ABORDANDO O CONCEITO DE MÚLTIPLOS VIA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Guilherme Oliveira Santos
Universidade Estadual do Paraná - UNESPAR
prof.guilherme.o.s@gmail.com

Sandra Regina D'Antonio Verrengia
Universidade Estadual de Maringá – UEM
srdantonio@uem.br

Ademir Pereira Junior
Universidade Estadual de Maringá – UEM
profadjr@gmail.com

Resumo: Esse trabalho apresenta o relato de uma experiência de ensino desenvolvida na Escola Estadual Adaile Maria Leite, localizada no município de Maringá, PR no âmbito do Programa Residência Pedagógica (PRP) – Subprojeto Matemática. O objetivo era de fazer com que os estudantes do 6º ano entendessem o conceito de múltiplos via Resolução de Problema. O desenvolvimento da proposta, efetivada de forma remota, seguiu os princípios metodológicos do *Lesson Study,* seguindo as etapas de planejamento, execução e análise e contou com a participação de residentes, professores preceptores e orientador. Em relação a proposta realizada foi possível perceber o interesse, participação e envolvimento dos alunos em buscar estratégias de resolução e validação para o problema proposto, culminando na sistematização do conceito de múltiplos. Foi possível também, identificar que o trabalho conjunto de planejamento e execução de uma aula, mesmo que de forma remota, contribuiu significativamente com a formação dos futuros licenciandos permitindo-os ver na prática aspectos teórico-metodológicos estudados durante as reuniões do PRP**.**
Palavras-chave: Residência Pedagógica. Ensino de Matemática. Lesson Study. Resolução de Problemas.

INTRODUÇÃO

O Programa de Residência Pedagógica (PRP) faz parte de um conjunto de ações que constituem a Política Nacional de Formação de Professores, tendo por objetivo aperfeiçoar a prática nos cursos de licenciatura e contribuir com a melhoria da educação. O programa tem duração de 18 meses nos quais os licenciandos que se encontram na segunda metade do curso têm a possibilidade de, em escolas da Educação Básica, observar de forma ativa a relação teórico prática estudada em seus cursos de graduação.

O processo de imersão dos licenciandos dar-se-á por meio de intervenções pedagógicas e regências em salas de aula das escolas campo, acompanhados pelos professores preceptores, que são docentes da rede básica de ensino atuantes na mesma área do licenciando e que participam também como bolsistas do programa. Durante o período de participação no PRP licenciandos e preceptores participam também dos momentos de estudo, orientação, preparação e planejamento e são orientados por um docente coordenador da instituição de Ensino Superior à qual o licenciando está vinculado.

Em particular com relação ao PRP - Subprojeto Matemática da Universidade Estadual de Maringá, os momentos de formação buscaram fomentar discussões acerca do processo de ensino e aprendizagem, por meio de estudos, leituras e discussões de trabalhos do campo da Educação Matemática. Essas discussões levantavam também questões relativas ao como, o porquê e para que se ensinar os conteúdos matemáticos apresentados nos documentos oficiais, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e as Diretrizes Curriculares Estaduais (DCE). Além disso, esse espaço era uma oportunidade de troca de ideias e experiências entre os residentes e os preceptores relativos à prática docente.

Em um desses momentos de estudo, tivemos a oportunidade de conhecer um pouco sobre a metodologia *Lesson Study* e, a partir das leituras e discussões a respeito dos materiais propostos pela professora coordenadora, fomos provocados a realizar uma experiência de ensino utilizando essa metodologia. Essa experiência é a que descrevemos nesse trabalho, envolvendo o conceito de múltiplos e apoiando-se na Resolução de Problemas como metodologia da aplicação na sala de aula. Nas próximas seções, apresentaremos sobre o *Lesson Study* e a Resolução de Problemas, bem como descreveremos a experiência vivenciada, pontuando ao final algumas considerações.

O *LESSON STUDY* E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

O *Lesson Study* (Estudos/Pesquisa de Aula) teve origem no Japão constituindo-se como uma política pública voltada a formação de professores. Trata-se de um processo dinâmico e colaborativo embasado em três elementos principais: o planejamento, a observação e a reflexão sobre a aula.

As etapas que constituem essa metodologia variam de quatro a seis, porém independentemente da quantidade de etapas a ênfase recai sobre os três elementos apresentados anteriormente. Nesse relato utilizamos a caracterização do *Lesson Study* retratada por Baldin (2009), uma vez que a autora compreende que a Resolução de Problemas provoca um ambiente em que o aluno se torna o centro do processo de ensino, priorizando o que é preconizado pela metodologia *Lesson Study*.

