



União da Vitória - Paraná

IX EPMEM

Encontro Paranaense de Modelagem na
Educação Matemática

Informações sobre as Autoras:

Rosângela Maria Kowalek

Universidade Estadual de Londrina (UEL)
rosangelakowalek1@gmail.com

Lourdes Maria Werle de Almeida

Universidade Estadual de Londrina (UEL)
lourdes.maria@sercomtel.com.br

Um Olhar sobre a Validação em uma Atividade de Modelagem Matemática

Resumo

Neste artigo dirigimos nossa atenção para a validação em atividades de Modelagem Matemática, especificamente investigamos os encaminhamentos assumidos pelos alunos envolvidos em uma atividade de modelagem matemática para validar o modelo e a respostas para o problema em estudo. A atividade analisada foi desenvolvida por um grupo alunos de uma turma do 4º ano de um curso de Licenciatura em Matemática. Os dados que fomentam as análises foram coletados a partir da gravação do desenvolvimento da atividade, relatório entregue pelos alunos e resposta a um questionário logo após o término da atividade. Para condução da investigação utilizamos os pressupostos da pesquisa qualitativa. Como resultados pontuamos que os encaminhamentos assumidos pelos alunos para validar desencadearam ações na busca de certificação e garantia de uma resolução e construção do modelo e de resultados para o problema. Destacamos ainda, uma articulação entre os procedimentos para a validação do modelo e da resposta.

Palavras-chave: Atividade de modelagem matemática. Validação do modelo. Validação da resposta.

Abstract

In this article we direct our attention to the validation in Mathematical Modeling activities, specifically we investigate the directions taken by the students involved in a mathematical modeling activity to validate the model and the answers to the problem under study. The activity analyzed was developed by a group of students from a 4th year class of a Mathematics Degree course. The data that encourage the analysis were collected from the recording of the development of the activity, report delivered by the students and answer to a questionnaire soon after the end of the activity. To conduct the investigation, we used the assumptions of qualitative research. As a result, we point out that the directions taken by the students to validate triggered actions in the search for certification and guarantee of a resolution and construction of the model and results for the problem. We also highlight an articulation between the procedures for the validation of the model and the response.

Keywords: Mathematical modeling activity. Model validation. Response validation.

Realização:





Introdução

Nas últimas décadas discussões sobre a compreensão e implementação de atividades de modelagem matemática nas aulas de matemática têm merecido atenção na literatura do âmbito da área de Modelagem Matemática (BORROMEO FERRI, 2018; ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013; MEYER, CALDEIRA E MALHEIROS, 2013; PINTO, ARAUJO, 2021).

Nesse sentido, a Modelagem Matemática tem sido considerada uma possibilidade que propõe o ensino dos conteúdos programáticos curriculares mediante situações da realidade que podem ser matematizadas. Dado que a Modelagem Matemática apresenta como característica principal “a possibilidade de abarcar a cotidianidade ou a relação com aspectos externos à Matemática, caracterizando-se como um conjunto de procedimentos mediante o qual se definem estratégias de ação do sujeito em relação a um problema” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013, p. 15).

Nesta perspectiva, a dinâmica de uma atividade de modelagem matemática em sala de aula, de modo geral, inicia-se com uma situação-problema que pode ser sugerida pelos professores, ou definida pelos alunos, seguida por procedimentos, configuração, estruturação e resolução, em que se definem as estratégias de ação dos alunos. No que se refere ao desenvolvimento de atividade de modelagem matemática em sala de aula esses encaminhamentos se relacionam às fases de modelagem matemática que orientam a abordagem de atividade dessa natureza em sala de aula (BLUM, 2015; STILLMAN et al., 2007).

Particularmente, no presente artigo interessa-nos olhar para uma das fases associadas ao desenvolvimento de uma atividade de modelagem: a validação. Tal temática é aqui problematizada à luz dos estudos e pesquisas de Czocher (2013, 2018) e Ikeda (2013).

Czocher (2018) destaca a importância da validação nos encaminhamentos de atividades de modelagem matemática, evidenciando que a validação é responsável por fornecer indícios da precisão e de eficiência dos resultados obtidos com a modelagem matemática de uma situação da realidade.

