



União da Vitória - Paraná

IX EPMEM

Encontro Paranaense de Modelagem na
Educação Matemática

Informações sobre os Autores:

Eduardo Cesar Tonin

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
(UTFPR)
eduardotonin@alunos.utfpr.edu.br

Adriana Helena Borssoi

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
(UTFPR)
adrianaborssoi@utfpr.edu.br

Karina Alessandra Pessoa da Silva

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
(UTFPR)
karinasilva@utfpr.edu.br

Modelagem Matemática em um Contexto Interdisciplinar: o lançamento oblíquo utilizando arco e flecha

Resumo

Este relato tem como objetivo apresentar, em síntese, o desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática com alunos do primeiro ano do ensino médio de um colégio estadual do norte do Paraná, com a mediação de dois professores. Neste texto, apresenta-se uma breve abordagem teórica acerca da Modelagem Matemática e dos conteúdos que emergiram da atividade, bem como a descrição da implementação da prática, seguida das considerações obtidas. A prática aqui relatada trata da aplicabilidade do conteúdo de lançamentos oblíquos no esporte de arco e flecha, de modo interdisciplinar entre matemática, física e educação física. O desenvolvimento da atividade se deu com o auxílio de recursos tecnológicos para a coleta e análise dos dados, como aplicativos e softwares. Admitimos a experiência como satisfatória, pois seu desenvolvimento gerou expectativa de continuidade.

Palavras-chave: Função do segundo grau. Ensino Médio. Coleta de dados.

Abstract

This experiment report to present, in short, the development of a Mathematical Modeling activity with students of the first year of high school at a state school in the north of Paraná, with the mediation of two teachers. In this text, we present a brief theoretical approach about Mathematical Modeling and the contents that emerged from the activity, as well as the description of the implementation of the practice, followed by the obtained considerations. The practice reported here deals with the applicability of the content of oblique launch in the sport of archery, in an interdisciplinary way between mathematics, physics and physical education. The development of the activity took place with the help of technological resources for the collection and analysis of data, such as applications and software. We accept the experience as satisfactory, as its development raised expectations of continuity.

Keywords: Second Grade function. High school. Data Collect.



Introdução

É incontestável a necessidade de se realizar trabalhos que visem a imersão dos estudantes em ambientes interdisciplinares e entre as disciplinas de Física e Matemática é possível identificar a correlação que permite esse cenário. Ainda que indispensável a importância dessas duas disciplinas caminharem juntas, não costumam ser atrativas aos olhos dos estudantes de forma isolada. Nesse sentido, para além dessa possibilidade interdisciplinar, neste trabalho buscamos atrelar ainda a disciplina de Educação Física.

Este trabalho relata uma experiência desenvolvida com alunos de Ensino Médio de um colégio estadual cívico militar, localizado no interior do Paraná. A atividade foi desenvolvida durante as aulas regulares de Matemática e Física mediadas pelo professor regente dessas disciplinas (primeiro autor deste artigo) e também em contraturno com a colaboração do professor regente da disciplina de Educação Física.

O intento dessa implementação foi investigar como se comporta a flecha em lançamentos oblíquos em relação ao ângulo de lançamento e a distância percorrida, para então comparar com os modelos clássicos da Física a fim de evidenciar se os resultados na prática seriam próximos ao esperado por meio dos modelos teóricos.

A escolha do tema surgiu por conta da percepção do professor de Matemática e Física quanto ao entusiasmo dos alunos ao relatarem sobre o esporte que estavam conhecendo na disciplina de Educação Física, o de arco e flecha. A partir disso, a curiosidade em atrelar essa temática com o ensino de Física deu impulso para essa atividade com os alunos do primeiro ano do ensino médio.

O anseio era o de atender a disciplina de Física com o desenvolvimento do conteúdo de lançamentos oblíquos. Para isso, de forma interdisciplinar, foram utilizados os preceitos da Modelagem Matemática para a comparação dos dados obtidos na simulação realizada com os modelos preexistentes sobre esse conteúdo, tendo como ambiente a prática do esporte mencionado. Os documentos oficiais que regem ambas as disciplinas asseveram as contribuições que as tecnologias digitais podem oferecer em sala de aula, recurso este que também foi indispensável para o desenvolvimento dessa atividade.

