



União da Vitória - Paraná

IX EPMEM

Encontro Paranaense de Modelagem na
Educação Matemática

Informações sobre as Autoras:

Nabila Iasbik Giroti

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
(UTFPR)
nabilaiasbikgiroti@alunos.utfpr.edu.br

Adriana Helena Borssoi

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
(UTFPR)
adrianaborssoi@professores.utfpr.edu.br

Karina Alessandra Pessoa da Silva

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
(UTFPR)
karinasilva@utfpr.edu.br

Análise de Modelos no Estudo do Pêndulo Simples em uma Atividade de Modelagem Matemática

Resumo

O presente relato aborda alguns resultados de uma atividade desenvolvida em uma turma de Equações Diferenciais Ordinárias, de um curso de Engenharia Mecânica, cujo objetivo foi estudar o modelo matemático que rege o movimento de um pêndulo simples, por meio da Modelagem Matemática e a Análise de Modelos Matemáticos na Educação Matemática. A partir de uma situação-problema destinada aos alunos, foi solicitado que eles obtivessem o modelo matemático que rege um pêndulo simples e, a partir de simulações, pudessem validar a equação obtida a partir dos dados coletados em um laboratório de Física da Universidade. Elegemos apresentar os resultados de dois grupos de alunos que abarcaram encaminhamentos distintos daqueles considerados clássicos na literatura. Evidenciamos que os alunos desses grupos fizeram uso de experimentações e simulações o que permitiu discutir e formalizar conceitos, como uma possibilidade de trabalhar modelos matemáticos que sejam úteis e aplicáveis tanto no âmbito acadêmico quanto profissional.

Palavras-chave: Modelo Matemático. Tecnologia. Equações Diferenciais Ordinárias.

Abstract

The present report addresses some results of an activity developed in a class of Ordinary Differential Equations, of a Mechanical Engineering course, whose purpose was to study the mathematical model governing the movement of a simple pendulum, through Mathematical Modeling and Analysis of Mathematical Models in Mathematics Education. Based on a problem situation for the students, they were asked to obtain the mathematical model governing a simple pendulum and, through simulations, to validate the equation obtained from data collected in a Physics laboratory at the University. We chose to present the results of two groups of students who had different approaches from those considered classical in the literature. It is evident that the students in these groups made use of experiments and simulations, which allowed them to discuss and formalize concepts, as a possibility to work with mathematical models that are useful and applicable both in the academic and professional spheres.

Keywords: Mathematical Model. Technology. Ordinary Differential Equations.

Realização:





Introdução

Neste artigo, trazemos o relato de uma experiência vivenciada pela primeira autora, enquanto aluna da disciplina de Modelagem Matemática na Perspectiva do Ensino em um programa de Mestrado em Ensino de Matemática, de uma universidade pública do estado do Paraná. O objetivo da disciplina, que ocorre no contexto da formação de professores, é oportunizar aos alunos experienciar atividades de Modelagem Matemática seguindo três eixos: aprender sobre, aprender por meio, ensinar usando. Assim, foi sugerida a elaboração e implementação de um plano de aula para ser desenvolvido em aulas com atividades de Modelagem Matemática.

O planejamento levou em conta dois aspectos, a possibilidade de implementação em uma disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), do curso de Engenharia Mecânica, em que a primeira autora desenvolvia seu estágio de docência e a temática de sua pesquisa, em fase inicial de desenvolvimento: atividades de Modelagem Matemática na perspectiva da Análise de Modelos para o estudo de EDO.

Como a atividade de Modelagem Matemática os alunos foram convidados a estudar o movimento de um pêndulo simples a partir de um experimento de laboratório a fim de obter e analisar um modelo matemático que representasse seu comportamento. Em outras palavras, o objetivo era propiciar que os alunos estudassem, compreendessem e representassem por meio de EDO o movimento de um pêndulo simples e que analisassem seu comportamento a partir resolução da EDO e da simulação de parâmetros do modelo.

O pêndulo simples é um assunto estudado em outras disciplinas de cursos de engenharia. É um dispositivo que consiste em um fio de massa que normalmente é desprezível, em uma das extremidades de fio um elemento de massa é suspenso, enquanto a outra extremidade é fixa, o que permite apenas a rotação da massa em torno de um eixo fixo. Tal pêndulo está associado a movimentos periódicos e oscilatórios, e dentre outras aplicações possibilitar a medição do valor da aceleração e da gravidade local. Há diversas aplicações para pêndulo, tais como o relógio do pêndulo, balanço de criança, ponteiro de um relógio analógico, uma curva, um pneu em movimento, a órbita da Terra em seu próprio eixo etc.

