



COMPONENTES DA APRENDIZAGEM EM UMA ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Suzana Lovos Trindade
UTFPR
strindade@alunos.utfpr.edu.br

Karina Alessandra Pessoa da Silva
UTFPR
karinasilva@utfpr.edu.br

Resumo: Neste artigo buscamos evidenciar como os componentes da aprendizagem se fazem presentes nos registros de representação semiótica em uma atividade de modelagem matemática desenvolvida no âmbito de aulas regulares de Matemática. Para isso, nos pautamos na Modelagem Matemática como alternativa pedagógica e na Teoria dos Registros de Representação Semiótica enquanto arcabouço teórico da didática da Matemática. Os dados que subsidiam nossa análise qualitativa de cunho interpretativo são registros escritos, fotos, gravações em vídeos e áudios no desenvolvimento de uma atividade de modelagem por 19 alunos do 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola privada do interior do Paraná. Por meio de encaminhamentos de uma atividade de modelagem matemática e com foco na geometria, os alunos foram convidados a solucionar uma situação-problema sobre o gasto final em uma reforma da quadra poliesportiva do colégio. A análise nos permitiu evidenciar componentes da aprendizagem nas ações que os alunos desempenham para desenvolver uma atividade de modelagem, considerando a coleta de dados, a resolução do problema e a comunicação de resultados pelos pares.

Palavras-chave: Educação Matemática. Registros de Representação Semiótica. Geometria. 8º ano do Ensino Fundamental.

INTRODUÇÃO

Desde os primeiros estudos de Raymond Duval sobre o elo entre semiótica e a matemática são destacadas preocupações com a aprendizagem dos estudantes, já que é notória a dificuldade que apresentam ao fazer transformações semióticas. Concordamos com Duval

(2015), quando afirma que houve uma “libertação” da matemática e seu simbolismo tradicional alcançando novas dimensões, pois

a matemática aparece como reflexão e ação específica sobre o mundo, realizada em e através dos signos mundanos, corporais e científicos (gráficos, diagramas, fórmulas, etc.), criando assim complexas redes de significados que se renovam no terreno da vida prática e concreta (DUVAL, 2015, p. 15).

O signo é algo que para uma pessoa toma lugar de outra coisa (objeto). O objeto é “uma coisa singular existente e conhecida ou que se acredita tenha anteriormente existido ou que se espera venha a existir” (PEIRCE, 2005, p. 48). Os objetos matemáticos somente são acessíveis por meio dos signos que são utilizados para os simbolizar. De modo geral, “[...] o sujeito aprendiz precisa se empenhar em alguma coisa que necessariamente o leva a simbolizar” (D’AMORE; PINILLA; IORI, 2015, p. 158).

A necessidade supracitada se faz presente em atividades oriundas de uma situação da realidade e solucionadas por meio de procedimentos matemáticos. Dentre as tendências da Educação Matemática, a Modelagem Matemática é subsidiada por atividades que têm como ponto de partida uma situação inicial (problemática) e como ponto de chegada uma situação final (que representa uma solução para a situação inicial) (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012). Nesse encaminhamento, se aloca um conjunto de procedimentos e conceitos matemáticos em que se lançam mãos de representações semióticas.

Neste cenário, a Modelagem Matemática se configura a partir de uma situação não advinda da matemática, mas dependente de resoluções matemáticas, que possibilitam grande diversidade de representações e significados. Assim, há um vínculo com os Registros de Representação Semiótica considerando que atividades de modelagem possibilitam a produção de diversos signos (VERTUAN, 2007) e, com isso, componentes da aprendizagem podem ser evidenciados. Sob uma abordagem semiótica e com o objetivo de identificar as causas de erros para intervir nas misconcepções dos alunos, D’Amore, Pinilla e Iori (2015) se debruçaram em cinco componentes da aprendizagem: conceitual, algorítmica, estratégica, comunicativa e semiótica.