Nesse relato de experiência, o texto foi organizado nos seguintes subitens: introdução, com uma breve contextualização de como se deu a atividade; Modelagem Matemática no contexto interdisciplinar, que consiste como embasamento teórico que fundamenta a importância de



atividades como essa; lançamento oblíquo, seção destinada a uma breve descrição dos modelos físicos e suas aplicabilidades de modo genérico; arco e flecha, uma síntese do esporte; desenvolvimento da atividade de Modelagem Matemática, contendo a descrição da sequência de aulas para essa atividade; conclusão, trazendo as reflexões e considerações dos autores sobre todo o processo da construção deste trabalho.

Modelagem Matemática no contexto interdisciplinar

Antes mesmo de argumentar sobre os benefícios da Modelagem Matemática no contexto educacional, tomemos como definição que:

Modelagem Matemática é o processo que envolve a obtenção de um modelo. Este, sob certa óptica, pode ser considerado um processo artístico, visto que, para se elaborar um modelo, além de conhecimentos de matemática, o modelador precisa ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e também ter senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas. A elaboração de um modelo depende do conhecimento matemático que se tem (BIEMBENGUT; HEIN, 2011, p. 12).

A Modelagem Matemática pode ser considerada uma alternativa pedagógica para o ensino e a aprendizagem da Matemática em diferentes níveis de escolaridade (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012). De modo geral, uma de suas finalidades é enriquecer as práticas de sala de aula, dando ênfase a assuntos presentes no cotidiano. Diferentes são as fases que compreendem uma atividade de Modelagem Matemática, e entre elas há um conjunto de procedimentos desenvolvidos pelos modeladores na investigação da situação-problema.

Para Almeida, Silva e Vertuan (2012), a partir da inteiração com a temática da atividade de Modelagem Matemática, é necessário que a coleta de dados e as informações acerca do fenômeno pesquisado permitam a transição da linguagem do problema para a linguagem Matemática. Já no uso da linguagem Matemática, a fase de resolução permite com que os sujeitos engajados na atividade usem de procedimentos matemáticos com objetivo de obter e analisar um modelo matemático, a partir do qual será possível responder a situação-problema colocada, interpretar e validar as respostas obtidas face à situação inicial. Segundo os autores:

Um modelo matemático é um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática e que tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema, podendo mesmo permitir a realização de previsões sobre este outro sistema (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 13).

Dessa forma Silva (2015) justifica que a Modelagem Matemática permite aos professores uma forma interdisciplinar de se trabalhar os conteúdos, envolvendo mais de uma disciplina, além de que o uso de tecnologias digitais é uma forte ferramenta para o desenvolvimento da atividade, pois, estimula o estudante na busca de uma determinada solução para o problema inicial proposto, ao mesmo tempo que busca compreendê-lo nos mais diversos pontos de vista.

Nesse sentido, Javaroni e Soares (2012) destacam que um aspecto em comum a várias perspectivas de Modelagem Matemática na literatura “[...] é o estudo de um problema vinculado a outra área científica que não a Matemática por meio da elaboração de um modelo matemático que o represente e a sua validação” (JAVARONI; SOARES, 2012, p. 270).

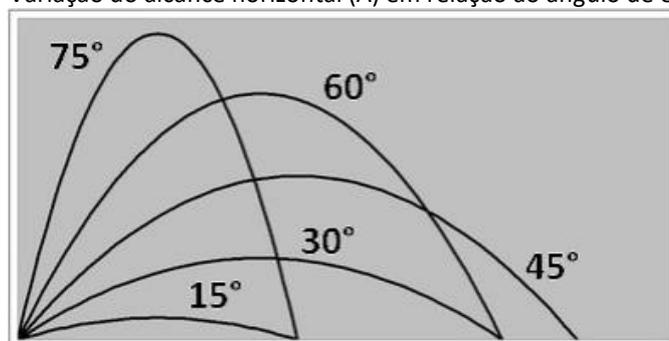
Na atividade de Modelagem que planejamos e desenvolvemos com alunos do ensino médio a problemática pode ser abordada de modo que ocorra uma integração entre as disciplinas de Matemática e de Física associando o lançamento oblíquo e trajetórias parabólicas.

Lançamento oblíquo

Uma situação na Física bastante comum no cotidiano do aluno é o lançamento vertical ou oblíquo de objetos, por exemplo ao se arremessar bolinhas de papel em um alvo ou num cesto de lixo. Dessa forma o lançamento oblíquo de uma partícula é um exemplo bastante ilustrativo e com diversas formas de aplicações da mecânica newtoniana.