Diante de suas diversas aplicabilidades consideramos que o estudo do tema seria relevante para os alunos por ser abordado por meio de EDO em um âmbito interdisciplinar. Assim, no decorrer de duas aulas foi desenvolvida uma atividade sob a perspectiva de ensinar por meio da Modelagem



Matemática, objetivando que os alunos percorressem as etapas sugeridas na literatura para esta alternativa pedagógica.

De modo a apresentar o objetivo, o desenvolvimento da atividade bem como os teóricos que auxiliaram na elaboração, conclusão e análise da atividade desenvolvida em sala de aula, o presente relato foi organizado em: introdução, contextualização sobre Modelagem Matemática e Análise de Modelo, desenvolvimento da atividade e conclusão.

Modelagem Matemática e Análise de Modelos

A literatura da área de Educação Matemática indica que a Modelagem Matemática é considerada, muitas vezes, como estratégia para motivar estudantes a aprender Matemática. No entanto, tem se consolidado como alternativa pedagógica para oportunizar a aprendizagem da Matemática e propiciar aos estudantes “[...] a capacidade de realizarem, fora da sala de aula, modelagem e aplicações em outras áreas de conhecimento e diferentes contextos; isto é, resolver problemas, tomar decisão, ter senso crítico e criativo” (BIEMBENGUT, 2009).

Em uma atividade de Modelagem Matemática tem-se como procedimento definir e compreender um problema inicial a ser estudado, a partir de uma situação-problema, levantar hipóteses, definir variáveis e parâmetros, obter um modelo matemático, resolvê-lo e, por fim, avaliar a solução.

Segundo Bassanezi (2002, p. 19-20):

Modelo é a representação de um objeto ou fato concreto sendo suas características predominantes a estabilidade e a homogeneidade das variáveis. [...] Ele deve conter as mesmas características que o sistema real, isto é, deve representar as mesmas variáveis essenciais existentes no fenômeno e suas relações obtidas através de hipóteses (abstratas) ou de experimentos (reais).

Chamaremos simplesmente de Modelo Matemático um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado.

Há diferentes perspectivas sobre Modelagem na Educação Matemática (BIEMBENGUT, 2009, JAVARONI; SOARES, 2012), o que as distingue, por vezes, é a ênfase dada à elaboração e validação do modelo, bem como o entendimento sobre a quem cabe a escolha do problema a ser estudado, se pelo professor ou pelos alunos. Mas, segundo Javaroni e Soares (2012, p. 270), “[...] um aspecto em comum a várias perspectivas é o estudo de um problema vinculado a outra área científica que não a Matemática, por meio da elaboração de um modelo matemático que o represente e a sua validação”.



Considerando os propósitos do nosso estudo, assumimos a Modelagem Matemática na perspectiva da Análise de Modelos. Essa abordagem possui características próprias e comuns à Modelagem Matemática e podem ser trabalhadas e desenvolvidas simultaneamente ou de forma complementar.

A Análise de Modelos pode envolver diversas atividades, segundo Javaroni e Soares (2012, p. 12):

(i) estudo do fenômeno em questão; (ii) estudo das hipóteses consideradas para a elaboração do modelo; (iii) entendimento do que cada termo do modelo diz sobre o fenômeno; (iv) estudo do comportamento da(s) solução(ões) do modelo, relacionando este comportamento com o fenômeno e com as hipóteses consideradas; (v) estudo da influência dos parâmetros do modelo no comportamento de sua(s) solução(ões), o que permite fazer previsões e analisar a influência de possíveis intervenções no fenômeno; (vi) análise das limitações do modelo.

Ainda, com base nessas autoras, o uso de tecnologias digitais no processo de análise de modelos matemáticos é essencial, pois auxilia positivamente a análise e a torna mais real e fiel, enfatizando a análise crítica de modelos como estratégia pedagógica, em particular quando aplicada ao trabalho com modelos matemáticos em sala de aula, em especial naquelas que possibilitam observar e compreender o comportamento de equações e o estudo de variados fenômenos por elas representados.

Desenvolvimento da Atividade

Em uma turma do terceiro semestre do curso de Engenharia Mecânica, com 47 alunos matriculados, em uma disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias, foi desenvolvida uma atividade de Modelagem Matemática com ênfase na análise do modelo do movimento de um pêndulo simples. Este é um modelo clássico de fundamental importância para um curso de engenharia, dada sua diversidade de aplicações. Basicamente, resume-se em um movimento periódico em que ocorrem deslocamentos simétricos em torno de um ponto específico, com duas forças atuantes sobre o objeto: a tração do fio e a força peso.