Levando em consideração os apontamentos supracitados, neste artigo intentamos trazer reflexões para a questão de pesquisa: *como os componentes da aprendizagem se fazem presentes nos registros de representação semiótica em uma atividade de modelagem matemática desenvolvida no âmbito de aulas regulares de Matemática?* Para isso, nos apoiamos em uma pesquisa qualitativa de cunho interpretativo (BOGDAN; BIKLEN, 1994) para analisar os registros de representação semiótica presentes em atividades de modelagem

desenvolvidas com alunos de um 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola privada do norte do Paraná no primeiro semestre de 2022.

Os resultados desta investigação estão organizados neste artigo que é constituído por cinco seções, além desta introdução. Nas próximas duas seções é apresentado o quadro teórico sobre Modelagem Matemática e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica com foco nos componentes da aprendizagem. Em seguida, tratamos dos aspectos metodológicos em que apresentamos os sujeitos da pesquisa e o contexto em que a atividade se configurou. Uma descrição e análise da atividade de modelagem é abordada na sequência. Finalizamos com algumas considerações.

SOBRE MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Para Bassanezi (2002, p. 16), a “Modelagem Matemática consiste essencialmente na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do seu contexto de origem”. Com isso, a Modelagem prepara o aluno para a utilização da matemática em diferentes áreas, desenvolve a habilidade de pesquisa e exploração, além de possibilitar a compreensão sociocultural da matemática (BLUM, 1995).

Neste contexto, entendemos assim como Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 29) que, por meio da Modelagem, há a “possibilidade de ensinar e aprender Matemática e perceber suas aplicações para a resolução de problemas com que o aluno se depara fora da escola”. Isso porque a Modelagem Matemática é “uma alternativa pedagógica em que se aborda, por meio da Matemática, um problema não essencialmente matemático” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 9).

Desenvolver uma atividade de modelagem requer do aluno uma ação investigativa, pois o coloca em contato com situações não rotineiras à sala de aula (SILVA; ALMEIDA; GERÔLOMO, 2011). Essas ações e procedimentos, no desenvolvimento de uma atividade de modelagem, podem ser associados a fases ou etapas já caracterizadas na literatura (BASSANEZI, 2002; STILLMAN; BROWN; GALBRAITH, 2010; ALMEIDA; VERTUAN, 2014; BLUM, 2015; MEYER, 2020).

Segundo Almeida e Vertuan (2014, p. 4), as fases fazem parte de um “conjunto de processos necessários para configuração, estruturação e resolução de uma situação-problema, as quais caracterizam como: Inteiração, Matematização, Resolução, Interpretação de Resultados e Validação”.

A inteiração é o momento em que os alunos têm o primeiro contato com a situação-problema. Quando se destaca a necessidade de processos de transição de linguagens, ou seja, a transformação da linguagem natural em linguagem matemática, caracteriza-se a fase da matematização. A resolução consiste na construção de um modelo matemático, uma representação matemática para o que se está investigando. A interpretação dos resultados e validação implica na análise da solução obtida para a situação-problema, a partir do modelo matemático construído.

Corroboramos com Perrenet e Zwaneveld (2012, p. 3) que afirmam que “a Modelagem Matemática é, em primeiro lugar, sempre sobre algo, uma situação e um problema decorrente de uma situação, e que a matemática é ‘apenas’ uma parte de todo processo”. É durante esse processo que se faz presente uma variedade de registros de representação nos quais podemos evidenciar componentes da aprendizagem, que segundo Pinilla (2008) é necessário, já que através destes componentes é que o professor percebe os erros, as causas dos erros e busca estratégias para intervir nas concepções dos estudantes, quando relacionados a conteúdos matemáticos.

Sobre os REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

A teoria dos Registros de Representação Semiótica tem como precursor Raymond Duval, que valida as dificuldades que os estudantes encontram ao fazer transformações semióticas e, com isso, consideramos importante as análises e interpretações acerca das transformações para compreender as lacunas no ensino e na aprendizagem dos estudantes.

