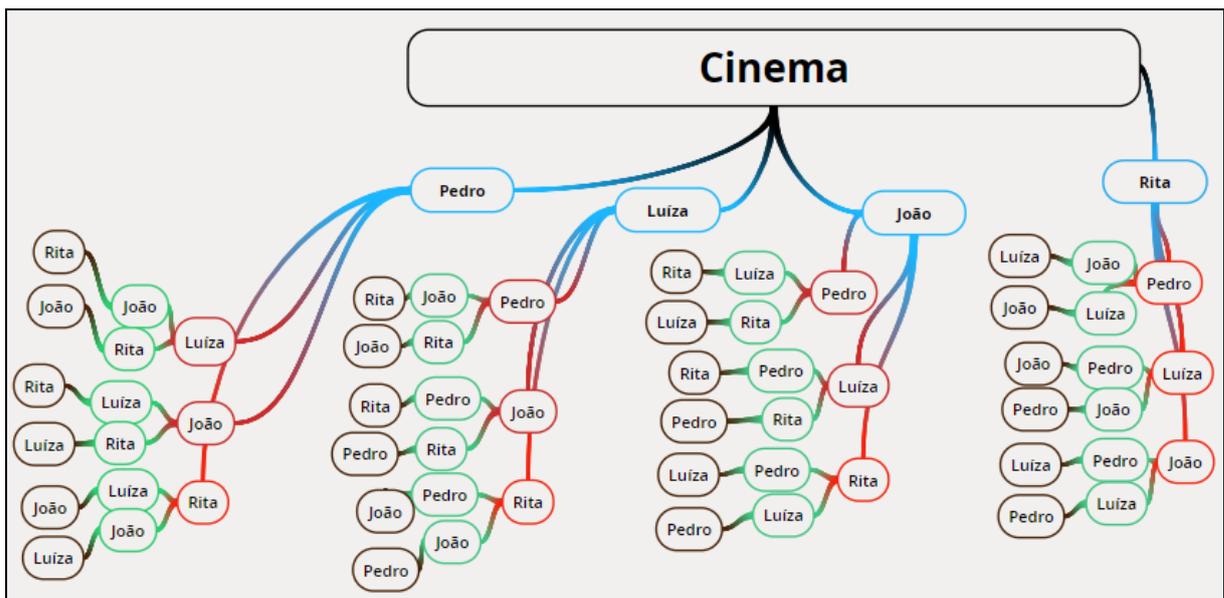
Quatro amigos, Pedro, Luíza, João e Rita, vão ao cinema e avistam, em uma mesma fila,

quatro cadeiras consecutivas, as quais devem se sentar.  
a) De quantas maneiras distintas eles podem se dispor nas quatro cadeiras?  
b) De quantas maneiras distintas eles podem se dispor, se João e Luíza sentarem sempre um ao lado do outro?

**Quadro 4** – Tarefa resultante para discussão de Permutações simples.

Fonte: Elaborado pelos autores, a partir da questão do vestibular da Unesp (2002).

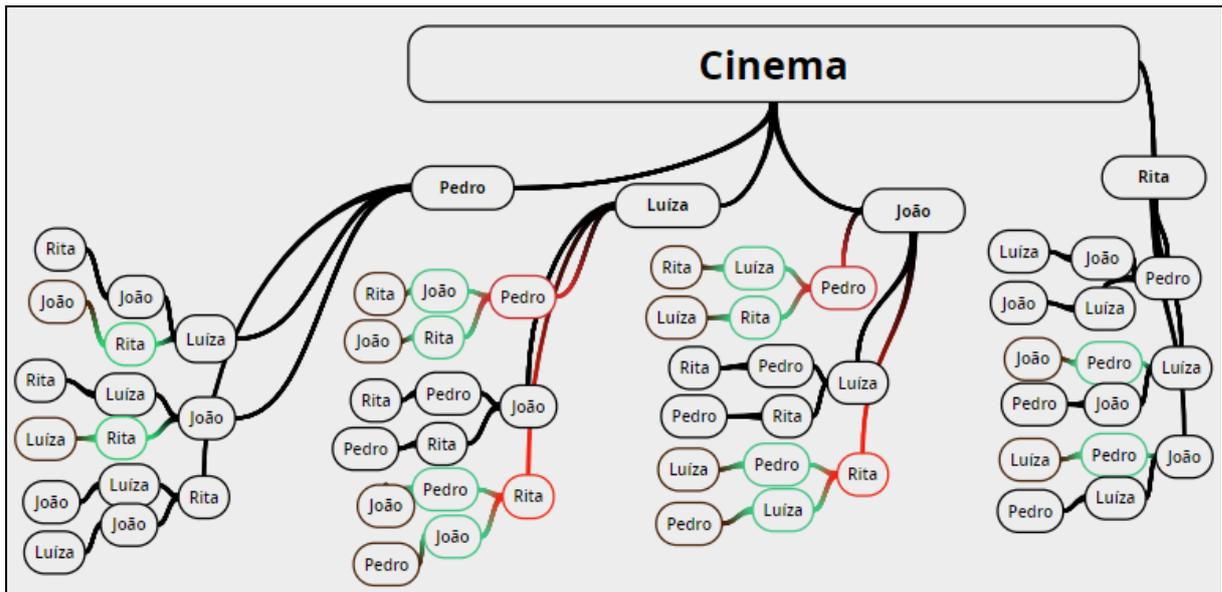
No caso do item a), a situação não fornece restrições além da posição ocupada pelos indivíduos. Logo, pode-se utilizar as ideias sobre o operador fatorial, já que não podemos “repor pessoas”. Assim, os alunos podem utilizar a ideia de que na primeira cadeira podem estar qualquer um dos quatro amigos. Como um já está sentado, sobrarão 3 lugares e três pessoas, logo para a próxima cadeira haverá três pessoas que podem se sentar. A ideia segue até o momento em que não restam cadeiras nem pessoas para dispor. A partir deste raciocínio, uma possível orientação para a sistematização é representar por meio de um esquema que evidencie as possibilidades de agrupamento, relacionando com as diferentes estratégias e raciocínios utilizados pelos alunos.