Etapas	**Característica**
Planejamento da Aula	Etapa em que se define um tema dentro do planejamento curricular. A partir do tema, um plano de aula é elaborado coletivamente por um grupo de professores contendo um problema desafiador cujo objetivo seja o de levar os estudantes a desenvolver uma determinada habilidade.
Execução da Aula	Etapa de implementação do plano junto a turma escolhida em que, um docente assume a turma e os demais observam a atuação do professor, a reação dos alunos e as interações que são por professor-alunos e alunos com seus pares estabelecida, registrando todos os aspectos que possam contribuir com a próxima etapa do Lesson Study com o intuito de aperfeiçoar a aula e verificar se o que fora estabelecido no plano de aula está, ou não, coerente com o objetivo proposto
Análise da Aula	Nessa etapa os registros da aula são observados e discute-se sobre o que ocorreu ao longo de seu desenvolvimento com foco no aluno e em sua aprendizagem, bem como, de avaliar se o plano inicial deverá ou não ser alterado ou adaptado.
Retomada	Etapa em que o plano de aula é novamente estudado e, caso necessário, modificado ou readaptado e, em seguida, reaplicado em outra turma

Quadro 1 – Etapas da *Lesson Study* segundo Baldin (2009)
Fonte: os autores

No *Lesson Study* o plano de aula é a espinha dorsal de todo o processo, servindo como: ferramenta de ensino (roteiro para as atividades de aula), ferramenta de comunicação (forma de explicitação de pensamento) e ferramenta de observação (análise do que fora proposto). Ao elaborar o plano de aula, Murata (2011) afirma que se faz necessário o trabalho colaborativo, a prática investigativa e reflexiva, além do foco na aprendizagem dos alunos.

No Brasil, a utilização da metodologia *Lesson Study* no campo da Educação Matemática tem, em pesquisas como Baldin (2009) e Fiorentini e Lorenzato (2012), denotado uma aproximação dos Estudos de Aula com a Resolução de Problemas, isto por compreender que a Resolução de Problemas é uma metodologia que, se bem utilizada pelo professor, fará com que o aluno seja o centro do processo.

De acordo com Branca (1997), a resolução de um problema envolve um processo de aplicação de conhecimentos prévios dos alunos em situações novas e desconhecidas nas quais o uso de tentativa e erro e a elaboração de outras estratégias possibilitarão aos estudantes a aplicação de regras lógicas para se chegar a conclusões válidas, bem como, os tornarão corajosos e dispostos a colocar suas conclusões a par de um exame minucioso por parte dos demais alunos e do professor.

Nesse sentido, quando levamos para a sala de aula problemas a serem resolvidos, Schoenfeld (1997) afirma que é importante que o professor estimule, questione e incentive os alunos orientando-os a refletir, verificar, avaliar e, se necessário, buscar novas estratégias para solucionar o problema. Que os auxiliem na validação dessas estratégias incentivando-os a justificar *por que fiz isso assim* ao invés de dizer *é assim que se faz*. Explicar aos discentes de onde vêm os argumentos — ou, melhor ainda, "[...] compreender os argumentos com eles, quando possível no intuito de desmistificar a matemática permitindo-lhes enfrentá-la com menos medo e apreensão" (SCHOENFELD, 1997, p. 23).

Com o objetivo de atingir essas e outros potencialidades com a resolução de um problema, Polya (2006) sugere quatro etapas para se bem resolvê-lo: compreensão do problema, elaboração de um plano, execução do plano, retrospecto. Para o autor:

> Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta (POLYA, 2006, p. v).

Pensando na Resolução de Problemas enquanto metodologia, Walle (2009) sugere três fases: antes, durante e depois. Segundo o autor, na fase antes (preparando os alunos) o professor deve verificar se o problema foi compreendido, além de ativar os conhecimentos prévios dos alunos que possam ser úteis na resolução daquele problema.

Na fase durante (alunos trabalhando), o professor deve deixar os alunos construírem seu conhecimento sem fazer antecipações desnecessárias. Schoenfeld (1997) sugere que os alunos trabalhem em pequenos grupos de forma que possam discutir e refletir sobre suas estratégias. Cabe ao professor ser apenas um mediador do processo, fazendo sugestões adequadas que instiguem a investigação dos alunos.

Por fim, a terceira fase para Walle (2009) é a depois (alunos debatendo), em que deve ser encorajada uma comunidade de estudantes de forma que as soluções encontradas sejam ouvidas e aceitas sem julgamentos, mas sim devolvidas com reflexões para que os próprios alunos sejam capazes de justifica-las como corretas ou não. Após as considerações postas, cabe ao professor sintetizar as principais ideias e junto aos alunos formalizar o conceito abordado em questão, sem deixar de lado as estratégias utilizadas para resolvê-lo e as justificativas do porque são adequadas ou não.