Para Duval (2011, p. 15), em Matemática, “a análise do conhecimento não deve considerar apenas a natureza dos objetos estudados, mas igualmente a forma como os objetos nos são apresentados ou como podemos ter acesso a eles por nós mesmos”. Com isso, Duval expressa preocupação com a compreensão do aluno, não relacionando apenas com a situação final, mas com os processos cognitivos mobilizados que estão ancorados nas representações semióticas.

De acordo com Duval (2015, p. 15),

a semiótica permite abordar os processos de significação nos quais se lançam os estudantes quando procuram compreender as formas de raciocínio matemático histórico e culturalmente constituído. [...] Através da semiótica podemos apreciar o fato de que nesses processos intervêm outros tipos de signos, como os gestos, as palavras, a entonação, o ritmo e outros signos corporais (DUVAL, 2015, p. 15).

Considerando que o autor defende a capacidade de o aluno transitar por diferentes registros e que esta é uma importante contribuição para a aprendizagem, é que se pode identificar e analisar os componentes da aprendizagem nos Registros de Representação Semiótica. Segundo Pinilla (2010, p. 9), “este tipo de análise é crucial para o docente, em um primeiro momento, quando organiza a própria atividade de ensino e, em um segundo momento, quando deve avaliar a aprendizagem dos estudantes”.

Concordamos com Pinilla (2010) quando esboça preocupações na aprendizagem em matemática ao afirmar que a mesma depende de múltiplos processos e aspectos, desde a interação do docente com os alunos, momentos de reflexão e construção do conhecimento, aos “saltos ao desconhecido, memórias e fantasias” (PINILLA, 2010, p. 8).

A autora ainda ressalta as lacunas aparentes na aprendizagem dos estudantes, indicando a necessidade de estudo sobre os motivos que as causam, que, para Pinilla (2010, p. 12), podem estar entre “o modo que o aluno representa algoritmos, na falta de estratégias de resolução de um problema, a comunicação adequada e representações semióticas”.

D’Amore, Pinilla e Iori (2015), a fim de identificar as causas de erro dos estudantes, propõem uma subdivisão da aprendizagem da matemática em 5 componentes: aprendizagem conceitual (noética) que consiste em construções cognitivas de conceitos que representam diferentes componentes dos objetos matemáticos; aprendizagem algorítmica que diz respeito à habilidade de resolver operações, cálculos, aplicação de fórmulas ou ao desenho de figuras usando os instrumentos adequados; aprendizagem estratégica, na qual importa os processos, não os produtos, buscando dar importância a procedimentos e estratégias que o estudante utiliza para resolver um problema; aprendizagem comunicativa que busca evidenciar a capacidade de exprimir ideias matemáticas, justificando, argumentando, demonstrando e representando de maneira visual com figuras, de modo eficaz; aprendizagem semiótica que é composta pela representação semiótica em diversos contextos e saber transformar representações semióticas, sem perder ligações com o significado do objeto de partida.

De acordo com Pinilla (2010), dentre as aprendizagens é importante destacar como a aprendizagem semiótica é fundamental e transversal, já que, inevitavelmente, se faz presente durante todos os tipos de processos, sempre que uma representação é necessária, seja por comunicação através do diálogo, registros (escrita, desenho, esquemas), interpretação de representações e conversões.

Levando em consideração os componentes da aprendizagem supracitados é que lançamos olhar para os registros de representação semiótica produzidos por alunos de um 8º ano do Ensino Fundamental no desenvolvimento de uma atividade de modelagem.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

De modo a trazer reflexões para a questão de pesquisa - *como os componentes da aprendizagem se fazem presentes nos registros de representação semiótica em uma atividade de modelagem matemática desenvolvida no âmbito de aulas regulares de Matemática?* - desenvolvemos uma atividade de modelagem com uma turma do 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola privada localizada no norte do Paraná.