A atividade foi planejada colaborativamente pelas autoras e implementada pela primeira autora durante seu estágio de docência e pela segunda autora, professora da disciplina. O desenvolvimento se deu em dois momentos, com duração de quatro horas-aula, nos dias 24 e 31 de maio de 2022 com os alunos organizados em grupos de até quatro integrantes, totalizando 12 grupos.

Durante os dois momentos foram realizadas gravações em áudio e vídeo com o consentimento dos alunos. No primeiro momento, os alunos permaneceram em uma sala de Metodologias Ativas (Figura 1a), que é adaptada para trabalhar em grupos, pois conta com diversas lousas nas paredes que podem ser usadas durante a interação do grupo, além de as mesas em formato hexagonal flexibilizar a interação entre os membros dos grupos; no segundo momento, os alunos poderiam permanecer na sala de aula ou transitar entre a sala de aula e um laboratório de Física (Figura 1b), como explicitaremos mais adiante. Para o desenvolvimento da atividade foi solicitado que cada grupo levasse ao menos um notebook, que poderia ser usado na pesquisa para desenvolvimento da Modelagem Matemática, para elaboração do relatório do grupo que deveria ser compartilhado no *Moodle* da turma, bem como, alternativamente, para a análise do modelo, a critério dos grupos.

Figura 1 – Espaços em que a atividade de Modelagem Matemática foi desenvolvida



Fonte: Arquivo da professora.

Os alunos eram familiarizados com expressões como: modelo matemático e modelagem matemática, no entanto, ainda não havia desenvolvido atividades de Modelagem Matemática em sala de aula. Assim, inicialmente a professora fez uma introdução sobre Modelagem Matemática e orientou-os a modelar o comportamento do pêndulo simples. Esses alunos iniciaram a interação com a problemática em uma disciplina de Física em aulas anteriores, onde tiveram a oportunidade de realizar um experimento em laboratório e coletar dados. Na ocasião, a abordagem não foi por meio de EDO, o experimento fazia parte do estudo do movimento harmônico simples que ocorre devido a conservação da energia mecânica. O movimento periódico e oscilatório tem diversas



aplicações nos campos da engenharia e suas áreas técnicas, logo, o pêndulo simples é um exemplo de oscilador, tanto quanto as oscilações amortecidas e forçadas. Segundo Zill e Cullen (2001, p. 16):

Qualquer objeto pendurado em movimento pendular é chamado pêndulo físico. O pêndulo simples é um caso especial de pêndulo físico e consiste em uma haste com uma massa atada em uma das extremidades. Para descrever o movimento de um pêndulo simples, desprezamos qualquer força exterior de amortecimento agido sobre o sistema (tal como a resistência do ar).

Assim, os alunos foram convidados a compreender a modelagem que resulta na equação do movimento do pêndulo, encontrar sua solução e realizar a análise do modelo usando dados reais. Para isso, foram orientados a se fundamentar na literatura, bem como nos conhecimentos prévios das aulas de Física, EDO, entre outras.

Em um primeiro momento, o objetivo era que os estudantes conseguissem compreender a equação que rege os movimentos de um pêndulo simples, observando que pode haver limitações desse modelo, considerando também que há distintos modelos para uma mesma situação, além de compreender o papel das hipóteses para se obter diferentes aspectos de um mesmo fenômeno. De modo geral, foi possível observar que os alunos estavam bastante empenhados em desenvolver a atividade, pois pesquisavam, perguntavam e discutiam sobre o tema; em especial aqueles grupos que já estavam há mais tempo no curso e compreendiam a importância das equações diferenciais ordinárias para as demais disciplinas, em especial, as específicas do curso de Engenharia Mecânica.

O foco desse primeiro momento, na aula do dia 24 de maio, era que os grupos estudassem o comportamento do modelo que rege o fenômeno e sua solução, além de investigarem a influência de parâmetros, compreendendo o modelo matemático e, se julgassem necessário, adaptando-o considerando as condições do ambiente em que o experimento ocorreu, como por exemplo, o valor estimado para a aceleração da gravidade no laboratório em que os dados foram coletados, já que a aceleração da gravidade é um dos parâmetros do modelo.

