ENSINO DE FRAÇÕES ENVOLVENDO SITUAÇÕES DE ENSINO NA PERSPECTIVA DE MEDIÇÃO: ESBOÇANDO UMA ANÁLISE

Luciane Thiele
Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática (PPGECEM-Unioeste)
luciane_thiele@hotmail.com

Tiago Emanuel Klüber
Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste)
tiagokluber@gmail.com

Arthur Belford Powell
The State University of New Jersey
powellab@newark.rutgers.edu

Resumo: O ensino e a aprendizagem de frações são dois temas importantes da Educação Matemática, recorrentemente mencionados em pesquisas, documentos oficiais e relatórios de avaliação externa. O principal enfoque das abordagens práticas se centra na perspectiva de parte/todo. Frente a isso, compreendemos que se faz necessário investir em pesquisas com outra perspectiva, a de medição. Assim, focamos aqui a seguinte interrogação: Q*ue entendimentos conceituais sobre frações equivalentes no desenvolvimento do senso fracionário os estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental expressam ao participarem de atividades embasadas por uma perspectiva de medição, com o uso de barras de Cuisenaire?* As atividades foram implementadas em uma turma de 6° ano do Ensino Fundamental. As análises se pautaram no referencial teórico assumido para a construção das atividades e expressaram a facilidade dos alunos na construção de frações, principalmente as impróprias; na compreensão das relações do comprimento de uma barra em relação à unidade de medida estabelecida; e que uma determinada construção não simbólica pode representar diferentes representações simbólicas. Todos estes aspectos indicam possibilidade de apropriação da ideia de magnitude, da equivalência das frações e da avaliação da flexibilidade e razoabilidade dos resultados, sugerindo o desenvolvimento do senso fracionário.

Palavras-chave: Frações. Ensino de Frações. Senso Fracionário.

INTRODUÇÃO

Indagar sobre possíveis modos de desenvolver o senso fracionário nos alunos é um tema emergente de pesquisas (POWELL E ALI, 2018), bem como uma inquietação profissional da primeira autora deste trabalho, enquanto professora do Ensino Fundamental, pois vivencia a expressão de uma compreensão limitada dos alunos ao se depararem e lidarem com as frações. Essa incompreensão pode estar atrelada ao fato de este conteúdo ser abordado de maneira que priorize a repetição de mecanismos de resolução de problemas ou procedimentos, ou ainda, seu ensino seja orientado por apenas uma *visão ontológica*[1] das frações, na qual comumentemente são determinadas pela interpretação parte/todo (SCHEFFER; POWELL, 2019), e estão relacionadas a *problemas epistemológicos* (POWELL, 2018).

De um lado, na perspectiva dominante, concernente à ideia de parte/todo, "Uma fração é então considerada como o resultado de uma contagem *dupla*, o que é contrária à concepção de frações como números representando *uma* relação quantitativa entre duas grandezas ou números." (NI; ZHOU, 2005 *apud* POWELL, 2018, p. 83). Por outro lado, há pesquisas que propõem a medição como a primeira abordagem para o desenvolvimento do senso fracionário (POWELL; ALI, 2018; POWELL, 2018), uma vez que precede, historicamente, a estruturação da ideia de parte/todo (DAVYDOV; TSVETKOVICH, 1991; VENENCIANO; DOUGHERTY, 2014). Por essa perspectiva, a ontologia das frações se nutre de problemas de medição, que é resultado da comparação multiplicativa de pares de magnitudes (CARAÇA, 1951; POWELL, 2018).

Em alinhamento às ideias acerca da perspectiva de medição para o ensino de frações, abordaremos neste trabalho, que é parte de uma pesquisa de mestrado, atividades implementadas em uma turma do 6° ano, no ano de 2021, na qual a primeira autora deste trabalho era a professora da turma. As atividades foram elaboradas ou adaptadas com base no livro "Fração à moda antiga" (AMARAL; SOUZA; POWELL, 2021), onde os autores propõem a utilização do material manipulável barras de Cuisenaire como ferramenta de auxílio para desenvolvimento do senso fracionário. Com o material, os alunos podem criar de forma visual e prática asserções sobre frações como medida, questões de magnitude, ordem, desigualdade e equivalência.