Em maio de 2022, a professora (primeira autora deste artigo), considerando o interesse dos alunos com uma possível reforma para a quadra poliesportiva da escola, sugeriu que fossem elencadas algumas necessidades de melhoria desse espaço. A turma era formada por 19 alunos, que foram organizados em grupos compostos por 3 ou 4 integrantes. Os grupos indicaram aspectos da quadra que consideravam mais importantes para reforma, como: chão, telhado, arquibancada e grades laterais. Para este artigo escolhemos descrever e analisar a atividade desenvolvida pelo grupo que optou estudar a reforma do chão. A escolha desse grupo se justifica pelo envolvimento de todos os integrantes, bem como a autonomia que desenvolveram na busca por diferentes estratégias para determinar o custo da reforma do chão da quadra poliesportiva.

Os dados que subsidiam nossa análise qualitativa de cunho interpretativo (BODGAN; BIKLEN, 1994) são registros escritos, fotos, gravações em vídeos e áudios no desenvolvimento da atividade de modelagem. Para manter o anonimato dos alunos do grupo, utilizamos a letra A e um número que os diferencia - A1, A2, A3 e A4 -, a professora é denominada como P.

OS COMPONENTES DE APRENDIZAGEM EVIDENCIADOS EM UMA ATIVIDADE DE MODELAGEM

Em um primeiro momento, os alunos foram até a quadra poliesportiva do colégio para que fizessem a coleta dos dados que julgavam necessários para a resolução da situação-problema. Os alunos se mostraram envolvidos, a princípio cogitaram que se fizessem uma boa tarefa conseguiriam a reforma da quadra, o que validou a importância de levar à sala de aula atividades que caracterizam situações do cotidiano dos alunos.

A primeira ação do grupo de alunos foi realizar medições da quadra, utilizando uma trena (Figura 1). Os alunos conversaram entre si para especificar o uso desse instrumento de medida. Aprendizagens comunicativa e estratégica foram reveladas nas falas dos alunos, de acordo com a transcrição a seguir:

A1: Nós só temos régua, não vai ser suficiente para medir essa quadra toda.
A2: Eu tenho aquele negócio que você puxa e parece uma régua gigante...
A1: A trena!
A3: Dá pra usar o Google Earth também.
A2: Vamos tentar medir e se a gente não conseguir a gente tenta outra coisa. O relógio do A4 dá pra usar pra medir também, mede passos e distância.

De acordo com Pinilla (2010, p. 94) a aprendizagem estratégica está no ato de “resolver problemas e saber como agir em situações problemas, que é um veículo importante para formação de conceitos”, além de perceber que, mais válido do que a resposta final, são os caminhos que te levaram à ela.

Por meio da medição realizada pelos alunos, podemos evidenciar as aprendizagens conceitual, estratégica, comunicativa e semiótica, que segundo Pinilla (2010) os componentes da aprendizagem não são independentes e que o resultado positivo da aprendizagem é consequência da interação dos mesmos.

A aprendizagem conceitual se caracteriza quando os alunos fazem as medições para calcular a área da quadra, ao mesmo tempo, a aprendizagem estratégica, quando usam instrumentos de medir e aplicativos para auxiliar na coleta de dados.

A comunicação entre os alunos se configura também como aprendizagem, enquanto dois integrantes faziam as medições, outros anotaram os dados, observando nessa ação a aprendizagem semiótica, nas diferentes maneiras de registros.



Figura 1 - Coleta e registro de dados para cálculo de área
Fonte: arquivo da professora

A aprendizagem conceitual se caracteriza quando observamos a construção dos conceitos, e “um conceito é considerado construído quando o estudante tem condição de identificar propriedades do conceito, de representá-lo, de transformar tal representação, de utilizá-la de maneira adequada” (D’AMORE; PINILLA; IORI, 2015, p. 165). Com isso,

podemos observar que os alunos registraram as informações coletadas, representando-as em desenhos e outros esquemas (Figura 2). Os alunos transformaram os dados coletados, por meio das medições, bem como o valor da tinta a ser utilizada. Para isso, esboçaram as informações em uma lista e em um esquema figural, para ajudar na compreensão, conforme relataram durante o desenvolvimento da atividade.