Faz-se importante ressaltar ainda os três papéis centrais da validação em atividades de modelagem matemática indicados pela autora (CZOCHER, 2018) os quais consistem em validar e analisar a parte matemática, a construção do modelo matemático; validar as suposições feitas e encaminhamentos assumidos para estruturar e desenvolver a atividade; validar os resultados e as respostas, levando em consideração também a teoria e a situação real elencada para o estudo.



Nesse sentido no presente artigo, dirigindo a atenção à fase de validação, investigamos os encaminhamentos de alunos para validar o modelo e a resposta para o problema quando desenvolvem uma atividade de modelagem matemática. Pautamos nossa investigação em uma pesquisa empírica em que analisamos uma atividade de modelagem matemática desenvolvida por um grupo de cinco alunos do quarto ano de um curso de Licenciatura em Matemática na disciplina de Modelagem Matemática ministrada por uma das autoras do presente artigo.

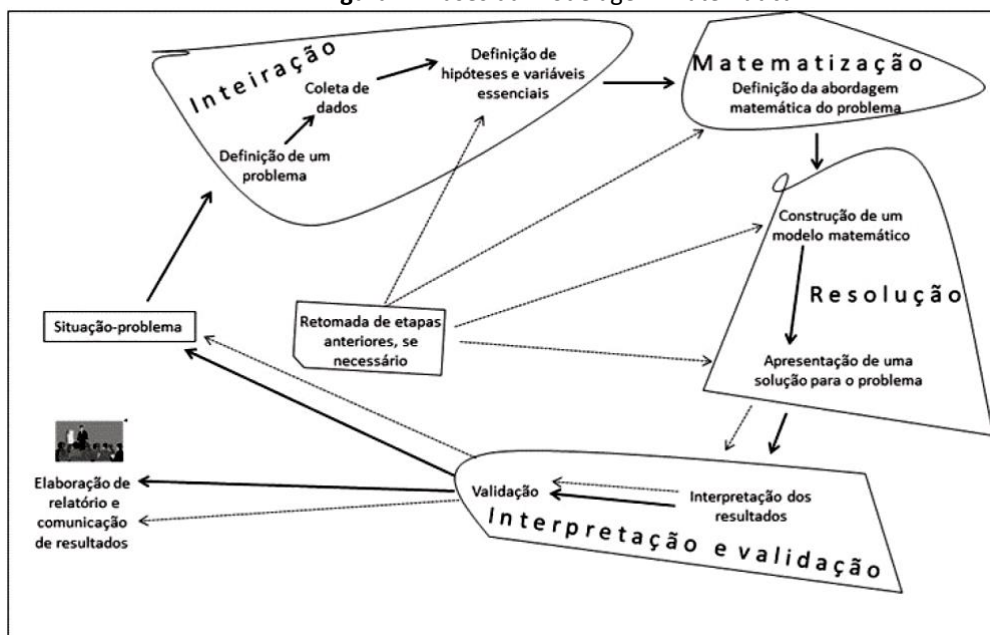
Modelagem Matemática

Diferentes caracterizações de modelagem matemática são reconhecidas na literatura da área de Educação Matemática, tanto no Brasil como internacionalmente. De modo geral, os entendimentos permeiam a compreensão de que atividades de modelagem matemática preconizam a investigação de uma situação da realidade mediante o uso da matemática.

De acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2013), a modelagem matemática na sala de aula pode fomentar a motivação dos alunos, a realização de trabalhos cooperativos, a realização de diferentes resoluções para um mesmo problema. Nesse sentido, os autores sugerem encaminhamentos para o desenvolvimento de atividades de modelagem, os quais remetem ao entendimento da problemática, a busca de resolução e uma interpretação do resultado, sendo ações específicas que se complementam e se relacionam durante o processo de desenvolvimento da atividade de modelagem.

