



## UM ESTUDO DA INTRODUÇÃO DO CONCEITO DE LIMITE DE FUNÇÃO EM LIVROS DIDÁTICOS

Vitoria Lourenço Luges da Silva  
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS  
viluges@gmail.com

Sonia Maria Monteiro da Silva Burigato  
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS  
sonia.burigato@ufms.br

**Resumo:** O presente artigo apresenta uma pesquisa realizada por uma acadêmica do Curso de Matemática – Licenciatura da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS) durante a produção da monografia no ano de 2021. A investigação teve por objetivo identificar e analisar as definições de limite de função em um ponto apresentadas em alguns livros didáticos. A pesquisa foi desenvolvida por conta da experiência vivida pela acadêmica na primeira disciplina do Cálculo Diferencial e Integral (CDI), mais conhecida como Cálculo I, em que apresentou muita dificuldade no processo de compreensão do conceito de limite de função em um ponto. Para a análise, nos baseamos na teoria dos campos conceituais, identificando os conceitos e representações utilizadas nas definições e também como essas definições estavam relacionadas. A pesquisa mostrou que os livros analisados exigem dos alunos conhecimentos de uma variedade de conceitos. É uma questão para os professores considerarem, visto que, dependendo da escolha da situação para apresentar as definições, os alunos podem se deparar com conceitos que dificultam fazer a relação entre elas.

**Palavras-chave:** Limite de função em um ponto. Cálculo I. Aprendizagem. Teoria dos Campos Conceituais.

### INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta um estudo realizado no ano de 2021 pela, até então, acadêmica do curso de Matemática – Licenciatura da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS). Tem como objetivo identificar e analisar como os autores de alguns livros didáticos introduzem o conceito de limite de uma função em um ponto.

Desenvolvemos esta investigação, devido a algumas inquietações que surgiram na experiência da primeira autora, enquanto acadêmica da primeira disciplina do Cálculo

Diferencial e Integral (CDI), geralmente denominada por Cálculo I, em que teve bastante dificuldades para compreender as definições de limite de função. Além disso, é perceptível que este é um problema comum em estudantes da disciplina. Realmente, algumas pesquisas apontam que os alunos apresentam dificuldades em compreender as definições de limite e que, também, não conseguem relacionar a definição intuitiva com o que é apresentado na definição formal (BURIGATO, 2019; ZUCHI, 2005). Assim, é necessário propor situações que relacionem essas definições, de uma forma que diminua a “distância” entre elas (SANTOS, 2013).

Neste estudo, buscamos identificar e analisar as situações que os autores propõem nos livros didáticos para introduzir o conceito de limite de função. Essa investigação aconteceu por meio dos estudos de Vergnaud (2009). Para esse autor, uma situação envolve, além do conceito que é o objeto de ensino, diversos conceitos imbricados. Assim, para que os alunos aprendam as definições de limite de função, eles precisam lidar com uma variedade de situações e conceitos, que Vergnaud chama de campos conceituais.

Na monografia, fizemos o estudo dos conceitos envolvidos nas situações que os autores escolheram para apresentar as definições e isso nos permitiu fazer as análises dos dados produzidos durante nossa pesquisa nos livros didáticos selecionados. No processo de aprendizagem do conceito, os alunos podem se deparar com conceitos imbricados que dificultam a relação entre as noções envolvidas na definição intuitiva com o que é apresentado na definição formal. Dessa maneira, a pesquisa possibilitou uma reflexão sobre as situações que os autores dos livros didáticos escolhem, uma vez que esse é um dos recursos mais utilizados no processo de ensino e aprendizagem.

A seguir, apresentamos os livros didáticos escolhidos para nosso estudo, nossas escolhas metodológicas, as análises e por último algumas considerações finais.

## OS LIVROS DIDÁTICOS

Para a escolha dos livros didáticos a serem analisados, foi feita uma análise do Projeto Pedagógico do Curso (PPC) dos Cursos de Matemática – Licenciatura e Matemática – Bacharelado oferecidos pela UFMS em várias cidades do estado. Olhamos para as bibliografias básica e complementar presentes nas ementas da disciplina de Cálculo I e escolhemos as três obras que foram mais indicadas: *Cálculo Volume 1* de James Stewart (2013), *Um Curso de Cálculo Volume 1* de Guidorizzi (2015) e *O Cálculo com Geometria Analítica Volume 1* de Louis Leithold (1994).