Desta forma, movidos pela seguinte interrogação de pesquisa: Q*ue entendimentos conceituais sobre frações equivalentes no desenvolvimento do senso fracionário os estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental expressam ao participarem de atividades embasadas por uma perspectiva de medição, com o uso de barras de Cuisenaire?* O referencial teórico

[1] Para compreender sua natureza ou a ontologia de um objeto matemático, devemos começar com uma análise histórica da sua origem. A consciência da gênese do objeto influenciará nossas perspectivas acerca de como se adquire conhecimento dele, ou seja, sobre sua epistemologia. (POWELL, 2018, p. 79). Quando o ensino de frações é abordado apenas focado na ideia de parte/todo, a ontologia do objeto matemático fica obscurecida e fragmentada, sem levar em consideração os aspectos que lhe compõem, ficando focado, apenas em seus aspectos ônticos.

assumido para a construção das atividades, a descrição e a análise dos resultados preliminares desta pesquisa, seguidos de uma breve reflexão, serão apresentados a seguir.

REFERENCIAL TEÓRICO DAS ATIVIDADES

Ao voltar-se ao senso fracionário é necessário primeiramente tomar conhecimento sobre o senso numérico. O senso numérico se refere à capacidade de aproximar e julgar o *tamanho* dos números, abrangendo: i) a capacidade de ordenação e o reconhecimento das múltiplas representações dos números; ii) a habilidade nas suas operações; iii) a habilidade na escolha a representação que é mais apropriada a um contexto específico; iv) e uma noção de magnitude. (POWELL; ALI, 2018). Concomitantemente, a magnitude é uma característica de todos os números reais, portanto, engloba os números fracionários (POWELL; ALI, 2018; POWELL, 2019a).

Powell (2019a) partindo dos estudos de Carraher (1996), ao se referir a noção de magnitude, a decompõe em *magnitude* (ou magnitude absoluta) e *magnitude relativa*. A primeira se refere ao tamanho ou extensão de um objeto e a segunda ao tamanho de um objeto em comparação com outro, ou um determinado tamanho a ser medido com uma unidade de medida. Portanto, sempre que julgamos o tamanho de um número, estimar, ordenar ou analisar o resultado de um determinado cálculo, estamos de certo modo analisando a magnitude de um número.

Powell e Ali (2018), ao descreverem o senso fracionário, se referem a três categorias: *flexibilidade, razoabilidade* e *magnitude*. A *flexibilidade* se refere às representações, conceitos e procedimentos de cálculo. Isso implica na habilidade de lidar com as frações nas suas diversas interpretações, incluindo as frações simbólicas e não simbólicas. A *razoabilidade* se refere à capacidade de avaliar os resultados depois das operações. Já a *magnitude* ocupa a posição central e corresponde à interseção entre a flexibilidade e a razoabilidade.

Ao nos referirmos à magnitude de uma fração, estamos primeiramente reconhecendo-a como um número, que pode ser representado ocupando um lugar na reta numérica. Contudo, as frações também podem ser interpretadas como relações: parte-todo; razões; quocientes; medidas ou operadores. É importante trabalhar com essas diversas interpretações pois favorecem uma sólida construção para os números fracionários (KIEREN, 1980), incitando o senso fracionário nos alunos.

Powell (2019a), propõe a *medição* como a primeira abordagem para frações, pois coincide com sua história e é entendida como uma associação entre a comparação multiplicativa entre o comprimento de duas quantidades, sendo uma delas considerada como a unidade de medida e usada para medir a outra, e esta comparação é como uma fração recebe seu nome. Esse entendimento pode ser chamado de *perspectiva de medição* (POWELL, 2019c). Esse pesquisador propõe a utilização do material manipulável barras de Cuisenaire (Figura 1) para esse tipo de abordagem.

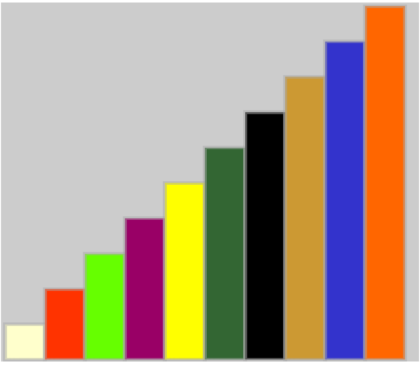

Figura 1 – As dez diferentes barras de Cuisenaire em forma de uma escala
Fonte: Elaborada pelos autores em https://www.elasticmind.com/rodsY/