Segundo Yamamoto (2016) esse tipo de movimento realiza uma trajetória parabólica, unindo movimentos nos eixos x e y (horizontal e vertical). Dessa forma, o objeto arremessado forma um ângulo (θ) entre 0° e 90° em relação a horizontal, conforme apresentado na Figura 1.

Figura 1 - Variação do alcance horizontal (A) em relação ao ângulo de elevação (θ)



Fonte: Yamamoto (2016).

Quando um corpo é lançado obliquamente, ele pode atingir uma altura máxima. Nesse ponto, sua velocidade vertical torna-se nula, já que, a partir de lá, inicia-se o movimento de queda. Pode-se calcular a altura máxima atingida por um projétil em lançamento oblíquo por meio da seguinte equação:

$$H_{Máx} = \frac{(V_0 \text{sen}(\theta))^2}{2g}$$

em que:

$H_{Máx}$: altura máxima (m)

V_0 : velocidade inicial (m/s)

$\text{sen}(\theta)$: seno do ângulo θ

g : aceleração da gravidade (m/s^2)

A expressão algébrica do alcance máximo é usada para se calcular a distância horizontal total que um objeto atinge a partir da posição de lançamento. Essa expressão é dada por:

$$A_{Máx} = \frac{V_0^2 \text{sen}(2\theta)}{g}$$

em que:

$A_{Máx}$: alcance máximo (m)

V_0 : velocidade inicial (m/s)

$\text{sen}(2\theta)$: seno do ângulo de 2θ

g : aceleração da gravidade (m/s^2)

Diversas são as situações que envolvem o lançamento oblíquo, em especial, vamos abordar neste artigo a que diz respeito ao arco e flecha.

Arco e flecha

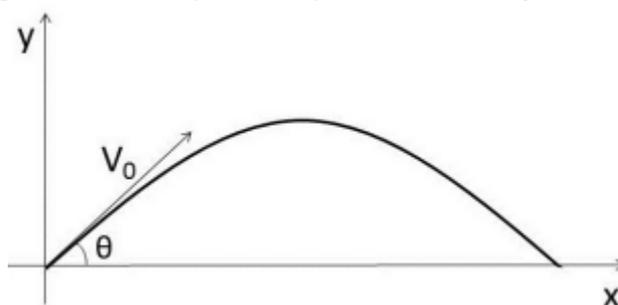
Em competições na modalidade de arco e flecha, para se acertar um alvo, o competidor tem que levar em consideração vários conceitos da Física, como por exemplo a distância, a velocidade, a aceleração da gravidade, a resistência do ar, entre outros.

Segundo Mesquita (2019) ao puxar a corda, o arco sofre uma deformação. Para que ocorra essa deformação é necessário que o arqueiro forneça energia ao arco, a qual fica armazenada na forma de energia potencial elástica. Ao soltar a corda boa parte da energia é transferida para a

flecha na forma de energia cinética, fazendo com que a flecha atinja altas velocidades em direção ao alvo.

De acordo com Almeida Pitta (1957), para o arqueiro atingir o alvo este deve possuir conhecimento, mesmo que intuitivamente, do comportamento de uma flecha, desde seu lançamento até atingir o alvo. A flecha é disparada do arco com uma velocidade inicial (V_0) com ângulo (θ) formado entre o solo (eixo x) e a flecha (Figura 2). Dessa forma, o alcance da flecha varia de acordo com a velocidade inicial do disparo e o ângulo formado em relação ao solo.

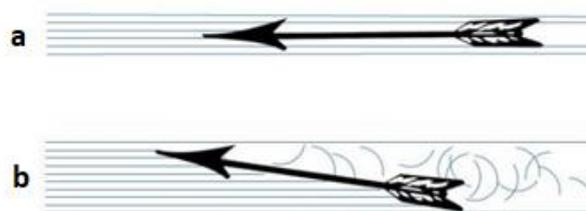
Figura 2 - Distância percorrida pela flecha em relação ao ângulo



Fonte: Almeida Pitta (1957).

Os livros didáticos trazem para os alunos os modelos clássicos da física newtoniana, mas esses modelos desprezam um dos fatores mais importantes em um disparo, a resistência do ar ou força de arrasto. Desde o seu disparo até atingir o alvo, a flecha colide com moléculas existentes no ar, essas colisões ocasionam na perda de energia, diminuindo a velocidade e por consequência o alcance (Figura 3a).