CONTEXTUALIZAÇÃO E DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE

A elaboração da etapa inicial do *Lesson Study* (Planejamento da Aula), em que ocorreu a escolha do problema e as discussões de como se daria a execução da aula, quais possíveis obstáculos encontrados em relação a compreensão do problema por parte dos estudantes, entre outros pontos pertinentes que tinham como foco o processo de ensino, ocorreram em dois momentos formativos do PRP em maio de 2021. O professor da turma, que também era preceptor do programa participou ativamente desses momentos, auxiliando o grupo na elaboração do planejamento, uma vez que conhecia os alunos.

A aplicação da proposta (Execução da Aula) ocorreu no mês de junho de 2021, em uma turma de 6° ano de um Colégio Estadual Adaile Maria Leite, localizado no município de Maringá – Paraná. Ao todo foram utilizadas cinco aulas de 50 minutos cada, sendo essas aulas geminadas e realizadas em três dias diferentes. Participaram dessa etapa o professor da turma, 10 residentes, a professora orientadora do PRP e 12 alunos daquela turma. É importante destacar que a aplicação ocorreu durante a pandemia do Covid-19, no período em que aulas estavam ocorrendo de forma remota via plataforma *Google Meet*.

Seguindo os pressupostos do *Lesson* Study, os residentes foram divididos em dois grupos. O primeiro grupo ficou responsável em auxiliar o professor regente nas intervenções e o segundo pela observação e registro da aula descrevendo como ocorreram as etapas da Resolução do Problemas e avaliando a participação e envolvimento dos alunos frente à proposta, bem como a condução do professor e dos outros residentes.

O professor da turma iniciou a aula, explicando aos alunos do 6° ano porquê haviam tantas pessoas diferentes acompanhando a aula, fazendo uma breve apresentação de cada um e da dinâmica que iria ocorrer em algumas aulas. Após esse momento inicial de ambientação, apresentou a situação problema a turma:

> Alice tem uma coleção de miniaturas de animais pré-históricos. Dispondo-os em grupos de 5 em 5, sobram duas. Dispondo-as em grupos de 9 em 9, sobra apenas uma. Determine a quantidade de miniaturas, sabendo que a coleção de Alice tem menos de 50 miniaturas. (VALENTIM, 2017, p. 57)

Após a leitura e apresentação inicial do problema o professor[1] perguntou aos alunos se todos haviam compreendido a situação, se possuíam alguma dúvida ou questionamento em relação ao enunciado, se compreenderam o que o problema pedia e se conseguiam identificar as informações/dados contidos no enunciado. Essa corresponderia a primeira fase da Resolução de Problemas proposta por Walle (2009): *antes*. Enquanto alguns compreenderam o que era

[1]Para simplificar a escrita, toda vez que mencionarmos “professor” estaremos nos referenciando ao professor da turma

solicitado pelo problema e começaram a traçar estratégias de como resolvê-lo, outros ficaram com dúvidas e necessitaram de intervenções.

Mesmo com uma nova leitura do problema pelo professor, o Aluno 1 (A1) encontrou dificuldades em entender como poderia resolver o problema proposto, uma vez fez que para ele, a quantidade total de miniaturas seria aleatória haja vista que Alice possuía menos de 50 miniaturas. A partir dessa afirmação professor e residentes procuraram mostrar ao aluno que o valor total de miniaturas de Alice não era aleatório e tinha relação direta com os dados anteriores presentes na situação propostas.

Após algumas inquietações levantadas, o A1 apresentou a seguinte estratégia: *se tomarmos que Alice tem 48 (isto é, uma quantidade menor que 50) e irmos subtraindo de nove em nove miniaturas, sobram ao final três miniaturas. Como deve sobrar apenas uma, podemos considerar que Alice teria 46 miniaturas (pois subtraindo de nove em nove, teríamos resto 1)*. Uma estratégia relacionada à tentativa e erro.

Diante da estratégia apresentada, o professor questionou se essa quantidade de miniaturas proposta por esse aluno (46) satisfaria também a outra condição do problema a organização de agrupamentos de cinco: *Dispondo-os em grupos de 5 em 5, sobram duas*. Com essa provocação, o aluno se viu novamente confuso em relação a sua estratégia de resolução. Nesse momento, os residentes sugeriram a releitura do problema e, após sua realização questionaram novamente, agora direcionado para toda turma e não apenas para aquele aluno, a respeito das informações nele apresentadas.

Feitas as observações e questionamentos que visavam atingir os objetivos da fase *antes*, o professor sugeriu aos alunos que pensassem e escrevessem no caderno possíveis estratégias de resolução para o problema, enfocando que poderiam relacionar a situação apresentada a outros problemas já resolvidos em outros momentos. Esclareceu também que após alguns minutos abriria o microfone para que os alunos expusessem suas estratégias de resolução, de forma que todos os alunos se encontrassem na fase *durante*.