## DESENVOLVIMENTO METODOLÓGICO

O objetivo geral da pesquisa foi fazer um estudo sobre as definições de limite de função apresentadas nos livros didáticos. Para isso, após a escolha dos materiais bibliográficos, identificamos as definições apresentadas pelos autores e, também, quais conceitos e representações foram utilizados. Por fim, analisamos como os autores relacionam as definições propostas. Escolhemos como ferramenta teórica e metodológica a teoria dos campos conceituais, com a intenção de investigar as representações e os conceitos imbricados que os alunos precisam para compreensão das definições, no processo de construção do conceito de limite de função.

O desenvolvimento da monografia se deu da seguinte forma: primeiramente, descrevemos cada livro didático e, em seguida, apresentamos a análise dos conceitos e das representações utilizadas pelos autores nas situações propostas para introdução das definições de limite de função. A seguir, apresentamos uma breve análise referente aos livros de Guidorizzi (2015) e Leithold (1994).

## DISCUSSÃO DA ANÁLISE

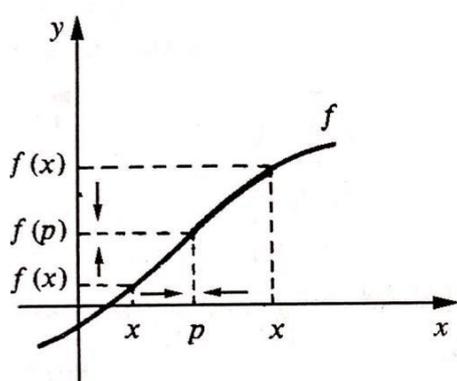
Em *Um Curso de Cálculo Volume 1* de Guidorizzi (2015), o autor apresenta a noção de limite de função no capítulo 3 intitulado *Limite e continuidade*, apresentando a definição intuitiva da seguinte forma:

Intuitivamente, dizer que o *limite de  $f(x)$ , quando  $x$  tende a  $p$ , é igual a  $L$*  que, simbolicamente, se escreve  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ , significa que quando  $x$  tende

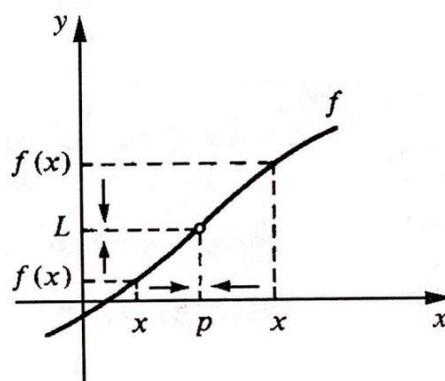
a  $p$ ,  $f(x)$  tende a  $L$  (GUIDORIZZI, 2015, p. 55).

Ao observarmos essa definição, notamos que o autor é bem objetivo, nos apresentando a noção de limite já com notações, ou representações simbólicas. Também traz o uso da linguagem natural e percebemos isso quando lemos “quando  $x$  tende a  $p$ ” e “quando  $f(x)$  tende a  $L$ ”. É notável que Guidorizzi (2015) tenta induzir o aluno a associar essas expressões com as seguintes notações, respectivamente:  $x \rightarrow p$  e  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ . Porém, não faz essa articulação de um modo detalhado. Isso pode dificultar a compreensão do limite, fazendo com que o aluno não se aproprie do conceito formal de limite: “Lembrar a definição de limite é uma coisa, adquirir a concepção fundamental é outra” (CORNU, 1991 apud AMORIM, 2015, p. 3).

Para auxiliar na compreensão dessa definição, o livro traz representações gráficas juntamente com a linguagem natural:



Quando  $x$  tende a  $p$ ,  $f(x)$   
tende a  $f(p)$ :  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$



Quando  $x$  tende a  $p$ ,  $f(x)$  tende  
a  $L$ :  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$

**Figura 1** – Exemplo de representações gráficas do Guidorizzi (2015)  
Fonte: Guidorizzi, 2015, p. 55

Na Figura 1 acima, considera-se os seguintes casos representados pelos gráficos de uma curva  $f$ :

- ✓ Quando  $x$  tende a um ponto  $p$ ,  $f(x)$  tende a  $f(p)$ ;
- ✓ Quando  $x$  tende a um ponto  $p$ ,  $f(x)$  tende a  $L$ .

O primeiro caso é quando a função  $f(x)$  é contínua no ponto  $p$  e o outro é quando a função não é contínua em  $p$ . Os gráficos auxiliam o estudante a interpretar o limite geometricamente, porém, ele precisa mobilizar mais conhecimentos para compreender as representações da curva, como por exemplo: domínio de função, imagem de uma função, continuidade de uma função em um ponto, entre outros:

Isso vai ao encontro com os pensamentos de Vergnaud (2009), que diz que, em uma dada situação, o aluno se depara com uma variedade de conhecimentos, os invariantes operatórios, que não são necessariamente explícitos, mas que o estudante precisará mobilizar para lidar, e compreender o que está sendo apresentado (SILVA, 2021, p. 19).