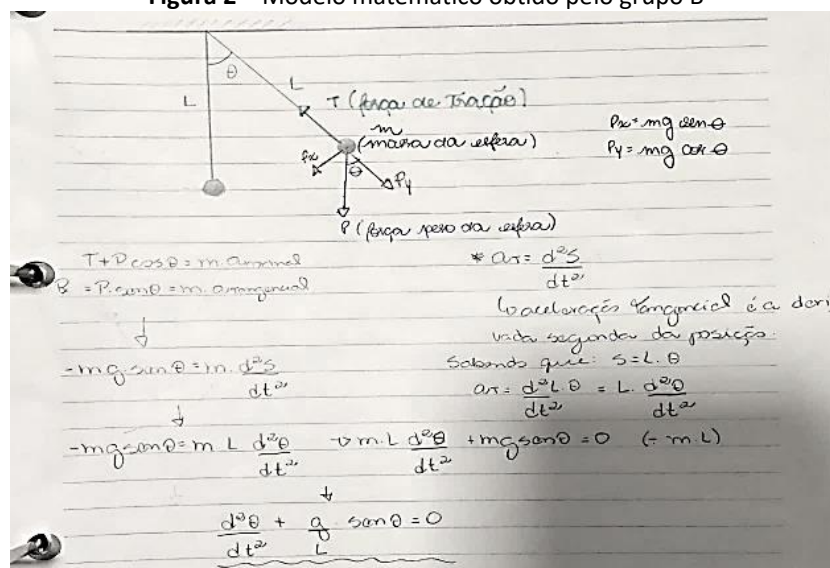
Segundo Bassanezzi (2002, p. 20):

Em geral, a representatividade de um fenômeno da realidade é diretamente proporcional à complexidade matemática do modelo que o representa. Quando o modelo matemático é uma equação diferencial, nem sempre podemos obter informações ou projeções acerca do fenômeno estudado através da solução explícita desta equação, já que na maioria dos casos as equações diferenciais envolvidas não admitem soluções na forma de uma função analiticamente explícita.

Embora integrantes dos 12 grupos tenham participado dos dois momentos destinados à atividade de Modelagem Matemática, apenas 11 grupos finalizaram-na com a entrega do relatório final pelo *Moodle*. A abordagem da maioria dos grupos, para descrever e modelar o movimento do pêndulo, se assemelhou, assim, selecionamos o grupo B e o grupo G para destacarmos alguns aspectos do desenvolvimento de cada qual, dada a maneira distinta e interessante como desenvolveram a atividade. Distinta se refere ao fato de terem feito a atividade de maneira não tão convencional e, interessante, pois não foram instruídos a seguirem dado caminho que, por vezes, se utilizou de análise e compreensão de modelo, simulação e validação em tecnologias digitais, como variados *softwares*.

No decorrer do primeiro momento da atividade, o grupo B orientou a elaboração de seu trabalho a partir das fases da Modelagem Matemática para desenvolver a situação-problema da seguinte maneira: na situação inicial, buscaram conhecer a problemática, quando os alunos se depararam com questões do pêndulo simples, compreendendo a modelagem da equação do movimento e encontrando sua solução, com o intuito de analisar dados reais; após isso, a fase de inteiração, contou com uma pesquisa sobre a equação em questão e como ela foi elaborada, calculando a solução geral e particular, com objetivo de finalizar a atividade com dados reais e fazer a simulação necessária; ainda, consideraram a fase de matematização e resolução, levando em conta as hipóteses do problema e suas variáveis, obtendo o modelo matemático: $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \cdot \text{sen } \theta = 0$, conforme mostra a Figura 2.

Figura 2 – Modelo matemático obtido pelo grupo B



Fonte: Relatório do grupo B.

Como interpretação e validação, o grupo B apresentou a resolução da Figura 3, cujo objetivo era obter a solução particular da EDO que rege o movimento do pêndulo.

Figura 3 – Interpretação e validação realizadas pelo grupo B

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0 \rightarrow \lambda^2 + \frac{g}{L} = 0$$

$$\lambda^2 = -\frac{g}{L} \rightarrow \lambda = \pm \sqrt{-\frac{g}{L}} \rightarrow \lambda = \pm i \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$\theta(t) = e^{\alpha t} [k_1 \cos(\beta t) + k_2 \sin(\beta t)]$$
 Solução geral:

$$\theta(t) = k_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}} t\right) + k_2 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}} t\right)$$

Fazendo a análise gráfica temos:

$$\sin\theta = \frac{A}{L} = \frac{0,09}{1,8} \rightarrow \sin\theta = 0,05 \rightarrow \theta = 2,86^\circ$$

Considerando o seguinte PVI:

$$\theta(t) = k_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}} t\right) + k_2 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}} t\right)$$

$$\theta(0) = 2,86^\circ; \quad \theta'(0,67) = 0; \quad g = 9,79 \text{ m/s}^2; \quad L = 1,8 \text{ m}$$

$$\omega \quad 2,86 = k_1 \cos(0) + k_2 \sin(0) \rightarrow k_1 = 2,86$$

$$\omega \quad 0 = 2,86 \cos(1,56) + k_2 \sin(1,56) \rightarrow k_2 = -105,02$$

Solução particular:

$$\theta(t) = 2,86 \cos(2,33t) - 105,02 \sin(2,33t)$$

Fonte: Relatório do grupo B.