No segundo momento do *Lesson Study* (o de execução do plano) o professor deu a palavra aos alunos deixando o microfone e a câmera abertos, bem como o chat disponível para o registro das conclusões encontradas. Alertou também aos alunos que era importante respeitar e considerar todas as ideias apresentadas e que esse seria também um momento de análise e retomada do problema pelo grupo. Iniciava-se nesse momento a fase *depois*.

O primeiro aluno a expor suas conclusões, o Aluno 2 (A2), expos que a sua estratégia se iniciou pelos agrupamentos de nove em nove miniaturas. Para evitar fazer uma representação por desenhos, o A2 escolheu pensar na tabuada do número nove, pensando em qual seria o resultado mais próximo de 50, uma vez que Alice tem menos que 50 miniaturas. Concluiu, então, que o número mais próximo seria 45 ($9 \cdot 5 = 45$), e como sobra uma miniatura nos agrupamentos de nove em nove, uma solução possível para a quantidade de miniaturas de Alice seria 46.

Visando reforçar a ideia apresentada pelo aluno e provocar uma nova discussão com a turma a respeito da estratégia apresentada o professor registrou na tela do *Paint* a divisão de 46 por 9 dando ênfase ao resto dessa divisão – que teria relação com o que fora proposto no problema: *grupos de 9 em 9, com sobra de uma miniatura.* Em seguida, questionou se ao organizar as 46 miniaturas em grupos de cinco em cinco, sobrariam duas miniaturas como ressaltavam as informações do problema.

O aluno A2 disse ao professor que, seguindo o raciocínio anterior, ao agrupar de cinco em cinco miniaturas o mais próximo de 50 seria 45 e, como deveriam sobrar duas miniaturas, a resposta seria 47, contudo, descreveu que 47 não satisfaria a condição anterior. Dessa forma, A2 concluiu que não seria possível chegar a uma resposta que satisfizesse o problema, uma vez que foram achadas duas quantidades diferentes e que Alice só tem uma quantidade de miniaturas.

O professor sugeriu que outro aluno apresentasse sua estratégia como forma de verificar se a afirmação de A2 seria ou não válida. O aluno A3 então apresentou a sua resolução, explicando que buscou em ambas as tabuadas do número cinco e do número nove, um número números que pudesse ser somado a um ou dois, satisfazendo assim, as condições do problema. Em seguida, expôs que a quantidade de miniaturas de Alice seria de 37, pois $5 \cdot 7 = 35$, somado a dois 37 e $9 \cdot 4 = 36$, que somando a um daria também 37.

O professor novamente no *Paint* fez o registro da estratégia do aluno anotando os produtos de ambas as tabuadas e, em seguida, a conclusão do aluno por meio do algoritmo da divisão de 37 por 5 e 37 por nove destacando os restos 2 e 1 respectivamente. Posteriormente, solicitou que outro aluno pudesse expor sua estratégia.

O Aluno 4 (A4), descreveu então sua estratégia afirmando que sabia que 50 dividido por 5 resultaria em 10, e, que com essa informação, pensou qual número na tabuada do cinco chegaria mais próximo de 50, identificando o número 45 (5 x 9). Em seguida, disse que fez a divisão de 50 por 9, identificando o resto cinco. Fez então a diferença de 50 por dois e por um ($50 - 2$ e $50 - 1$), chegando à conclusão de que organizando em grupos de cinco em cinco seriam 48 miniaturas e em grupos de nove em nove seriam 49 miniaturas.

O professor percebendo que o A4 estava tentando achar um número mais próximo possível de cinquenta e compreendendo que essa poderia ser também a dúvida de outros alunos chamou atenção dos estudantes para o fato de as quantidades apresentadas como solução serem diferentes e, indagou a turma sobre o porquê a solução teria de ser um número muito próximo a 50, não podendo ser um número menor como 30 ou 40, uma vez que esses números também seriam menores do que 50. Pediu então que pensassem a respeito dessas colocações, e solicitou que outros alunos apresentassem então suas estratégias.

O Aluno 5 (A5) disse que chegou à conclusão de que seria 47 a quantidade de miniaturas. Ele concluiu que subtraindo de cinco em cinco, a partir de 47, se chegará a dois, atendendo ao enunciado. Porém durante sua explicação, verificou que essa quantidade não funcionava para os agrupamentos de cinco em cinco, então decidiu parar a sua explicação e retomar sua resolução de forma a obter uma resposta coerente ao problema.

O Aluno 6 (A6) explicou que tomou o produto $5 \cdot 7 = 35$ e adicionou dois a essa quantidade obtendo 37. Em seguida, disse que dividiu 37 por 9 para verificar qual seria o resto da divisão e, como obteve resto um – valor que satisfazia também a informação do problema concluiu que Alice tinha 37 miniaturas.