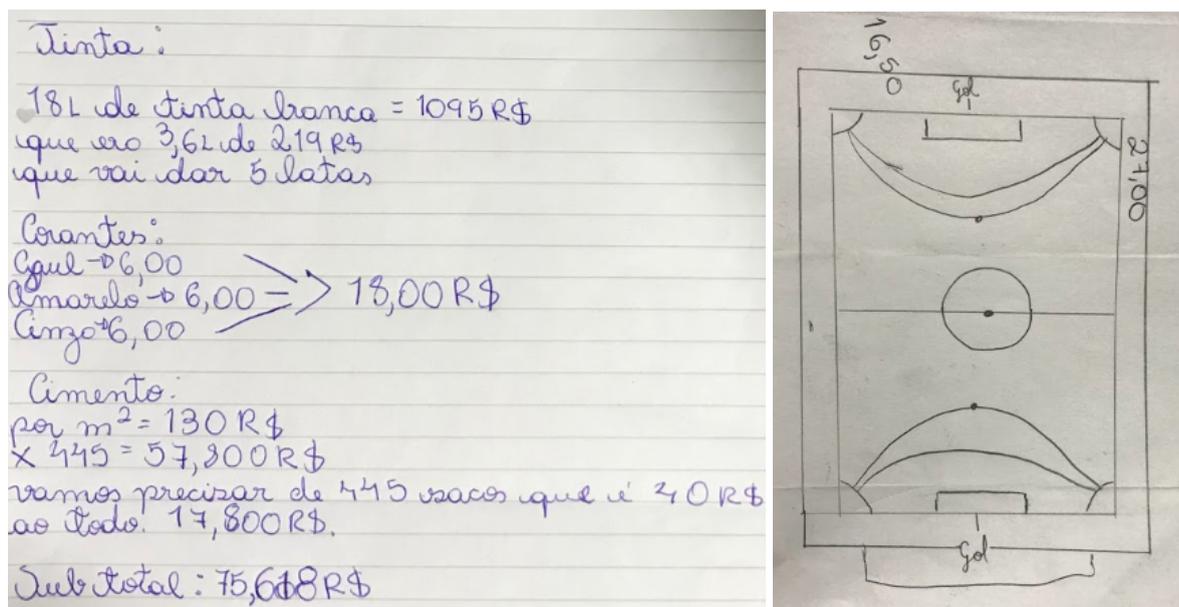


Figura 2 - Registro dos dados coletados
Fonte: relatório dos alunos

A aprendizagem algorítmica (Figura 3) é salientada quando os estudantes transcreveram as informações, obtidas com uso de instrumentos de medidas, e também ao efetuar os cálculos para obter a área ocupada pela quadra e a quantidade de materiais necessários para pintura e reforma. Nos registros dos alunos, podemos visualizar estratégias que eles consideraram importantes para a reforma do chão da sala, bem como hipóteses que foram elencadas durante a resolução, como na transcrição a seguir:

- A3: Precisamos nivelar o chão antes de pensar em pintar gente!
- A2: Vamos ter que pensar na pessoa que vai fazer isso, ou na empresa né?
- A3: Acho que vai ficar muita coisa pra gente pensar né, porque ainda teria os materiais de construção.
- A4: Professora, a gente pode fingir que já tem os instrumentos e as pessoas para fazer isso? Aí a gente calcula o cimento que vai precisar.