O grupo G, era composto por alunos que já estavam mais avançados no curso, isto é, nos anos finais da graduação. Como ponto de partida da atividade, eles iniciaram os estudos descrevendo um pêndulo simples e, abordando que, para representar a situação-problema que foi sugerida, era preciso descrevê-la em função de coordenadas generalizadas e de suas forças, uma vez que são necessárias para a descrição do fenômeno para a criação de alguns sistemas de EDO, de tal forma que isso tende a descrever o fenômeno das posições, velocidades e aceleração. Dado que, posteriormente, eles objetivavam utilizar os cálculos lagrangeanos para representar as forças generalizadas.

Considerando as Coordenadas Generalizadas, os alunos obtiveram equações principais que descrevem o movimento do pêndulo simples, que constituiu a lagrangeana do movimento. Voltando-se para a energia cinética, a partir da fórmula padrão para o cálculo da energia cinética, na qual a massa do corpo, cuja bolinha acoplada ao fio inextensível, a velocidade generalizada do corpo, concluindo que a energia cinética pode ser expressa em termos da velocidade angular.

Quanto à energia potencial, grupo G expressou a equação da velocidade, considerando a gravidade e a altura do corpo em relação ao referencial, mesmo que a energia potencial seja influenciada, neste caso específico, apenas pela gravidade. Por fim, eles descreveram a equação lagrangeana, substituindo todos os termos anteriormente calculados a fim de se obter a equação

diferencial e se realizar as derivadas parciais de todos os termos para dedução da lagrangeana, obtendo-se, portanto, a equação diferencial final, que expressa as forças envolvidas:

$$ml 2\ddot{q} - mgl * \sin(q) = 0$$

Para simular diferentes problemas de valor inicial (diferentes parâmetros) comparando o modelo não-linear e o modelo linearizado, o grupo utilizou a linguagem *Python*, como mostra a Figura 4 com parte da implementação, visto que julgaram que este recurso computacional processa bem os dados, uma vez que é possível obter dados próximos aos reais através de uma linguagem rápida para depurar e achar determinados erros em trechos de códigos.

Figura 4 – Parte do código implementado pelo grupo G

```

jupyter.style(theme='grades', ticks=True, grid=True, figsize=(20.5,
15.5), spines=True)
plt.show()
#parametros
g = 9.8 #gravidade[m/s]
l = 0.5 #comprimento [m]
tempo = np.arange(0,15.0, 0.020)

#condições iniciais
angulo_inicial = 360.0 #graus
theta0 = np.radians(angulo_inicial)
x0 = np.radians(0.0)

#achar a solução para o problema não linear
theta_1 = odeint(equacoes,[theta0,x0], tempo)

#solução para o problema linear
w = np.sqrt(g/l) #velocidade angularr
theta_2 = [theta0 * cos(w*t) for t in tempo]

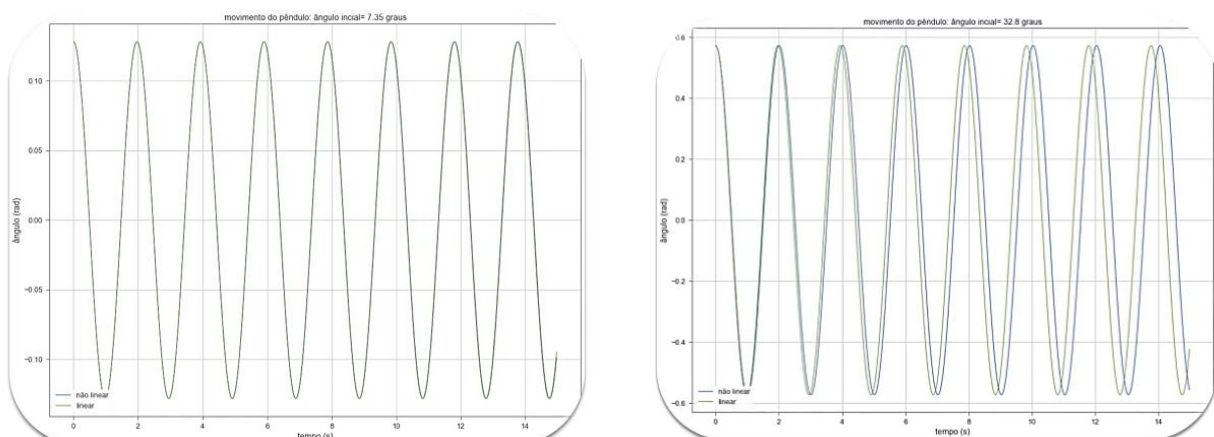
#plotar os resultados
plot_results(tempo, theta_1, theta_2)

```

Fonte: Relatório do grupo G.