O professor então questionou o A6 sobre o porquê iniciar sua estratégia tomando o produto de 5 por 7 e se houve a tentativa de estimar a resposta utilizando outros números. O A6 afirmou que sim, mas que, porém, outros valores não deram certo. Nesse instante a turma é questionada da seguinte forma: *Nesse caso, o que significaria o resto um na divisão de 37 por 9?* Os alunos respondem que se tratava da miniatura que sobra ao agrupar de nove em nove.

Então os alunos A2 e A5 são questionados se as estratégias apresentadas pelos alunos A3 e A6 faziam sentido para eles. Nesse instante o Aluno 7 (A7), tenta verificar se a estratégia do A6 estaria ou não correta e afirmou que pela calculadora consegue confirmar essa informação, realizando os seguintes cálculos: $5 \cdot 7 = 35$, depois $35 + 2 = 37$, depois $37 \div 9$.

O professor nesse instante abre então a calculadora do computador e faz as mesmas operações descritas pelo aluno A7, obtendo como resposta da operação $37 \div 9 = 4{,}111\ldots$, Após a realização dos cálculos sugeridos pergunta a turma se faz sentido pensar nos $4{,}1111\ldots$ como resposta para a verificação do que fora proposto pelos alunos A3 e A6, ou seria melhor observar o que acontece com o algoritmo da divisão considerando o 4 como quociente e o 1 como resto. Os alunos consideram mais adequado pensar na verificação da proposta a partir do algoritmo.

O Aluno 8 (A8) concordou com a resposta dos alunos A3 e A6, pois afirmou que a verificação correspondia as informações presentes no enunciado do problema concluindo-se que $7 \cdot 5 = 35, 35 + 2 = 37$ e que $4 \cdot 9 = 36, 36 + 1 = 37$. Como as quantidades são iguais, então essa seria a quantidade procurada. O aluno A1 ao tentar apresentar sua estratégia, teve problemas de conexão e não conseguiu explicar como chegou à resposta, limitando-se a dizer que seriam 46 miniaturas.

Por fim, o aluno A5 afirmou que como mais de uma estratégia de resolução apontava para a resposta de 37 miniaturas, ele tentou fazer quadros com agrupamentos de cinco em cinco e de nove em nove obtendo 35 e 36 em seguida, adicionou 2 ao valor obtido no agrupamento de 5 e 1 ao valor obtido no agrupamento de 9 conforme descrito no problema chegando a conclusão de que 37 era uma resposta válida para o problema.

Aluno 2 (A2)	**Aluno 3 (A3)**	**Aluno 4 (A4)**
5 x 9 = 45 45 + 1 = 46 46 ⌊9 −45 5 01 45 + 2 47	Tentou procurar o mesmo número nas tabuadas do 5 e 9. 5 x 7 = 35 35 + 2 = 37 9 x 4 = 36 36 + 1 = 37 37 miniaturas.	5 x 9 = 45 50 − 2 = 48 9 x 5 = 45 50 − 1 = 49
Aluno 5 (A5)	**Aluno 6 (A6)**	**Aluno 8 (A8)**
5 5 5 5 5 5 5 20 15 = 35 + 2 = 37 9 9 9 9 9 27 18 = 36 + 1 = 37	5 x 7 = 35 35 + 2 = 37 37 ⌊9 −36 4 01 37 miniaturas.	37 7 x 5 = 35 35 + 2 = 37 4 x 9 = 36 36 + 1 = 37 37 miniaturas.

Quadro 2 – Resoluções dos alunos A2, A3, A4, A5, A6 e A8 registradas pelo professor
Fonte: Registro da Aula

Nas aulas que ocorreram no segundo dia da aplicação, o professor propôs como início uma breve retomada do problema proposto na aula anterior e das estratégias de resolução expostas pelos alunos, dando ênfase ao fato de que a coleção de Alice continha um número de miniaturas menor que 50 e, que valores como 20, 30 ou 40 seriam todos menores, não havendo então a necessidade de a resposta ser um número tão próximo a esse valor como 47, 48 ou 49.

Nessa aula o aluno A1 que não havia compartilhado sua estratégia por problemas na conexão explicou o que havia pensado. Segundo ele, a quantidade de miniaturas seria de 46, pois ele dividiu 46 por 9 e obteve resto um, validando assim, o que o enunciado dizia sobre os agrupamentos de nove em nove. No entanto, ao ser questionado pelo professor com relação aos agrupamentos de cinco em cinco, com a sobra de duas miniaturas presente também como informação no problema, o aluno A1 rapidamente identifica que 46 miniaturas não satisfaz o enunciado e afirma que vai procurar outro número que satisfaça as duas condições.