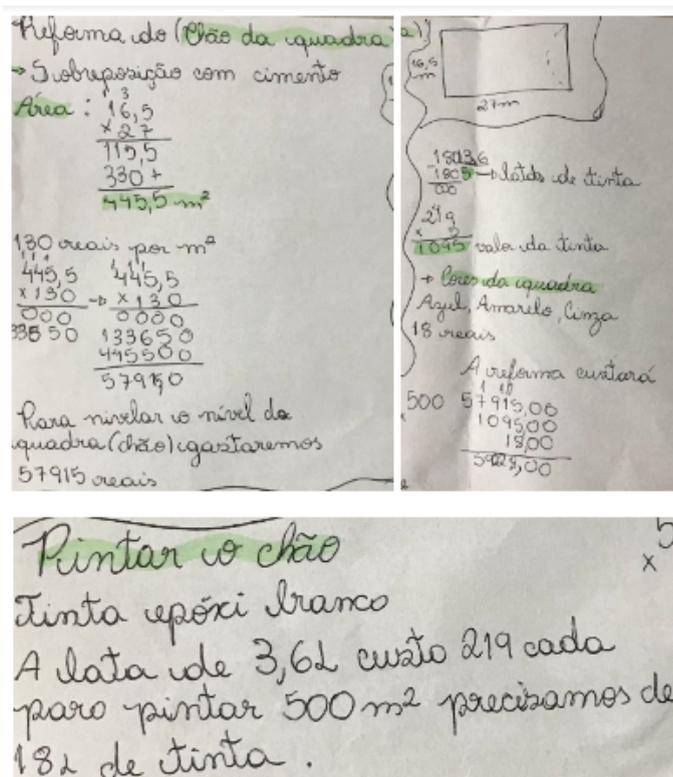


Figura 3 - Registro de cálculos
Fonte: relatório dos alunos

Os alunos fizeram o uso de telefone celular para fazer orçamentos fictícios, com isso, conseguiram os dados (Figura 3) para responder à situação-problema. Deram atenção ao tipo de tinta que é usada para pisos de quadras poliesportivas e até mesmo para as cores. Concordamos então com Greefrath e Siller (2017, p. 530), quando argumentam que “as atividades de modelagem no ensino de matemática também estão sujeitas à influência de ferramentas digitais. Ferramentas digitais podem ser de grande ajuda para professores e alunos, particularmente em conexão com problemas do mundo real e suas discussões”.

Para que cada grupo expusesse a solução do seu problema (Figura 4), foi realizado um momento de plenária com a turma, a fim de que a discussão contribuísse para a resolução dos grupos, em que mais uma vez, evidenciamos a aprendizagem comunicativa, que “busca evidenciar a capacidade de exprimir ideias matemáticas, justificando, argumentando, demonstrando e representando de maneira visual com figuras, de modo eficaz” (D’AMORE; PINILLA; IORI, 2015, p. 167).

Nos registros feitos na lousa para compartilhar a resolução, os alunos mostraram os dados que obtiveram sendo eles: o valor das tintas, para isso, relataram que fizeram ligações a diversas lojas a fim de obter o melhor preço; as dimensões da quadra, com auxílio da trena e a quantidade de tinta necessária para pintar determinada área, com ajuda de pesquisas.

Por meio das pesquisas determinaram que 18 litros de tinta seriam suficientes para pintar 500 m^2 , mas precisavam saber quanto gastariam com as latas de tinta e quantas seriam necessárias. Para isso, fizeram o cálculo proporcional, obtendo o valor total de R\$ 59 028,00.

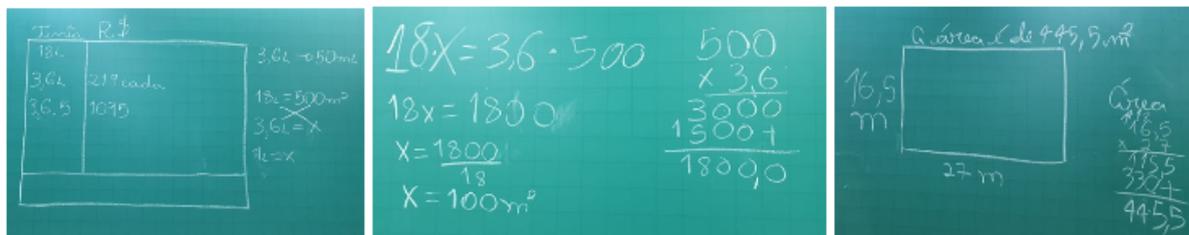


Figura 4 - Momento em que os grupos compartilharam resoluções
Fonte: arquivo da professora

Neste momento, os registros das falas dos alunos mostraram que haviam dificuldades acerca de operações com números decimais, como mostra a transcrição:

A3: Professora, posso colocar apenas as respostas? Tenho medo de fazer errado.