Como exemplo da comparação multiplicativa utilizando as barras, apresentamos a seguinte construção:

Tomamos uma barra vermelha e uma laranja. Quando a barra vermelha é a unidade de medida, temos que uma barra laranja equivale a cinco vermelhas (Figura 2a). De outro modo, se o comprimento de uma barra laranja é a unidade de medida, temos que o comprimento de cinco barras vermelhas é igual ao comprimento de uma barra laranja; lendo da esquerda para a direita, o comprimento de uma barra vermelha é um quinto do comprimento de uma barra laranja (Figura 2b). O comprimento de duas barras vermelhas é então dois quintos do comprimento de uma barra laranja (Figura 2c).

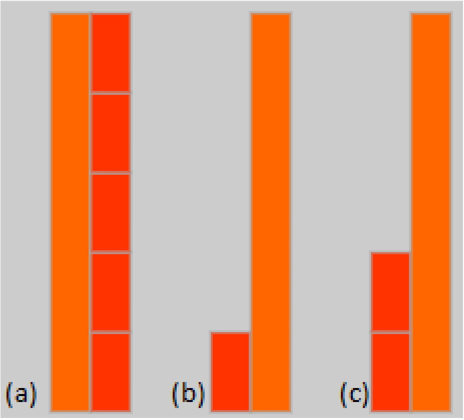

Figura 2 – (a) A barra laranja é igual a cinco barras vermelhas. (b) A barra vermelha é um quinto da barra laranja. (c) Duas barras vermelhas são dois quintos da barra laranja.
Fonte: Elaborada pelos autores em https://www.elasticmind.com/rodsY/

DESCRIÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES

Aqui apresentamos algumas das atividades que abrangem a equivalência de frações, utilizando as barras Cuisenaire como suporte cognitivo. Essas atividades foram desenvolvidas em uma turma de 6° ano do Ensino Fundamental, de uma escola pública na região oeste do Paraná[2]. Essa experiência ocorreu no ano de 2021, sob orientação da primeira autora e tiveram a duração de uma aula.

Compreendemos que a utilização desse tipo de abordagem, fará sentido somente se os alunos conseguirem estabelecer relações entre as cores e medidas das barras de Cuisenaire. Era o caso dessa turma, pois através das experiências com as barras anteriormente em outras atividades, já estabeleciam estas relações. Para a realização das atividades os alunos foram divididos em duplas, em que dispunham de um conjunto de barras para utilizarem no decorrer das aulas.

As atividades foram exploradas através de questionamentos, discussões e construções, que foram levantadas e gravadas ao longo da realização das atividades. Para cada ação a professora fez intervenções auxiliando os alunos quando necessário, conforme é apresentado nas discussões a seguir. Detalhamos três construções realizadas com os respectivos recortes das falas dos alunos.

A primeira situação abordada em sala de aula utilizou a barra vermelha e a barra laranja.

Professora: "Vamos utilizar agora uma barra vermelha e uma laranja nesta sequência. Qual fração foi formada?"

Aluno: "Dois décimos!"

Professora: "Quantas vezes a barra vermelha cabe na laranja?"

Aluno: "Cinco"

Professora: E quantas vermelhas utilizamos?

Alunos: "Uma!" "Mas então é um quinto?"

Professora: "Mas vocês me falaram que a fração é dois décimos..."

Aluno: "Então é um décimo?" (Silêncio na turma)

Professora: "Vocês me falaram dois décimos porque a barra vermelha corresponde a duas brancas, certo? E na laranja cabem quantas brancas?"

Alunos: "Dez!"

Professora: "Observem estas duas frações. O que podemos dizer sobre elas?"

Alunos: "Que são iguais?!"

Quadro 1 – Questionamentos realizados em sala de aula e suas respectivas respostas
Fonte: os autores, 2022

[2] Projeto aprovado pelo Comitê de Ética sob número 51787621.8.0000.0107.

Frisamos aqui, que um mesmo conjunto de barras podem exprimir diferentes representações simbólicas, dependendo da unidade de medida que for escolhida, desta forma estimulando o sentido de *flexibilidade*. O número de iterações realizadas por uma quantidade ao ser medida por outra, depende da unidade de medida definida. Nesta construção, ao escolher a barra laranja como unidade de medida, temos a fração 2/10 fazendo a correspondência em barras brancas, visto que uma barra vermelha possui o mesmo comprimento de duas brancas e uma barra laranja tem o mesmo comprimento de dez brancas. Da mesma forma, ao medir a barra laranja com barras vermelhas temos a fração 1/5, pois cinco barras vermelhas possuem o mesmo comprimento da barra laranja (Figura 3). Dessa forma, a professora explicitou que se tratavam de frações equivalentes.