Almeida, Castro e Silva (2021) caracterizam os encaminhamentos em uma atividade de modelagem como fases da modelagem matemática, que embora caracterizadas separadamente, atribuem às atividades de modelagem uma natureza dinâmica e visam expressar o caráter aberto dos problemas de modelagem e a flexibilidade na sua resolução. Os autores caracterizam essas fases como: inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação (Figura 1).

Figura 1 - Fases da Modelagem Matemática



Fonte: Almeida, Castro e Silva (2021, p. 386).

A fase inteiração refere-se ao primeiro contato com a situação problema e se configura como momento em que modeladores (alunos ou professores) se informam-se, e tomam conhecimento a respeito da situação. Tem como foco a busca por informações acerca da situação que será estudada na atividade de modelagem.

A situação problema identificada na fase inteiração geralmente se apresenta em linguagem natural e isso evidencia a necessidade da transição da linguagem natural para a linguagem matemática, momento que Almeida, Silva e Vertuan (2013), denominam matematização e definem como a busca de uma representação matemática da situação, ou seja, uma tradução de linguagens que permite retratar a realidade por meio de regras, métodos e teorias matemáticas. Na matematização se prioriza a descrição matemática do problema em que se requer a seleção de variáveis, o levantamento de hipóteses, simplificações e o encaminhamento da elaboração do modelo matemático, levando em consideração aspectos da situação inicial, entendidos como relevantes para o problema investigado (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013).

Na fase de resolução ocorre a elaboração de um modelo matemático e o seu uso para construir uma resposta para o problema definido. É a fase em que

o sujeito utiliza conceitos, técnicas, métodos e representações matemáticas, põe em uso seus conhecimentos prévios, busca padrões, recorre a ferramentas computacionais, coordena diferentes representações dos objetos matemáticos, busca conhecer conceitos novos e ressignifica os já conhecidos [...] (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013, p. 35).



A interpretação de resultados e validação constitui um processo de análise e avaliação do modelo e da obtida. Segundo Almeida, Silva e Vertuan (2013), a fase, leva em consideração os procedimentos matemáticos e a resposta obtida no sentido de analisar se ela é adequada, levando em consideração também o processo de construção de modelos. Assim, nessa fase se valida o modelo, o(s) resultado(s) para o problema, para, posteriormente, avaliar a resposta para situação em estudo. No presente artigo dirigimos nosso olhar para a validação.

Validação em atividades de modelagem matemática

A palavra *validação* diz respeito à ação de tornar algo válido perante um objetivo ou uma necessidade, sendo um processo em que o indivíduo desenvolve ações com a intenção de avaliar e determinar se algo satisfaz a requisitos especificados (HALLERSTEDT; LARSEN; FITZGERALD, 2018).

Como uma das fases relativas ao desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, a validação consiste em ações de avaliação do que está sendo realizado no decorrer do desenvolvimento e, particularmente, do modelo e da resposta obtida. Segundo Twomey e Smith (1997 p, 53) “a validação é um aspecto crítico do desenvolvimento da atividade de modelagem”, uma vez, que segundo o autor o aluno precisa desenvolver ações de avaliação e análise sobre o desenvolvimento da atividade, o que configura a validação como um olhar de criticidade sobre a atividade desenvolvida. Alvarado (2017) argumenta que em modelagem matemática a validação é importante pois permite avaliar de modo crítico e reflexivo a qualidade de um modelo ou resultado em função dos objetivos estabelecidos para a atividade. A validação é

uma comprovação dentro de seu domínio de aplicabilidade e para uma faixa satisfatória de precisão, coerente com o sistema real e sua aplicação prevista. Deste modo, o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática deve ter um propósito específico e sua validade é determinada em concordância com tal propósito (ALVARADO, 2017, p. 32).

A validação se refere, portanto, à análise dos procedimentos, do modelo matemático, dos, resultados, da resposta para o problema. No entanto, Alvarado (2017, p. 33) destaca que “a validação absoluta não existe, mas existem técnicas particulares que são estabelecidas para validar aspectos da atividade”. Essas técnicas e particularidades se remetem a elementos específicos de atividades de modelagem matemática, como por exemplo, o modelo, o resultado, os cálculos, as respostas.