P: Vamos fazer juntos, pode ser?

A3: É que nós conferimos na calculadora.

P: Sem problemas, podemos verificar na calculadora, mas precisamos saber como efetuar os cálculos.

Além das dificuldades apresentadas, fica claro que os alunos se preocuparam em efetuar os cálculos da maneira correta, até mesmo quando buscaram qual área de uma quadra poliesportiva para verificar se estavam corretos. Em um grupo do whatsApp mandaram a foto de uma das pesquisas que fizeram, conforme mostra a Figura 5.



Figura 5 - Pesquisa dos alunos
Fonte: arquivo da professora

Com o desenvolvimento da atividade foram evidenciados componentes da aprendizagem em registros de representação semiótica dos alunos, de modo que evidenciamos que eles transitaram por diferentes tipos de registros. Concordamos com Duval (2004) quando

assegura a necessidade de o aluno recorrer a um tipo de representação, independente de qual seja, e a partir dela aprender algum conceito matemático.

No Quadro 1 apresentamos de forma sucinta os componentes da aprendizagem e as ações dos alunos no desenvolvimento da atividade de modelagem.

Componentes da Aprendizagem	Ações dos alunos
Aprendizagem Conceitual	Coleta de dados para calcular a área da quadra e o modo como representaram. Pesquisa para descobrir a quantidade de tinta necessária e cálculo proporcional.
Aprendizagem Algorítmica	Cálculos efetuados para determinar a área da quadra, quantidade de tinta, valor estimado para reforma.
Aprendizagem Estratégica	O processo pela busca de informações, pesquisas, ligações, coleta de dados, foi significativa para o produto final.
Aprendizagem Comunicativa	Diálogo entre os grupos. Momento de discussão com a sala acerca dos resultados obtidos.
Aprendizagem Semiótica	Transversal a todas as aprendizagens, já que os alunos utilizaram várias representações, sendo: escrita, língua natural, representações geométricas, escrita algébrica.

Quadro 1 - Componentes da aprendizagem presentes nas ações dos alunos.

Fonte: as autoras

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao desenvolver atividades de modelagem matemática com alunos do 8º ano do ensino fundamental, podemos então trazer reflexões para a questão de pesquisa: *como os componentes da aprendizagem se fazem presentes nos registros de representação semiótica em uma atividade de modelagem matemática desenvolvida no âmbito de aulas regulares de Matemática?*

A partir de uma situação que parecia de interesse, a professora sugeriu que os alunos fossem colocados em ação para resolver um problema - a reforma da quadra poliesportiva. Um dos grupos, que ficou responsável por analisar a reforma do chão da quadra, buscou encaminhamentos para a coleta de dados por meio de medições com trena e validação pesquisando informações em sites. Ações de busca de informações nos possibilitou inferir sobre aprendizagens estratégicas e comunicativas, bem como de aprendizagem conceitual considerando a manipulação de instrumentos de medidas.

Quando os alunos registraram as informações que coletaram e buscaram uma solução para o problema que se propuseram a investigar, aprendizagens conceitual e algorítmica se fizeram presentes. Por meio da resolução, ações como “descrever a situação, permitir a análise dos aspectos relevantes da situação, responder às perguntas formuladas sobre o problema” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 16) exigiram que conceitos e procedimentos matemáticos se fizessem presentes e abarcados pelos alunos.