**Figura 3** - Representação por diagramas de possibilidades referente ao item a).

Fonte: Elaborado pelos autores.

Em relação ao item b), além da distinção dos elementos em relação à ordem, também há a restrição que condiciona a permanência de duas das quatro pessoas em posições vizinhas. Pode-se utilizar os dados encontrados anteriormente, no caso da utilização da enumeração ou do diagrama de árvore, e retirar as possibilidades que não se encaixam nas restrições estabelecidas.



**Figura 4** - Representação por diagramas de possibilidades referente ao item b).  
Fonte: Elaborado pelos autores.

No caso das operações, os alunos podem elaborar a situação em que considera as duas pessoas que devem permanecer juntas como um único “elemento” a ser trocado de posição. Desta forma, utilizando outras estratégias ou mesmo permanecendo nas operações, é possível encontrar seis possibilidades de agrupamento destes três elementos. Porém, além do casal trocar de lugar com os amigos, podem trocar de lugares entre si também. Logo, para cada uma das seis possibilidades de agrupamentos, há mais duas em que o casal pode alterar sua posição, totalizando doze possibilidades.



**Figura 5** - Representação de algumas posições que João e Luíza podem ocupar referente ao item b).

Fonte: Elaborado pelo autor a partir de imagens na internet<sup>2</sup>.

<sup>2</sup> As imagens que representam as poltronas, João e Luíza foram utilizados como ilustração e retirados, respectivamente, dos seguintes endereços eletrônicos: <<https://www.vectorstock.com/royalty-free-vector/movie-theater-with-rows-of-red-empty-chairs-vector-18496258>>, <<https://br.pinterest.com/pin/504966176945607296/>> e <<https://br.pinterest.com/pin/363384263663077540/>>.

Desta forma, é possível relacionar a partir das resoluções e discussões dos alunos o conceito de permutação, evidenciando que está associada à mudança de posição ou troca de ordem dos elementos, de forma que esta ordem é relevante.

## **CONCLUSÕES**

Considerando as características de tarefas de natureza exploratória presentes no Quadro 1, o processo de adaptação das tarefas discutidas neste relato consistiu em: identificar situações com contextos reais e claros para o aluno, de modo a facilitar a compreensão do problema, mas sem abordar de maneira direta para evitar restringir as resoluções; estruturar a tarefa com itens sequenciais e com ordem crescente de complexidade, com o intuito de permitir que o professor auxilie os alunos em pontos-chave, que o aluno se sinta motivado e se apoie nas resoluções anteriores e que seja priorizado o raciocínio indutivo; permitir diferentes tipos de resoluções, sejam elas por meio da contagem, tentativa e erro, operações, generalizações, diagramas, desenhos ou quadros; estruturar a tarefa de modo a contribuir para as diferentes fases da aula, sobretudo nas fases de discussão das resoluções e sistematização das aprendizagens.

Mesmo sendo consideradas as características presentes no Quadro 1 durante o processo de adaptação, é importante destacar que a tarefa por si só não é suficiente para garantir a efetivação da atividade esperada em práticas exploratórias de ensino de Matemática, já que as ações do professor também podem influenciar neste processo. Assim, para a finalidade que se pretende em relação à aprendizagem matemática dos alunos, as ações do professor devem estar alinhadas à prática de EEM que pretendem conduzir, de modo a favorecer os aspectos relacionados no Quadro 1.

Tendo em conta a complexidade que envolve a antecipação de práticas exploratórias, sobretudo em relação à elaboração, seleção ou adaptação de tarefas, o presente relato pode auxiliar professores e pesquisadores na realização de práticas com propósitos semelhantes por meio dos elementos teóricos sintetizados no Quadro 1 e da descrição realizada em relação ao processo de adaptação das tarefas apresentados.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradecemos ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq, pelo auxílio concedido (Proc. 440517/2019-2).