Figura 3 - Colisão da flecha com as moléculas presentes no ar



Fonte: Adaptado de Almeida Pitta (1957).

Outro ponto a ser destacado é que quando disparada a flecha a sua ponta tende a erguer criando atrás dela uma zona de turbulência interferindo no trajeto da flecha (Figura 3b), dessa forma a função das penas atrás da flecha é justamente diminuir este efeito.



Considerando os fatores que interferem no deslocamento de uma flecha, lançada por uma mesma pessoa sob diferentes ângulos, descrevemos no tópico a seguir, a atividade de Modelagem Matemática desenvolvida.

Desenvolvimento da atividade

O desenvolvimento da atividade foi realizado com uma turma do 1º ano do ensino médio, formada por 14 alunos ao todo. Essa turma foi escolhida pois esses alunos desenvolvem semanalmente, com o professor de Educação Física, o treino de arco e flecha no mesmo colégio que estudam.

A atividade foi iniciada no período do contraturno dos alunos, em que dos 14 alunos, 10 participaram da coleta de dados empíricos. Os alunos, juntamente com os professores, dirigiram-se ao campo de futebol, onde inicialmente foram feitos alguns disparos com os diferentes arcos disponíveis para testar a distância que as flechas percorriam e assim escolher um deles para o experimento. O arco de 15 libras foi escolhido em comum acordo, já que o espaço disponível era o campo e os demais arcos as flechas lançadas excediam esse limite.

Com o auxílio de uma trena, os estudantes posicionaram 5 cones marcando as distâncias de 40, 50, 60, 70 e 80 metros da posição de origem do lançamento. Foi escolhido apenas um estudante para realizar os disparos para poder manter um padrão quanto ao tensionamento do arco. Prezando a segurança de todos os estudantes, o professor de Matemática e Física da turma ficou responsável em medir os ângulos de cada disparo com o aplicativo que simula um transferidor no telefone celular. Durante os testes iniciais, os estudantes perceberam que no aplicativo tinha um pêndulo que poderia ser posicionado para mostrar o ângulo da flecha em relação ao solo, dessa forma antes de cada disparo o professor posicionava o telefone celular sobre a flecha para poder aferir o ângulo do disparo. Na Figura 4 são apresentados os encaminhamentos para o preparo do lançamento.

Figura 4 – Organização para a coleta de dados



Fonte: Arquivo do professor.

Para a coleta da distância que cada lançamento atingiu, foram realizados 3 disparos em cada ângulo, os ângulos escolhidos foram os de 15° , 30° , 45° , 60° e 70° graus. Todos os dados foram coletados com o auxílio de ambos os professores, os alunos também tiveram a ideia de coletar o tempo de cada disparo, dessa forma quatro deles ficaram responsáveis em cronometrar o tempo de lançamento da flecha, cada um com seu cronômetro do telefone celular. A cada disparo feito, todos os alunos iam para o local da queda da flecha para medir e anotar a distância percorrida pela flecha. A coleta de dados do experimento durou cerca de duas horas. Na Figura 5 são apresentados os encaminhamentos de coleta de dados.

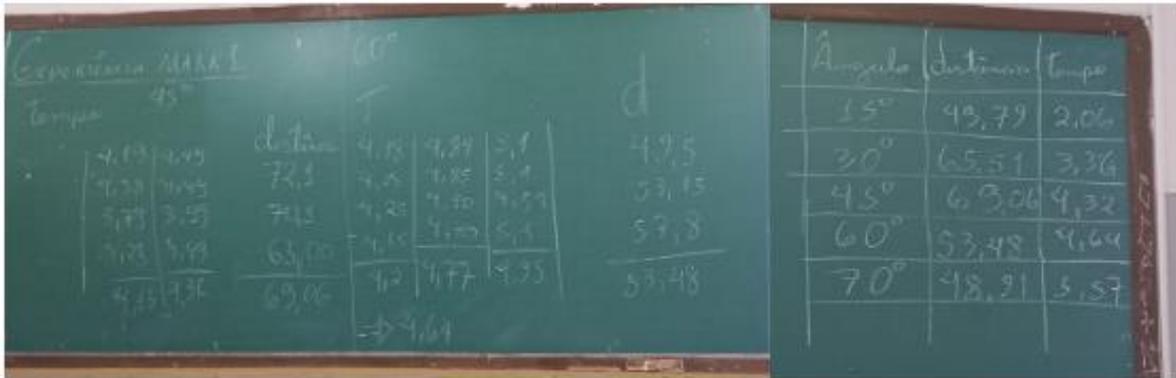
Figura 5 – Coleta de dados



Fonte: Arquivo do professor.