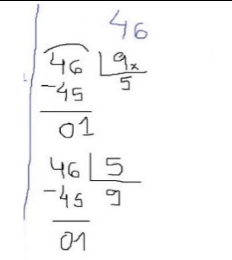
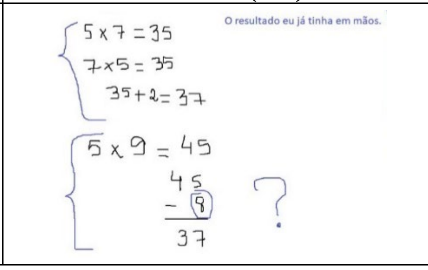
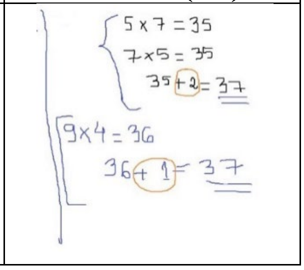
Nesse momento, o professor faz então a seguinte colocação para a turma: *suponhamos que não sobrem miniaturas, isto é, Alice tem uma quantidade de miniaturas que pode ser disposta em grupos de cinco em cinco e de nove em nove, de forma que essa quantidade seja menor que 50.* O aluno A2 em resposta ao professor afirma que seria possível formar cinco grupos com nove miniaturas ($9 \cdot 5 = 45$) e nove grupos com cinco ($5 \cdot 9 = 45$), e que a solução seria 45 miniaturas.

Voltando ao enunciado inicial, o professor então pede para que pensem novamente a respeito da situação tentando encontrar uma estratégia de resolução que leve em consideração as informações contidas no problema. Nesse instante o Aluno 9 (A9) apresenta sua estratégia dizendo que começou fazendo $5 \cdot 7 = 35$, em seguida conferindo $7 \cdot 5 = 35$ e a esse resultado acrescentou dois ($35 + 2 = 37$), em que esses dois são as miniaturas que sobram no agrupamento de cinco em cinco. Depois fez $5 \cdot 9 = 45$ e, desse resultado subtraiu oito obtendo 37 também como resposta para a quantidade de miniaturas de Alice.

O aluno A3 concordou com o aluno A9, porém destacou que entendia que em sua última passagem ($45 - 8$) que confirma o resultado 37, utiliza a resposta já vista como confirmação sem justificar o porquê da subtração, sendo necessário que A9 já soubesse a resposta. Nesse momento, os alunos A1 e A4 dizem concordar também com a estratégia de A9, porém afirmam que sua resposta vale para agrupamentos de nove em nove, mas não de cinco em cinco.

Como percebe a concordância de mais alunos para com essa estratégia o professor então pede aos alunos que justifiquem sobre o porquê fazer 45 menos 8. Os alunos A1 e A2 apesar de afirmarem que o aluno A9 estava correto, não souberam justificar o porquê dessa operação. O aluno A6 afirmou também não ter entendido essa operação. Nesse instante o aluno A9 afirma que fez 45 menos 8 porque já tinha o resultado em mãos, ou seja, tal subtração era apenas uma conferência do resultado não uma estratégia de mostrar sua validade.

O professor então ressalta a fala de A9: *o resultado eu já tinha em mãos* e sugere que os alunos, a partir das informações apresentadas no problema, tentem validar a estratégia proposta. Há então o seguinte questionamento: *observando a resolução de A9, isto é, fazendo* $5 \cdot 7 = 35$ *e* $35 + 2 = 37$*, que valida os agrupamentos de 5 elementos com resto 2 como podemos usando o mesmo raciocínio validar a informação referente aos agrupamentos de 9 elementos e resto 1*? O aluno A3 afirma que para validar a resposta de A9 levando em consideração as informações do problema, basta fazer $9 \cdot 4 = 36$ e $36 + 1 = 37$, estratégia que é confirmada também pelos alunos A1, A7 e A4.

Aluno 1 (A1)	Aluno 9 (A9)	Aluno 3 (A3)
		

Quadro 3 – Resoluções do A1, A9 e A3 registradas pelo professor
Fonte: Registro da Aula

Então é pedido que os alunos releiam o problema, olhem suas resoluções e tentem entender os significados das operações que realizaram validando suas estratégias a partir das informações contidas no problema. O aluno A3 retomou sua resolução, explicando que buscou na tabuada do cinco e do nove, números que ao somar dois e somar um respectivamente, resultassem em uma mesma soma (37), que seria correspondente a quantidade total de miniaturas. O professor questiona a turma se essa seria uma estratégia válida ou não.