## **REFERÊNCIAS**

ALMEIDA, A. L. **Ensinando e Aprendendo Análise Combinatória com ênfase na Comunicação Matemática: Um estudo de caso com o 2º ano do ensino médio.** Orientadora: Profa. Dra. Ana Cristina Ferreira. 2010. 166 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010.

ANDRADE, R. T. B. **A Probabilidade Aplicada aos Jogos de Azar.** Orientador: Prof. Dr. Alexandre de Bustamante Simas. 2017. 69 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – PPGM – Departamento de Matemática, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2017.

CANAVARRO, A. P. Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. **Educação e Matemática**, Lisboa, n. 115, p. 11-17, 2011.

CHAPMAN, O.; HEATER, B. Understanding change through a high school mathematics teacher's journey to inquiry-based teaching. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 13, n. 6, p. 445-458, 2010.

CYRINO, M. C. C. T.; TEXEIRA, B. R. O Ensino Exploratório e a elaboração de um framework para os casos multimídia. *In*: CYRINO, M. C. C. T. (Org.). **Recurso multimídia para a formação de professores que ensinam matemática: elaboração e perspectivas.** 1. ed. Londrina: EDUEL, 2016. p. 81-99.

CYRINO, M.C.C.T.; JESUS, C.C. Análise de tarefas matemáticas em uma proposta de formação continuada de professoras que ensinam matemática. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 20, p. 751-764, 2014.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações.** 2. ed. São Paulo: Ática, 2013.

JESUS, C. C. **Análise crítica de tarefas matemáticas: um estudo com professores que ensinam matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.** 2011. 95f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2011.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics). **Normas profissionais para o ensino da Matemática.** Lisboa: APM e IIE, 1994.

OLIVEIRA, H.; CARVALHO, R. Uma experiência de formação, com casos multimídia, em torno do ensino exploratório. *In*: FERNANDES, J. A.; MARTINHO, M. H.; TINOCO, J.; VISEU, F (Ed.), **Atas do XXIV SIEM.** Lisboa: APM, 2013, p. 415-426.

OLIVEIRA, H.; MENEZES, L.; CANAVARRO, A. P. Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. **Quadrante**, Lisboa, v. 22, n. 2, p. 28-53, 2013.

PAULEK, C. M., ESTEVAM, E. J. G. Ensino exploratório de matemática: uma discussão sobre tarefas e a dinâmica da aula. **Actas do VIII Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática - CIBEM.** Madri, 2017. p. 412-421

PIRES, M. V. Tarefas de investigação na sala de aula de Matemática: práticas de uma professora de Matemática. **Quadrante**, Lisboa, v. 20, p. 55-81, 2011.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. *In*: GTI (Ed.), **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, 2005, p. 11-34.

PONTE, J. P. Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. *In*: PONTE, J. P. (Org.). **Práticas profissionais dos Professores de Matemática**. 1 ed. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014. p. 13-31.

PROCÓPIO, Rafael. **Fatorial e Permutação (Análise Combinatória) | Matemática do ENEM**. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=4zMFrPhCkbE>> Acesso em: 27 de agosto de 2020.

QUARESMA, M.; PONTE, J. P. A comunicação na sala de aula numa abordagem exploratória no ensino dos números racionais no 5º ano. *In*: PONTE, J. P. (Org.). **Práticas profissionais dos Professores de Matemática**. 1 ed. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014. p. 165-182.

RODRIGUES, P. H.; CYRINO, M. C. C. T. Aspectos da prática pedagógica considerados na elaboração de um caso multimídia para formação de professores que ensinam Matemática. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 23, p. 577-595, 2017.

ROSSA, E. P. O.; ESTEVAM, E. J. G. Tarefas de natureza exploratória e aprendizagem matemática. No prelo.

STEIN, M. K.; SMITH, M. S. Mathematical tasks as a framework for reflection: from research to practice. **Mathematics Teaching in the Middle School**, v. 3, n. 4, p. 268-275, 1998.

TELLES, L. **Análise Combinatória One Minute Resolva questões em até 1 minuto! Professor Luis Telles**. Vídeo publicado em 12 mai. 2020. Disponível em <<https://www.youtube.com/watch?v=aNEpUB9nRIQ&t=496s>>. Acesso em 27 ago. 2020.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA, vestibular realizado em 2002. *In*: CURSO OBJETIVO VESTIBULARES. **Resoluções comentadas**. Disponível em: <[https://www.curso-objetivo.br/vestibular/resolucao\\_comentada/unesp/2002/1dia/unesp2002\\_1dia.pdf](https://www.curso-objetivo.br/vestibular/resolucao_comentada/unesp/2002/1dia/unesp2002_1dia.pdf)>. Acesso em: 27 ago. 2020.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS, vestibular de 2010. *In*: MUNDO EDU, **Módulo 6 | Análise Combinatória**. Disponível em: <<https://www.mundoedu.com.br/uploads/pdf/59c2b7abecce9.pdf>>. Acesso em: 27 ago. 2020>.