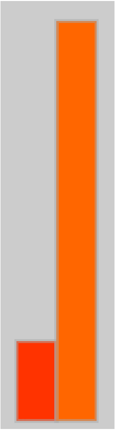

Figura 3 – Representação da fração 2/10 ou 1/5 com as barras de Cuisenaire.
Fonte: Elaborada pelos autores em https://www.elasticmind.com/rodsY/

Outra construção realizada utilizou a barra verde clara e azul.

Professora: “Agora peguem uma barra verde clara, e coloquem ao lado esquerdo da barra azul, qual é a fração representada?”

Alunos: “Três nonos”; “Não é”; ”É três terços”; "Três nonos ou três terços!”

Professora: “Três terços?”

Alunos: "É..";" Acho que não, acho que é um terço!"; “Três terços é um inteiro!”

Professora: “Ok, cabem três barras verdes aqui (se referindo a quantas barras verdes claras cabem na azul), mas, quantas barras verdes nós colocamos?”

Alunos: “Uma!” “Então é um terço...” “E três nonos também!”

Professora: Vocês observaram alguma relação entre um terço e três nonos?

Alunos: “São iguais!” “Professora os terços cabem na tabuada do 9!”

Professora: “Mas e os algarismos acima da barra? Que relação existe?”

Aluno A: “Professora eu consegui, uma vezes três é três e três vezes três é nove!”

Quadro 2 – Questionamentos realizados em sala de aula e suas respectivas respostas
Fonte: os autores, 2022

Novamente, temos mais de uma opção de representação simbólica dessas construções. Utilizando como unidade de medida a barra azul temos que ela corresponde a nove barras brancas e uma barra verde clara corresponde a três barras brancas, formando a fração 3/9. Mas, também podemos realizar a correspondência da barra azul em barras verdes claras, uma barra verde clara corresponde a 1/3 da barra azul. De forma visual e com apoio do material manipulativo, trabalhamos a ideia de frações equivalentes, observamos que possuem o mesmo tamanho e correspondem a mesma porção do inteiro.

Observamos, conforme o relato acima, que um dos alunos percebeu as relações multiplicativas entre as frações equivalentes, passando do processo de representação não simbólico para simbólico (*flexibilidade*). A análise de uma resposta de um dos alunos por outro, também cabe ser destacada, pois fazem a comparação de “três terços com um inteiro”, alegando que essa resposta não seria possível para esta situação (*razoabilidade*).

Para a terceira construção envolvemos as barras vermelhas e a barra marrom.

Professora: “Quantas barras vermelhas são necessárias para ter o mesmo comprimento da barra marrom?”
Alunos: “Quatro!”
Professora: “Uma barra vermelha é qual medida em relação ao comprimento da barra marrom?”
Alunos: “Um quarto!”; “Dois oitavos!”
Professora: “E agora, quantas vermelhas cabem na marrom?”
Alunos: “Quatro”
Professora: “Quantas vermelhas eu tenho?”
Alunos: “Uma”
Professora: Temos então “um quarto”, mas quem colocou “dois oitavos”, está certo também, uma barra vermelha equivale à duas brancas e a marrom à oito brancas.
Professora: E duas barras vermelhas?
Alunos: “Dois quartos ou quatro oitavos”; “quatro oitavos”; “Quatro quartos”
Professora: Cuidado não é quatro quartos... E quatro barras vermelhas?
Alunos: "Quatro quartos ou oito oitavos".
Professora: E isso corresponde a que?
Alunos: "Um inteiro!" "Um inteiro?"

Professora: Um inteiro, tamanhos iguais! E cinco barras vermelhas?
*Alunos***:** “Cinco quartos!”; “Dez oitavos!”; “Cinco quartos ou dez oitavos!”