No dia seguinte, em uma aula de Física, foi feita a síntese dos dados coletados, calculou-se a média aritmética simples para cada um dos dados coletados pelos alunos, conforme consta na Figura 6.

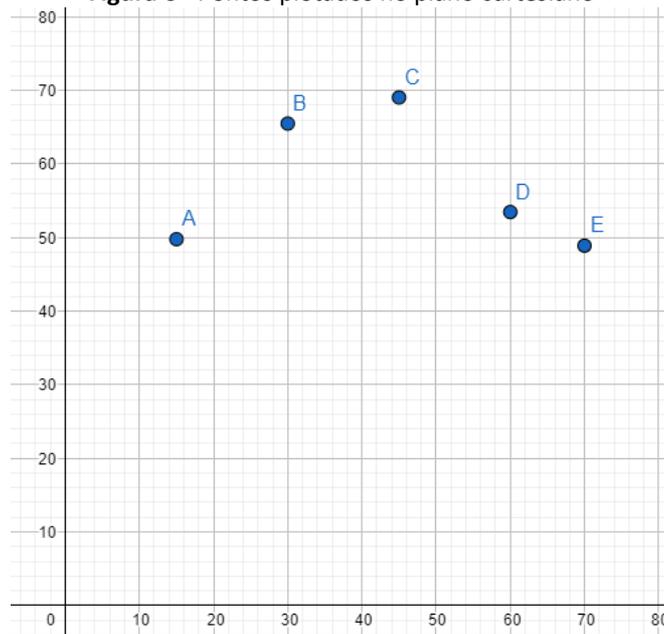
Figura 6 – Síntese dos dados



Fonte: Arquivo do professor.

Com o intuito de analisar o alcance da flecha em relação ao ângulo de lançamento com os dados coletados, o professor sugeriu o uso de um software, assim, o laboratório de informática foi o próximo ambiente da atividade. Com o auxílio de um projetor para auxiliar os alunos com o uso do GeoGebra, software que eles não conheciam, o professor orientou-os a usar o recurso de Regressão para ajuste de curvas. Considerando a linguagem do GeoGebra, foram definidas as variáveis x para o ângulo de lançamento e y para a distância percorrida pela flecha (Figura 7). Os valores constam na tabela construída na lousa pelo professor e que está apresentada na Figura 6.

Figura 6 - Pontos plotados no plano cartesiano



Fonte: Dos autores.

Em seguida, o professor explicou que o objetivo naquele momento era de encontrar uma curva (função) que representasse os 5 pontos exibidos no sistema cartesiano. Os alunos ficaram testando várias funções e discutindo entre eles, até que então um aluno observou que, na fórmula clássica da física de lançamento oblíquo, uma parábola melhor se adequava aos pontos. Dessa forma, todos os alunos testaram-na, mas perceberam que o ponto D (60, 53.48) estava fora e não se adequava à curva, imediatamente constataram que um dos 3 valores da média estava muito distante dos outros dois. Nesse instante, uma importante ressalva foi colocada em debate por outro aluno, pois lembrou que naquele lançamento estava ventando contra a direção do disparo da flecha e então aquele valor foi descartado. Partindo disso, foi feita a média dos outros dois valores apenas, encontrados 58,53 e 62,32 metros. Dessa forma o novo ponto D (60, 60,42) se adequava melhor à parábola, e assim concluiu-se que a função $y = -0,0264x^2 + 2,225x + 22,401$ representava bem o fenômeno estudado, em que y seria a distância percorrida pela flecha e x seria o ângulo do lançamento.

Na Figura 8 são apresentadas fotografias dos alunos trabalhando no laboratório de informática, utilizando o GeoGebra.