A Figuras 5 apresenta as imagens disponibilizadas no relatório dos estudantes referentes ao movimento, utilizando diferentes inclinações iniciais para mostrar como iria influenciar os gráficos e seu comportamento.

Figura 5 – Movimento do pêndulo com ângulo inicial de 7,35 graus (esquerda) e de 32,8 graus (direita)



Fonte: Relatório do grupo G.

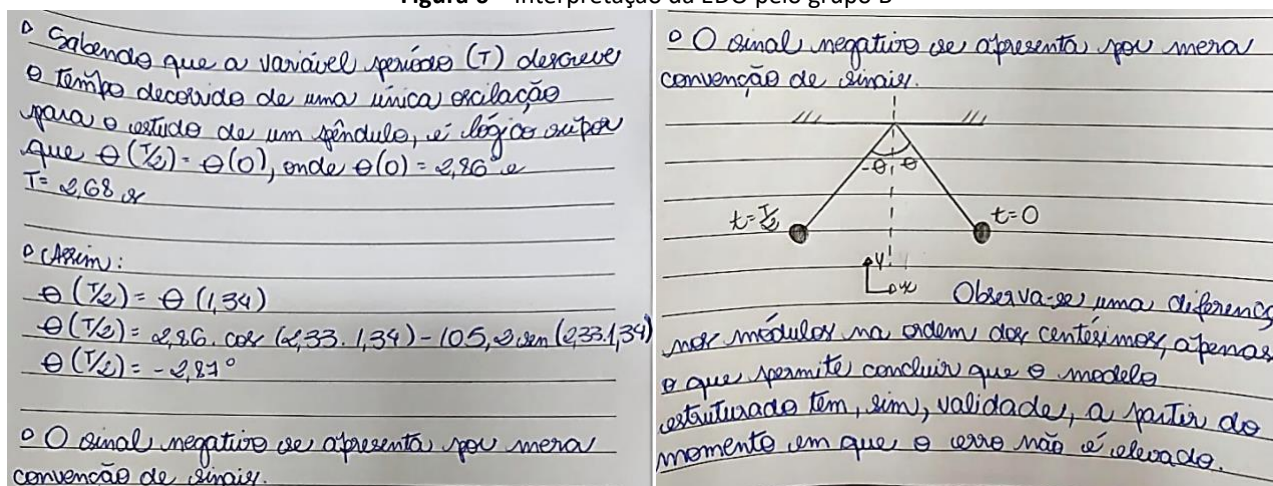
Considerando o primeiro momento da atividade, foi possível evidenciar que os grupos, de forma geral, conseguiram desenvolver a proposta de modo satisfatório, pois mostraram ter compreendido e modelado o movimento do pêndulo simples dando indícios, pelos registros escritos e de áudio e vídeo, de que foram bem sucedidos.

Para o segundo momento, aula do dia 31 de maio, foi conversado inicialmente com a professora de laboratório de Física – uma outra disciplina regular da matriz do curso – e, coincidentemente, observou-se que ela desenvolveria a aula prática sobre pêndulo simples e físico na aula antecessora a de EDO. Deste modo, os alunos tiveram dados suficientes e necessários para realizar a simulação. Mas, ainda sim, foi necessário disponibilizar um laboratório para a realização da experimentação por alunos que eventualmente não estivessem matriculados nessa disciplina.

Em um laboratório de Física, com o auxílio do técnico, foram disponibilizados 4 pêndulos (Figura 1b), em que os grupos poderiam realizar seus experimentos, fazer a simulação e validar o modelo obtido.

Foi possível observar que os alunos do grupo B continuaram seguindo a mesma estrutura de trabalho que no primeiro momento, isto é, partindo da EDO obtida que foi encontrada e que rege o movimento de um pêndulo: $\theta(t) = 2,86 \cos(2,33 t) - 105,02 \sin(2,33 t)$, em que θ se refere ao ângulo formado com a linha vertical, de tal forma que, para deslocamentos de θ suficientemente pequenos, é considerado $\sin(\theta) \approx \theta$. E, então, de maneira manuscrita, o grupo escolheu relatar que sabia a variável do período (T), que tende a descrever o tempo corrido de uma única oscilação para o estudo de um pêndulo, conforme registros apresentados na Figura 6.