Com isso, evidenciamos nos registros de representação semiótica dos alunos os cinco componentes da aprendizagem sempre integrados com a aprendizagem semiótica, que segundo Pinilla (2010) é transversal às demais aprendizagens. De maneira geral, a partir de registros de representação semiótica, podemos observar a transversalidade dos signos com os componentes da aprendizagem.

Com o auxílio de representações, segundo Duval (2004), a aprendizagem acontece, desempenhando papel fundamental na aprendizagem matemática, além da conversão das mesmas, que possibilita a construção do conhecimento matemático.

Com isso, podemos afirmar que uma atividade de modelagem matemática contribui de maneira eficaz para o ensino e para aprendizagem, dando mais autonomia ao aluno ao tornar o professor um mediador.

Concluimos que há muito mais para analisar ao buscar componentes da aprendizagem em diferentes registros e que para que esses sejam evidenciados, o professor tem papel fundamental na escolha da atividade e no modo que faz as mediações, a fim de que as ações dos alunos se articulem com as aprendizagens.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Editora Contexto, 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; VERTUAN, R. E. Modelagem matemática na educação matemática. In: ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. A. P. (Orgs.). **Modelagem Matemática em foco**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2014. p. 4-8.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Contexto, 2002.

BLUM, W. Applications and Modelling in mathematics teaching and mathematics education – some important aspects of practice and of research. In: SLOYER, C. et al (Eds.). **Advances and perspectives in the teaching of Mathematical modelling and Applications**, Yorklyn, DE: Water Street Mathematics, 1995, p. 1-20.

BLUM, W. Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In: CHO, S. J. (Eds.) **The Proceedings of the 12th international congress on mathematical education**, Cham: Springer, 2015, p. 73-96.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação**. Porto: Porto Editora, 1994.

D'AMORE, B., PINILLA, M., IORI, M. **Primeiros Elementos de semiótica: sua presença na importância no processo de ensino-aprendizagem da matemática**. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015. 183 p.

DUVAL, R. **Primeiros Elementos de semiótica: sua presença na importância no processo de ensino-aprendizagem da matemática**. Prefácio. In: D'AMORE, B., PINILLA, M., IORI, M. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015. 183 p.

DUVAL, R. Semiosis y Pensamiento Humano: **Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales**. Universidad del Valle: PeterLang, 2004.

DUVAL, R. **Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas**. 1. ed. São Paulo: PROEM, 2011. 160 p.

GREEFRATH, G.; SILLER, H. S. Modelling and simulation with the help of digital tools. In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; KAISER, G. (Eds.). **Mathematical modelling and applications**, ICTMA 17. Dordrecht: Springer, 2017, p. 529-539.

MEYER, J. F. C. A. Modelagem Matemática: O desafio de se 'fazer' a Matemática da necessidade **Com a Palavra, o Professor**, v. 5, n. 11, p. 140-149, 2020.

PERRENET, J. C.; ZWANEVELD, B. The many faces of the mathematical modeling cycle. **Mathematical Modelling and Application**, v. 1, n. 6, p. 3-21, 2012.

PEIRCE, C. S. **Semiótica**. São Paulo: Perspectiva, 2005.

PINILLA, M. I. F. **Múltiplos aspectos del aprendizaje de la matemática: Evaluar e intervenir en forma mirada y específica**. 1. ed. Colombia: Editora Magistério, 2010. 232 p.

SILVA, K. A. P.; ALMEIDA, L. M. W.; GERÔLOMO, A. M. L. "Aprendendo" a fazer modelagem matemática: a vez do aluno. **Educação Matemática em Revista**, v. 1, n. 1, p. 28-36, 2011.

STILLMAN, G.; BROWN, J.; GALBRAITH, P. Identifying challenges within transition phases of mathematical modeling activities at year 9. In: LESH, R.; GALBRAITH, P. L.; HAINES, C. R.; HURFORD, A. **Modeling students' mathematical modeling competencies**. New York: Springer, 2010, p. 385-398.

VERTUAN, R. E. **Um olhar sobre a Modelagem Matemática à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica**. 2007. 141 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.