Quadro 3 – Questionamentos realizados em sala de aula e suas respectivas respostas
Fonte: os autores, 2022

Tomando como unidade de medida a barra marrom temos que, oito barras brancas correspondem a uma marrom, e uma vermelha corresponde a duas brancas, formando a fração 2/8 (Figura 4). Utilizando a correspondência da barra marrom em vermelhas, temos que uma barra vermelha corresponde a 1/4 da barra marrom, trabalhando assim a equivalência entre essas duas frações.

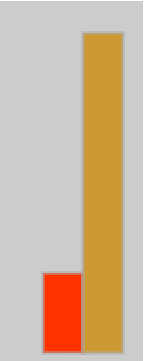

Figura 4 – Representação da fração 2/8 ou 1/4 com as barras de Cuisenaire.
Fonte: Elaborada pelos autores em https://www.elasticmind.com/rodsY/

Os alunos demonstraram facilidade na correspondência entre as barras, conforme verificamos no diálogo a seguir: “Quantas barras vermelhas são necessárias para ter o mesmo comprimento da barra marrom?”, não necessitando recorrer às barras e sim estabelecendo *manipulações mentais* (AMARAL; SOUZA; POWELL, 2021), por isso da necessidade dessas correspondências serem trabalhadas antes da equivalência das frações. Percebemos também, que as frações impróprias podem ser construídas com apoio visual, manipulativo, por meio de explicitação e argumentação de seus entendimentos, diferente da abordagem pela perspectiva parte/todo, em que uma figura particionada não é suficiente para determiná-la. Como por exemplo, para representar a fração 3/2 necessitamos de duas figuras divididas ao meio, ao qual “hachuramos” uma por inteiro e mais a metade da outra.

DISCUTINDO ASPECTOS DOS EPISÓDIOS POSTOS EM DESTAQUE

Após a turma ter compreendido as relações do comprimento de uma barra em relação à unidade de medida estabelecida, e que uma determinada construção não simbólica pode corresponder à diferentes representações simbólicas, (como por exemplo: uma barra vermelha e uma roxa podem representar as frações um meio ou dois quartos, ou seja, frações equivalentes), outras atividades foram abordadas para mostrar que comprimentos diferentes podem corresponder à mesma fração. Como por exemplo: dois terços do comprimento da barra verde clara e dois terços do comprimento da barra verde escura, possuem medidas diferentes apesar de os pares de barras representarem a mesma fração simbólica.

Trabalhar com frações pela perspectiva de medição nos mostrou, por parte dos alunos, uma maior compreensão da equivalência de frações, comparando à perspectiva de partição, pois ao trabalharem com o material e sem foco em regras inicialmente, podem depreender as relações sugeridas pelas atividades. No entanto, para trabalhar com os alunos esta proposta de ensino, há necessidade de terem contato com as barras anteriormente para que consigam realizar as correspondências cognitivas, escritas e manuais entre as barras e concomitantemente compreendam as noções de magnitude, oportunizando o entendimento das frações equivalentes.

Buscando a compreensão sobre senso fracionário percebemos que os conhecimentos simbólicos e não simbólicos são fundamentais para lidar com frações, para os alunos se apropriarem da magnitude e serem capazes de flexibilizar as representações e avaliar a razoabilidade dos resultados. Notamos que a maioria dos estudantes expressaram de forma independente, a ideia de magnitude com base nas imagens evocadas das barras de Cuisenaire. Perceberam que o fato de utilizarem uma mesma forma de representação não simbólica, pode levar às diferentes representações simbólicas, indicando enfocar as frações a partir da flexibilidade e razoabilidade dos resultados.

Cabe ressaltar que ao trabalhar desta maneira, não utilizamos de início a nomenclatura *numerador* e *denominador*. Assim, ao nos referirmos ao denominador usamos a terminologia *unidade de medida*. Portanto, destacamos: **essa unidade de medida precisa ser levada em consideração, pois por meio dela decide-se qual é a unidade mais conveniente para medir certo comprimento, que representará o número de iterações necessárias para medi-lo**. De certo modo, alguns comprimentos não "cabem" um número exato de vezes sobre o outro, tomado como unidade de medida, necessitando uma subunidade, como exemplo, uma barra preta (que corresponde a 7 brancas) não pode ser medida por barras vermelhas (que corresponde a 2 brancas), pois 7 não é múltiplo de 2.