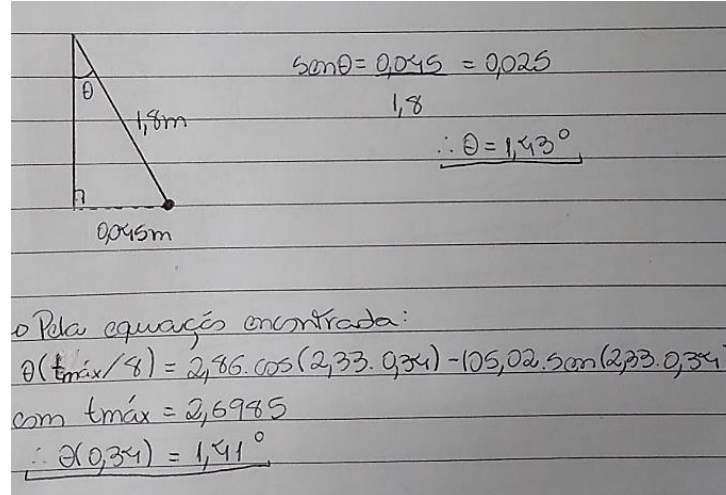
Figura 6 – Interpretação da EDO pelo grupo B



Fonte: Relatório do grupo B.

Com o intuito de fazer a validação do que foi estudado, o grupo B calculou qual era o ângulo quando a amplitude é de 0,045m e, mediante a análise visual, consideraram que $\theta = 1,43^\circ$, conforme operações e interpretações apresentadas na Figura 7.

Figura 7 – Validação do modelo matemático deduzido pelo grupo B



Fonte: Relatório do grupo B.

Desta maneira, a partir do que foi encontrado, os alunos do grupo B concluíram que o modelo matemático foi validado, uma vez que, segundo eles:

Aluno 3: Temos a validação do modelo matemático, já que em ambas as análises da equação com dados reais obtivemos valores muito semelhantes aos encontrados a partir da análise visual.

[...]

Aluno 4: Considerando que quaisquer procedimentos realizados por humanos na prática são passíveis de erro, nota-se uma discrepância leve ao comparar os dados levantados na prática laboratorial com a estrutura matemática construída para resolver o problema apresentado, já que os dados obtidos no experimento foram coletados utilizando-se ferramentas (régua e trena) que apresentam erros que influenciam nos resultados. Por isso, pode-se concluir que, mesmo não havendo exatidão, o modelo apresentado pode, sim, descrever a situação apresentada.

O grupo G precisou realizar os experimentos no laboratório e, para isso, os alunos se organizaram da seguinte maneira: após a compreensão do modelo (que ocorreu na primeira aula), o grupo simulou alguns dados a fim de compreender se o modelo estaria mesmo coerente, para que somente depois eles realizassem a prática. Então eles pesaram a massa do pêndulo, mesmo sabendo que ela não influencia, isto porque o intuito era ter a maior quantidade de dados possíveis; mediram o comprimento do fio até o centro de massa. A seguir, o diálogo transcrito da realização da prática do grupo:

Aluno 1: A gente fez as medições né, a gente mediu a massa da esfera do pêndulo e como ali tinha limitação que a gente não sabia, tivemos que medir a distância do início do fio até o centro de massa, que é onde ele fica totalmente reto. Já para o outro ponto, a gente ia calcular a tangente e encontrar o ângulo né; daí a gente definiu alguns ângulos iniciais e agora precisamos ver pela



análise do vídeo que fizemos o que será necessário para calcular a velocidade angular, porque a gente tem o ângulo definido e quer ver a trajetória do pêndulo. Então com esse tempo que a gente mais ou menos cronometrou, vai dar para definir velocidade angular como um parâmetro inicial.

Aluno 2: *E a gente já usou e vai usar de novo o Python para fazer os gráficos porque já usamos ele em outras aulas e é mais fácil.*

Como citado no diálogo, o grupo gravou dois vídeos, usando 10 centímetros como distância linear para fins de cálculo de ângulo, o qual o fio se encontrava a cerca de 15,5 centímetros do centro da haste. E, utilizando arco tangente, conseguiram encontrar o ângulo e, então, se basearam em diferentes ângulos para saber como a angulação afetava a trajetória, considerando que os dados e os ângulos já mencionados eram coerentes e se adequavam ao modelo.