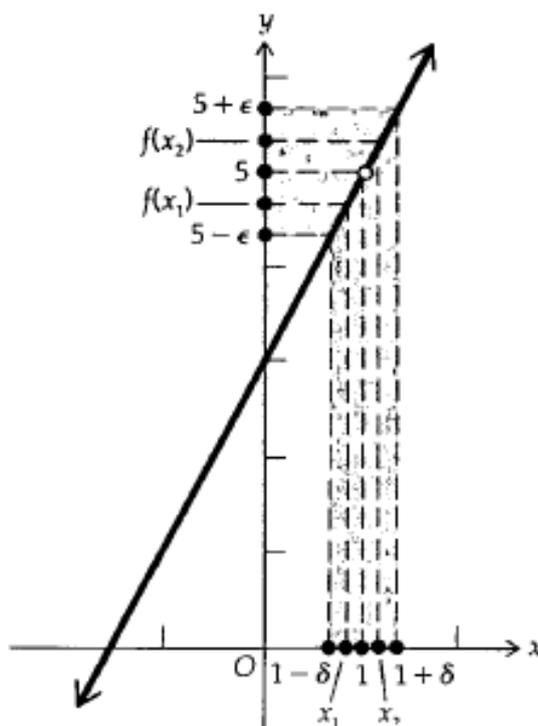
Em *O Cálculo com Geometria Analítica* de Leithold (1994), o autor utiliza diversas representações para definir intuitivamente o conceito de limite de função. Introduce o estudo de limite com um exemplo de uma função particular  $f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$ . O autor discute o fato de que, à medida que  $x$  fica cada vez mais próximo de 1,  $f(x)$  se aproxima de 5. Desse modo, apresenta a definição intuitiva:

Vemos que podemos tornar os valores de  $f(x)$  tão próximos de 5 quanto desejarmos, tomando  $x$  suficientemente próximo de 1. Outra maneira de dizer isto é que podemos tornar o valor absoluto da diferença entre  $f(x)$  e 5 tão pequeno quanto desejarmos, tomando o valor absoluto da diferença entre  $x$  e 1 suficientemente pequeno. Isto é,  $|f(x)-5|$  pode se tornar tão pequeno quanto desejarmos, tomando  $|x-1|$  suficientemente pequeno. Mas tenha em mente que  $f(x)$  nunca assume o valor de 5. (LEITHOLD, 1994, p. 57).

Em vários momentos, Leithold (1994) utiliza a linguagem natural. Percebemos isso nas expressões “valores de  $f(x)$  tão próximos de 5 quanto desejarmos” ou “ $x$  suficientemente próximo de 1”. Assim, o livro aproxima a noção intuitiva do limite com sua definição formal “[...] visto que já são introduzidas, na intuitiva, algumas representações algébricas com valores já atribuídos como  $|f(x) - 5|$  e  $|x - 1|$ ” (SILVA, BURIGATO, 2021, p. 3). É interessante notar que o autor utiliza diferentes representações para aproximar o estudante das noções de distância, conhecimento importante para o processo de construção do conceito de limite. Fazendo isso, será mais fácil compreender a definição formal. De fato,

Essa articulação entre a linguagem natural e as representações algébricas para tratar do mesmo conhecimento matemático como, por exemplo, a expressão “suficientemente próximo” e o módulo da diferença, é fundamental para a aprendizagem, visto que o aluno necessita dos conhecimentos matemáticos imbricados nessas diferentes representações linguísticas para compreender o conceito trabalhado (VERGNAUD, 2009) (SILVA, 2021, p. 30).

Antes de introduzir a definição formal, Leithold (1994) trabalha muito com o exemplo e a definição intuitiva com valores já atribuídos. Para auxiliar na compreensão dessa definição e, conseqüentemente introduzir a definição formal, a obra traz representações gráficas como, por exemplo, a Figura 2.



**Figura 2** – Exemplo de representação gráfica de Leithold (1994)  
Fonte: Leithold, 1994, p. 59

A Figura 2 permite que o aluno faça a interpretação dos quantificadores  $\epsilon$  e  $\delta$  geometricamente. Os quantificadores são um dos aspectos de difícil compreensão presentes na definição formal (CORNU, 1983 apud BURIGATO, 2019). Para interpretar corretamente a Figura, o estudante necessita de conhecimentos como: noções de distância por meio dos módulos, domínio e a imagem da função apresentada.