Outra observação relevante para nosso estudo, é a facilidade que emergiu para a construção de frações, principalmente as impróprias, cujo numerador, sob a ideia de parte/todo, é maior que a unidade de medida. Não observamos esta mesma facilidade ao trabalhar com a interpretação parte/todo, na qual, uma determinada figura particionada não é suficiente para determinar uma fração imprópria.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse trabalho se propôs a analisar que entendimentos conceituais sobre frações equivalentes no desenvolvimento do senso fracionário, os estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental expressam ao participarem de atividades embasadas por uma perspectiva de medição, com a utilização do material manipulável barras de Cuisenaire

O ensino de frações pela perspectiva de medição demanda um tempo didático maior quando comparado com o ensino pela perspectiva de partição, conforme o observado na implementação das atividades. Contudo, defendemos que é necessário que seja investido um tempo considerável para o desenvolvimento do senso fracionário para refletir resultados positivos nos anos seguintes de escolarização. Em outras palavras, focar a compreensão no lugar da operação. Além disso, percebemos uma maior atenção dos alunos, talvez pelo fato de o material utilizado pertencer à rotina escolar deles e pelo manuseio das barras serem de simples entendimento, favorecendo a construção do conhecimento, no sentido de poderem elaborar, refinar, revisar e retomar as próprias ideias sobre os objetos fracionários em questão, antes da pura e mera operação de algoritmos.

Em suma, essas ações demonstraram a importância de se realizar um planejamento ao iniciar o conteúdo de frações que parta do desenvolvimento do senso fracionário, utilizando práticas que priorizem situações que envolvam a medição, de tal maneira que os conceitos como de frações impróprias e de equivalência sejam construídos com apoio visual, manipulativo, por meio de explicitação e argumentação de seus entendimentos. Isso é favorecido, por meio de uma compreensão distinta da natureza do objeto fracionário em sua ontologia e epistemologia.

REFERÊNCIAS

AMARAL, C. A. N. A.; SOUZA, M. A. V. F de.; POWELL, A. B. **Fração à moda antiga.** 1° ed. Vitória : Edifes, 2021. 114p.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa : Tipografia Matemática, 1951. 319p.

DAVYDOV, V. V.; TSVETKOVICH, Z. H. The object sources of the concept of fractions. In: DAVYDOV, V. V.; STEFFE, L. P. (Org.). **Soviet studies in mathematics education.**

Volume 6. Psychological abilities of primary school children in learning mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1991. p. 86-147.

KIEREN, T. E. The Rational Number Construct: Its Elements and Mechanisms. In: KIEREN, T. (ed.) **Recent Research on Number Learning**. Columbus: Eric/Smeac, p. 125- 150, 1980.

POWELL, A. B.; ALI, K. V. Design Research in Mathematics Education: Investigating a Measuring Approach to Fraction Sense. In: CUSTÓDIO, J. F. *et al.* (org.). **Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT): Contribuições para Pesquisa e Ensino.** São Paulo: Livraria da Física, p. 221-242, 2018.

POWELL, A. B. Melhorando a epistemologia de números fracionários: Uma ontologia baseada na história e neurociência. **Revista de Matemática, Ensino e cultura (REMATEC)**, v. 13, n. 29, p. 78-93, 2018.

_____. Aprimorando o conhecimento dos estudantes sobre a magnitude da fração: Um estudo preliminar com alunos nos anos inicias. **RIPEM: Revista Internacional de Pesquisa em Educação matemática**, v. 9, n. 2, p. 50-68, 2019a.

_____. Aprimorando o conhecimento dos estudantes sobre a magnitude da fração: Um estudo preliminar com alunos nos anos iniciais. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2019, Cuiabá. **Anais do XIII Encontro Nacional de Educação Matemática**. Cuiabá-MT: SBEM/MT, 2019b. Disponível em: < https://www.sbemmatogrosso.com.br/xiiienem/anais.php>. Acesso em: 21 jun. 2022.

_____. Como uma Fração Recebe seu Nome. Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática: **ReBECEM,** Cascavel, Pr, v. 3, n. 3, p. 700-713, 2019c.

SCHEFFER, N. F.; POWELL, A. B. Frações na Educação Básica: O que revelam as pesquisas publicadas no Brasil de 2013 a 2019. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 9, n. 20, 2020.

VENENCIANO, L.; DOUGHERTY, B. Addressing priorities for elementary school mathematics. **For the Learning of Mathematics**, v. 34, n. 1, p. 18-24, 2014.