Figura 8 – Alunos realizado ajustes de curvas

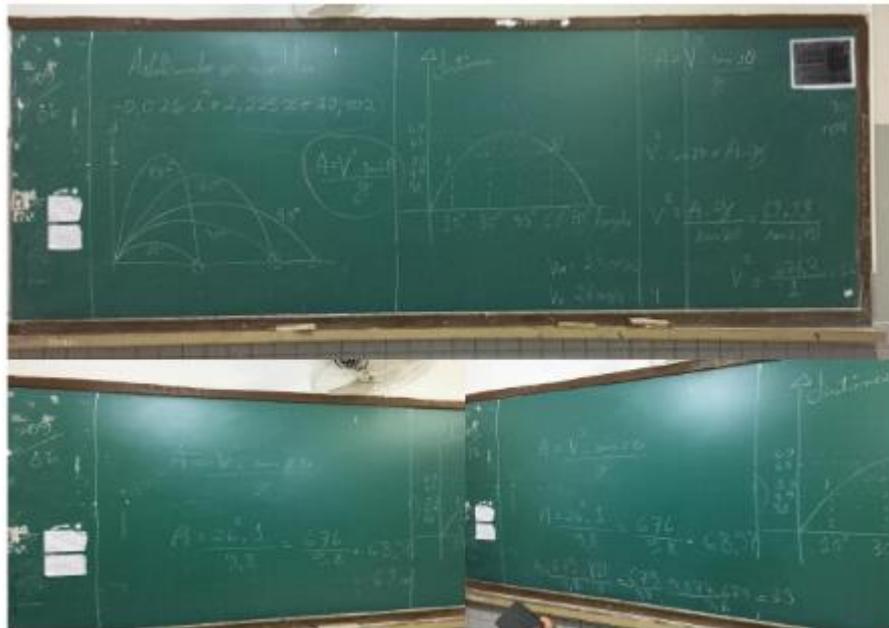


Fonte: Arquivo do professor.

O último momento dessa atividade foi desenvolvimento em sala de aula de Física, onde foi solicitado aos alunos a validação da função obtida com a ajuda do software GeoGebra. A princípio, os alunos foram testando valores para a variável x (que representa o ângulo de lançamento da flecha) para comparar se os resultados eram de fato os valores esperados, assim, a conclusão obtida foi que era válido.

Após isso o professor regente instruiu os alunos a comparar o modelo encontrado com o modelo clássico de lançamento oblíquo, por meio de representações feitas na lousa, conforme apresentado na Figura 9.

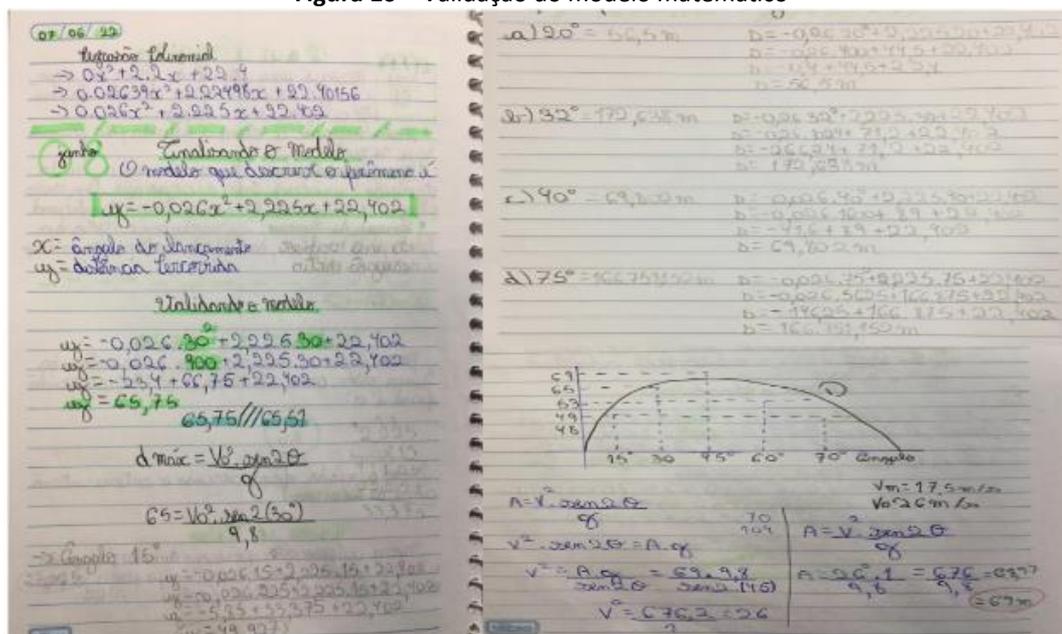
Figura 9 - Comparação dos modelos de lançamento oblíquo



Fonte: Arquivo do professor.