Em cada tipo de representação, temos a possibilidade de evidenciar diversos aspectos desses conceitos, que estão presentes de modo imbricados. Fato importante se estamos interessados na aprendizagem de um conceito, objeto de ensino, na perspectiva proposta por Vergnaud (2009) (SILVA, 2021, p. 31).

Observando a articulação entre diferentes representações que Leithold (1994) utiliza, notamos que ele busca contribuir com o processo de aprendizagem do conceito de limite. Cada representação mobiliza diferentes conceitos, desse modo, é importante essa variedade para dar sentido ao conceito de limite para o aluno conseguir relacionar as duas definições.

## CONSIDERAÇÕES

Primeiramente, identificamos se os autores apresentaram as definições intuitiva e formal de limite e como foi feita a introdução dessas definições. Percebemos que ambas as definições aparecem nos livros didáticos. A obra de Guidorizzi (2015) é mais direta, já

utilizando de representações algébricas. Comparando com a de Leithold (1994), a diferença entre elas é notável, visto que o autor introduz a noção estudando o comportamento de uma função particular utilizando representações numéricas.

Logo em seguida, identificamos quais conceitos e representações foram utilizados na apresentação das definições. Leithold (1994) utiliza diferentes representações para a introdução do conceito, principalmente a linguagem natural como, por exemplo, “podemos tornar os valores de  $f(x)$  tão próximos de 5 quanto desejarmos, tomando  $x$  suficientemente próximo de 1” (LEITHOLD, 1994, p. 57). Essa linguagem raramente aparece na obra de Guidorizzi (2015), em que encontramos mais representações algébricas e gráficas que a linguagem natural. Desse modo, é necessário que os livros didáticos apresentem um equilíbrio entre a intuição e o rigor no processo de aprendizagem do conceito (WAIDEMAN; TREVISAN; CARGNIN, 2017, p. 16).

Por fim, identificamos se os autores relacionavam as definições propostas e analisamos como eles a fizeram. Podemos perceber que as definições apresentadas aos estudantes exigem o conhecimento de diversos conceitos que estão imbricados. Por isso, é importante que os professores reflitam sobre as escolhas das situações para apresentar o conceito de limite, pois elas podem exigir dos alunos conhecimentos que não favoreçam a relação entre a definição intuitiva e formal. Assim, é fundamental que os professores trabalhem com diversas situações (BURIGATO, 2019) e escolham o livro didático mais adequado para o processo de construção do conceito de limite de função.

## REFERÊNCIAS

AMORIM, L. I. F. A (Re)Construção do Conceito de Limite do Cálculo para a Análise. *In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*. 4., 2015, Ilhéus. **Anais [...]**. Ilhéus, Bahia, 2015, p. 1592-1693.

BURIGATO, S. M. M. S. **Um Estudo sobre a Aprendizagem do Conceito de Limite de Função por Estudantes nos Contextos Brasil e França**. 2019. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2019.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. 5 ed. Vol. 1. Rio de Janeiro: LTC, 2015.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. 3 ed. Vol. 1. São Paulo: HARBRA, 1994.

SANTOS, M. B. S. **Um Olhar para o Conceito de Limite: Constituição, Apresentação e Percepção de Professores e Alunos sobre o seu Ensino e Aprendizado**. 2013. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo. 2013.

SILVA, V. L. L., BURIGATO, S. M. M. S. Relato de Experiência: Um Estudo da Introdução do Conceito de Limite em alguns Livros Didáticos. *In: ENCONTRO SUL-MATO-GROSSENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 14., 2021, Aquidauana. **Anais [...]**. Aquidauana: Sbem/Ms, 2022. p. 1-5.

SILVA, V. L. L. **Limite de Função em um Ponto: Uma Análise das Definições Propostas em Alguns Livros Didáticos**. Monografia (Graduação em Matemática – Licenciatura) – Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Campo Grande, 2021.

STEWART, J. **Cálculo**. 7 ed. Vol. 1. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

VERGNAUD, G. O que é aprender? *In: BITTAR, M.; MUNIZ, C. A. (Org.) A Aprendizagem Matemática na Perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais*. Curitiba: Editora CRV, 2009. p. 11-32.

WAIDEMAN, A. C.; TREVISAN, A. L.; CARGNIN, C. Limite de Funções Reais de uma Variável: uma Análise do Conceito e seu Ensino em Livros Textos. *In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 14., 2017, Cascavel. **Anais [...]**. Cascavel, 2017. Disponível em: [http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XIV\\_EPREM/paper/viewFile/294/43](http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XIV_EPREM/paper/viewFile/294/43). Acesso em: 16 ago 2022.

ZUCHI, I. **A Abordagem do Conceito de Limite via Sequência Didática: do ambiente papel e lápis ao ambiente computacional**. 2005. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.