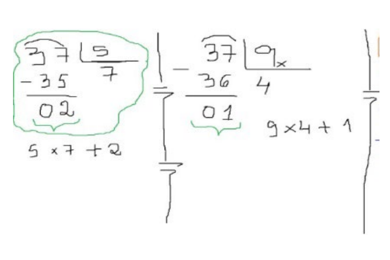
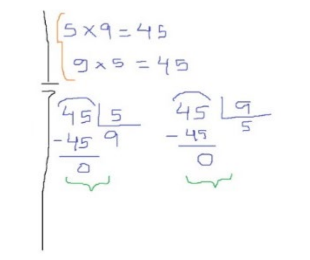
O aluno A6 afirma ser válida, visto que A3 utilizou todas as informações apresentadas e que a informação apresentada no problema. Também afirma que o objetivo dele não era fazer contas, pois ele não sabia quais seriam necessárias, mas que pensou que agrupar de cinco em cinco era o mesmo que multiplicar uma quantidade por cinco. Discutindo com os alunos, o professor questionou novamente se fazia sentido o raciocínio e qual o significado de somar um e somar dois nos números encontrados. Os alunos prontamente responderam que a tabuada fazia sentido, bem como, a soma dos números. O professor então sugeriu uma nova leitura do problema feita pelo A2, acompanhada em seguida de uma nova explicação da resolução de A3.

A partir desse momento, após as discussões e reflexões das estratégias traçadas pelos alunos na fase *depois*, o professor retoma o que foi discutido e sintetiza as principais ideias, questionando se as respostas dadas pelos alunos estavam coerentes com o problema. A resolução do A3 foi colocada em comparação com a resolução de A6 e A8 perguntando aos estudantes se, apesar de diferentes essas estratégias eram ou não válidas. O A2 afirma que sim, pois ambas as soluções atendem ao enunciado do problema. Destaca ainda que a solução de A6 é obtida pela divisão de 37 por 5 e 9, enquanto as soluções de A3 e A8 pela multiplicação e soma dos restos – miniaturas que ficariam fora dos agrupamentos.

O professor então questiona a turma sobre o porquê podemos considerar a resposta de 37 miniaturas como a correta. Os alunos prontamente afirmam que além de atender o que pede o enunciado do problema, 37 é uma quantidade menor que 50. Diante dessas considerações, é solicitado aos alunos que realizem as divisões $37 \div 5$ e $37 \div 9$.

Ao realizar a divisão, novamente os estudantes são questionados a respeito do significado do resto em ambas as situações. Os alunos respondem que esse resto significava a quantidade de miniaturas que sobravam quando eram agrupadas de cinco em cinco ($37 = 5 \cdot 7 + \mathbf{2}$) ou de nove em nove ($37 = 9 \cdot 4 + \mathbf{1}$). A partir dessa resposta, são questionados se o resto da divisão importa nesse contexto, o que afirmam positivamente. Há um destaque nessa questão da importância do resto, observando-se um outro problema: Sabendo que uma van escolar transporta 12 estudantes quantas vans seriam necessárias para transportar 38 estudantes? Nesse caso, o resto da divisão determina a necessidade de uma van a mais para transportar dois os alunos restantes que não cabem nas outras três vans completas.

O professor aproveita também para relembrar a situação explorada anteriormente em que solicitava aos alunos para suporem o que aconteceria se não sobrassem miniaturas ao agrupar de cinco em cinco, ou de nove em nove, questionando então qual seria o resto dessa divisão. Os alunos afirmam que é zero, de forma que o professor realiza os registros dessas considerações.

Divisão 1	Divisão 2
	

Quadro 4 – Divisões realizadas pelos alunos a pedido professor
Fonte: Registro da Aula

Observando os restos das divisões $37 \div 5$, $37 \div 9$, $45 \div 5$, $45 \div 9$, o professor questionou o que era possível concluir. O A2 afirma que no contexto do problema o resto é importante, pois indica a sobra das miniaturas. Surge então o questionamento: *o que se pode dizer a respeito das divisões de* $45 \div 9$ *e* $45 \div 5$ *que possuem resto zero?* Como os alunos não souberam responder, o professor muda seu questionamento, perguntando agora se a partir dessas divisões cujo resto é zero seria possível concluir algo sobre o número 45. Prontamente os alunos responderam que sim, destacando que 45 estava na tabuada do 5 e do 9 enquanto 37 não.

Na aula seguinte, são retomadas as discussões que ocorreram na aula anterior, de forma a relembrar os alunos sobre a atividade e sobre as considerações levantadas. Realizando mais alguns exemplos de divisões exatas e não exatas, o professor junto aos alunos observaram que nas divisões exatas o dividendo estava presente na tabuada do divisor, ou então que ele era o resultado da multiplicação do divisor por um número natural, foi formalizado o conceito de múltiplos de um número natural: *Concluímos então que um número natural* $\boldsymbol{a}$ *é múltiplo de um número natural* $\boldsymbol{b}$*, se* $\boldsymbol{a}$ *é divisível por* $\boldsymbol{b}$.