A primeira dúvida dos alunos foi: “qual seria o valor da velocidade inicial da flecha?”, já que esse dado não tinha sido coletado, e com a mediação do professor, os alunos concluíram que esse valor poderia ser isolado na fórmula, já que havia sido coletada a distância percorrida pela flecha. Após descobrirem a velocidade inicial da flecha, recorreram a fórmula clássica para encontrar valores da distância percorrida pela flecha e comparar com os valores da função obtida em laboratório, conforme mostra a Figura 10.

Figura 10 – Validação do modelo matemático



Fonte: Relatório dos alunos.

Assim, um último debate entre eles foi: “por que em certos ângulos tinha uma pequena diferença entre valores encontrados pela função e os valores da fórmula clássica?” Então o professor utilizou esse momento para explicar que a fórmula clássica da Física não considerava a resistência do ar, pois ela foi sistematizada considerando lançamentos no vácuo.

Conclusão

Este relato teve como objetivo apresentar, em síntese, o desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática com alunos do primeiro ano do Ensino Médio. Ao utilizar a interlocução entre três disciplinas (Física, Matemática e Educação Física), envolvendo a problemática do lançamento oblíquo com arco e flecha, foi possível identificar o engajamento dos estudantes ao coletar dados e modelar o alcance da flecha para então comparar o resultado com o modelo clássico da Física.

Em geral, assume-se que aulas práticas costumam ser mais interessantes e instigantes aos alunos, e esse relato vem ao encontro dessa perspectiva pois do início ao fim os estudantes se mostraram empolgados e engajados.

Quanto aos recursos utilizados, há de se enfatizar o papel indispensável das tecnologias digitais nos diferentes momentos do desenvolvimento da atividade como um instrumento



facilitador tanto para o docente como aos discentes, por exemplo no momento da coleta dos dados e também na análise do comportamento destes, para então a conclusão de uma função que traduzisse o fenômeno de forma clara e objetiva. Quanto aos conteúdos físicos e matemáticos sendo desenvolvidos por meio de um esporte, pode-se notar que houve uma certa quebra do metodismo de aulas tradicionais, pois a ludicidade permitiu um dinamismo maior e conseqüentemente uma leveza ao transpor a atividade prática realizada em números para uma função.

Por fim, concluímos que a atividade desenvolvida foi satisfatória por ora, pois foi colocada aos estudantes a intenção de continuidade com recursos a mais, como o cronógrafo, aparelho para medir a velocidade da flecha, que pode ser conseguido com um profissional do esporte. Isso pode enriquecer ainda mais a Modelagem ao dar mais confiabilidade aos dados e refinar a comparação entre o modelo desenvolvido e o clássico da Física. Percebemos que houve a apropriação dos conteúdos envolvidos na abordagem da problemática pelos alunos, mas como não foi objetivo deste artigo, deixaremos a discussão sobre o potencial da atividade para promover aprendizagem significativa, para um próximo trabalho já contando com a implementação da continuidade citada.

O desenvolvimento dessa atividade de Modelagem Matemática trouxe *insights* para uma investigação de Mestrado, em fase inicial de desenvolvimento, que visa pesquisar a Modelagem Matemática na perspectiva da Análise de Modelos (JAVARONI; SOARES, 2012). Assim, futuramente esperamos compartilhar resultados fundamentados teoricamente sobre Modelagem e Análise de Modelos com estudantes do ensino médio.

Referências

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ALMEIDA PITTA, J. A. Arco e Flecha Novo Desporto Olímpico. **Revista de Educação Física/Journal of Physical Education**, v. 26, n. 1, p. 3-3, 1957.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no ensino**. 5. ed. São Paulo. Contexto. 2011.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretária de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o ensino médio: ciência da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília, v. 2, 2006. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf (acesso em maio/2022).



JAVARONI, S. L.; SOARES, D. S. Modelagem Matemática e Análise de Modelos Matemáticos na Educação Matemática. **Acta Scientiae**, v. 14, n. 2, p. 260-275, 2012.

MESQUITA, A. L. **Pedagogia do ensino de arco e flecha**. São Paulo: Editora Fontoura, 2019.

SILVA, R. S.; BARONE, D. A. C.; BASSO, M. V. A. Modelagem Matemática e TICs: possibilidades para uma abordagem interdisciplinar de conceitos através da tecnologia informática. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 18, n. 1, 2016.

YAMAMOTO, K.; FUKU, L. F. **Física para o ensino médio**, vol. 1: mecânica. 4. ed. São Paulo :Saraiva, 2016.