Conclusão

Considerando que a Análise de Modelo se trata de uma alternativa pedagógica, a partir da sua relação direta com a Modelagem Matemática, o desenvolvimento da atividade contou com a participação de 12 grupos de alunos, no qual 11 entregaram seus relatórios. Desse total, 9 seguiram uma linha tradicional para o desenvolvimento do modelo matemático proposto. Linha esta que está contida na maior parte dos artigos e dos livros que abordam o tema, sem tanto enfoque em algo novo ou “fora do comum” para uma turma de Equações Diferenciais Ordinárias, principalmente por estar inserida nos semestres iniciais do curso de graduação.

Contudo, os dois grupos escolhidos para serem relatados neste artigo abordam duas perspectivas que foram consideradas relevantes, isto porque o grupo G, por ser constituído por alunos de semestres mais avançados do curso, já tinha certo conhecimento sobre o tema e sabia a importância e relevância de se estudar e compreender os conceitos de EDO; principalmente por compreenderem que modelos matemáticos prontos auxiliam no entendimento real de dados fenômenos por meio de linguagem matemática e simulação, em uma atividade de Modelagem Matemática, a fim de se resolver uma situação-problema.

Outro ponto relevante foi a maneira como os grupos realizaram a validação do modelo de um Pêndulo Simples, uma vez que, usaram variadas maneiras, desde os dados já vistos em disciplinas anteriores como também a validação através de simulações e videoanálise (que não foi apresentada nesse texto), além da utilização de dados simulados com base em artigos já prontos. A disponibilidade de se utilizar o laboratório de ensino também contribuiu positivamente para a



atividade, isto porque possibilitou um contato maior entre a prática e o contexto teórico exposto nos livros.

A proposta da Análise de Modelo surgiu como uma alternativa de se trabalhar com modelos matemáticos pré-existentes e formulados, com objetivo de introduzir, discutir e formalizar novos conceitos aos alunos, como uma possibilidade de trabalhar modelos matemáticos que sejam úteis e aplicáveis para a vida acadêmica e profissional dos alunos. Principalmente porque é possível trabalhar com Análise de Modelos em variados conjuntos de investigações, que tendem a abordar tanto recursos tecnológicos quanto simulações para a validação do que está sendo discutido.

Ainda, a simulação, por sua vez, possibilita a representação, através de modelos, o funcionamento dos fenômenos que se deseja representar, cujo objetivo é obter uma abordagem que modele a situação-problema, a fim de compreender e estudar seu comportamento. Portanto, a partir de estudos realizados para este trabalho, foi possível concluir e estimar que a simulação pode ser entendida como uma maneira de se obter a solução de um problema através da análise de um modelo que descreve o comportamento da situação-problema, atingindo características desse sistema com maior precisão.

Considerando que a “Simulação implica na modelagem de um processo ou sistema, de tal forma que o modelo imite as respostas do sistema real numa sucessão de eventos que ocorrem ao longo do tempo” (SCHRIBER, 1974 apud FREITAS FILHO, 2008, p. 21), o desenvolvimento da atividade consistiu em uma experiência enriquecedora e que contribuiu significativamente para a compreensão do que contempla a Análise de Modelos, dentro da perspectiva da Modelagem Matemática. E, além disso, a interação, empenho e dedicação dos estudantes com uma nova “proposta” de atividade, foi interessante, pois eles se dedicaram a compreender o que a metodologia escolhida visava e como ela poderia estar e ser inserida no contexto do modelo escolhido.

Desta maneira, o trabalho foi concluído como uma experiência que contou com a metodologia de Modelagem Matemática, visando a Análise de Modelos, tal como a Simulação e uso de Tecnologias Digitais, que tendem a influenciar para que os alunos consigam compreender o modelo proposto e saibam explorar variados recursos que estão ao alcance deles. E, ainda, após a finalização da etapa inicial, o intuito é que seja possível, como pesquisa de mestrado que está em fase inicial de desenvolvimento, analisar o Pensamento Matemático Avançado de cada grupo, a fim de se observar o processo de pensar matematicamente.



Referências

BASSANEZZI, R. C. **Ensino – aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. São Paulo: Editora Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, M. S. **30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais**. Alexandria Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v.2, n.2, p.7- 32, jul. 2009.

FREITAS FILHO, P. J. **Introdução à modelagem e simulação de sistemas com aplicações em Arena**. 2. ed. rev. e atual. Florianópolis: Visual Books, 2008.

JAVARONI, S. L.; SOARES, D. da S. **Modelagem Matemática e Análise de Modelos Matemáticos na Educação Matemática**. Acta Scientiae, v.14, n.2, maio/ago. 2012

ZILL, D. G.; CULLEN M. R.; **Equações Diferenciais**, v.1. São Paulo: PersonMakron Books, 2001.