Para finalizar a atividade, foi solicitado que os alunos levantassem palavras chaves sobre a atividade desenvolvida aparecendo os seguintes termos: situação-problema; determinar a quantidade de miniaturas; na divisão podemos identificar se um número é múltiplo do outro; caso sobre resto na divisão.

Após a finalização da atividade, ainda no mês de junho de 2021, em um dos momentos formativos do PRP, os residentes que fizeram as anotações das aulas levaram suas considerações e expuseram o que ocorreu ao longo da aplicação. Aproveitamos o momento para discutir se o planejamento tinha sido ou não coerente e se a proposição da situação problema foi interessante para os alunos, proporcionando a aprendizagem do novo conceito, bem como, se haveria a necessidade de readequação do plano de aula. Concluímos no grupo que não haveria necessidade de readequação e reaplicação da proposta.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

No tocante à metodologia *Lesson Study* utilizada nessa proposta entendemos que foi importante e relevante para que pudéssemos de forma colaborativa observar as possibilidades de se constituir um planejamento cuidadoso no qual o aluno é a referência, isto é, falar a respeito da compreensão de certas relações entre alguém que ensina, alguém que aprende e algo que é o objeto de estudo – no caso, o saber matemático e, a partir da relação professor – aluno – saber definir o que seria mais adequado para o contexto em questão – as aulas remotas.

Com relação à Resolução de Problemas, nosso foco nesse trabalho, entendemos que apesar de a atividade ser desenvolvida de forma remota – o que impossibilita o trabalho em grupo e a orientação mais próxima do professor, conseguimos ao longo de toda a aplicação, motivar os alunos levando-os a refletir a respeito de suas estratégias bem como a justificar suas ideias e validar suas conclusões. Compreendemos que houve o interesse pela busca pela solução do problema apresentado, uma vez que praticamente todos os alunos apresentaram suas ideias.

A partir da atividade percebemos também que a formalização do conceito de múltiplos ocorreu de forma natural, partindo das considerações que os próprios alunos fizeram sobre as estratégias apresentadas, cabendo ao professor apenas sistematizar e formalizar na linguagem matemática o conceito, algo que vai ao encontro da proposta da Resolução de Problemas enquanto metodologia. Esses elementos são identificados por nós nas falas dos alunos e nas próprias palavras-chaves destacadas pelos mesmos.

REFERÊNCIAS

BALDIN, Y. Y. O significado da introdução da Metodologia Japonesa de Lesson Study nos Cursos de Capacitação de Professores de Matemática no Brasil. In: **XVIII Encontro Anual da SBPN e Simpósio Brasil-Japão**, 2009, São Paulo, SP. Anais do SBPN 09. São Paulo, SP: SBPN, 2009.

BRANCA, N. A. Resolução de problemas como meta, processo e habilidade básica. *In:* KRULIK, S.; REYS, R. E. (Orgs.). **A resolução de problemas na matemática escolar**. Tradução de: Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Afiliada, 1997. p. 4-12

BRASÍLIA, Coordenação De Aperfeiçoamento De Pessoal De Nível Superior – CAPES, Programa Residência Pedagógica. **Edital N°1/2020**, de 03 de janeiro de 2020. Disponível em: https://www.gov.br/capes/pt-br/centrais-de-conteudo/06012020-edital-1-2020-residencia-pedagogica-pdf

CURI, E. Lesson Study: Contribuições para Formação de Professores que Ensinam Matemática. **Revista Perspectivas em Educação Matemática:** Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS) – INMA/UFMS – v. 14, n. 34 – Ano 2021.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO; Sergio. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos.** Campinas, SP: Autores Associados, 2012.

MURATA, Aki. Introduction: conceptual overview of lesson study. In: HART, Lynn Cecillia; ALSTON, Alice S.; MURATA, Aki. (Eds.). **Lesson Study Research and Practice in Mathematics Education, Learning Together**, Springer, 2011, p.1-12.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

SCHOENFELD, A. H. Heurística na sala de aula. *In:* KRULIK, S.; REYS, R. E. (Orgs.). **A resolução de problemas na matemática escolar**. São Paulo: Afiliada, 1997. p. 13-31

VALENTIM, E. S. **A Divisibilidade no Ensino Fundamental**. 2017. 62 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2017.

WALLE, John A. Van de. Ensinando pela Resolução de Problemas. *In*: WALLE, J. **MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL**: Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula. Tradução de: Paulo Henrique Colonesse. 6. ed. São Paulo: Penso Editora, 2009. p. 57-79.