De modo particular, Czocher (2018) destaca que em termos da validação da resposta, as ações visam comparar os resultados com os dados e as informações conhecidas sobre a situação da realidade, bem como comparar a resposta do problema com a situação da realidade considerando as expectativas empíricas e as informações sobre a situação da realidade.

Este autor aponta que a busca pela validação ocorre habitualmente de dois modos: como um julgamento no final da atividade averiguando e avaliando as respostas, acarretando uma sua aceitação, revisão ou rejeição; como um processo contínuo que se dá nas diferentes fases de uma atividade de modelagem, requerendo a tomada de decisão dos estudantes enquanto desenvolvem a atividade.

De modo geral, diferentes pesquisas na área sugerem que independente da validação ocorrer ao longo do desenvolvimento de uma atividade de modelagem ou ao final, a validação do modelo se figura em ambas as situações como decisiva para o desenvolvimento da atividade, uma vez que leva em consideração, por um lado, os procedimentos, as relações, as técnicas e os conceitos da matemática e, por outro lado, os resultados que esse modelo produz perante a situação em estudo (PERRENET; ZWANEVELD; 2015; SAEKI; KANEKO; SAITO, 2017; GALBRAITH; HOLTON; TURNER, 2020).

A validação do modelo decorre de uma verificação a qual se configura como o processo que verifica a precisão matemática envolvida na atividade e que mede o quão bem o modelo matemático articula dados e provém respostas numéricas (MARCHI, 2015; ELAASAR, 2018).

A verificação é o

o processo de determinar se a implementação de um modelo representa com precisão a descrição conceitual do modelo e a solução para o problema. A verificação se preocupa, portanto, em identificar e remover erros no modelo, comparando soluções numéricas com soluções analíticas ou altamente precisas (THACKER et al., 2006, p. 2).

De acordo com Pace (2004), Marchi (2015) e Elaasar (2018), a verificação é um processo matemático e se dirige a uma avaliação do modelo, e inclusive da resposta, de um ponto vista numérico. Já a validação é o processo de avaliação de todo o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática e tem como ênfase o olhar para a resposta e sua relação com o problema da realidade.



Aspectos metodológicos e contexto da pesquisa

A investigação acerca das conduções dos alunos para validar o modelo e a resposta para o problema, no presente artigo considera dados de uma pesquisa empírica. Particularmente, uma atividade de modelagem matemática desenvolvida por um grupo de cinco alunos do quarto ano de um curso de Licenciatura em Matemática na disciplina de Modelagem Matemática ministrada por uma das autoras deste texto.

A atividade foi desenvolvida em sala virtual do *Google Meet*, no decorrer de quatro aulas de 50 minutos cada uma. As informações e a temática foram sugeridas aos alunos pela professora. O grupo de alunos foi responsável pelas demais ações relativas ao desenvolvimento da atividade de modelagem.

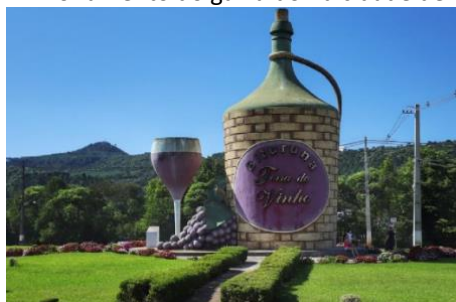
Os dados que constituem o material de análise consistem nas gravações das aulas, o relatório da atividade entregue pelos alunos e respostas a um questionário respondido imediatamente após o desenvolvimento da atividade.

A análise dos dados segue os encaminhamentos de uma pesquisa qualitativa e interpretativa (BOGDAN, BIKLEN, 1994). Assim, a fonte de dados é o ambiente em que se deu o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática e o processo analítico se dirige aos elementos significativos relativamente à problemática da investigação, os encaminhamentos assumidos pelos alunos para validar o modelo e a resposta. A fim de uma melhor organização em nossas análises, identificamos os alunos do grupo por $A_i, 1 \leq i \leq 5$.

A atividade de modelagem matemática desenvolvida

A atividade de modelagem é relativa a uma situação-problema que diz respeito a um monumento turístico da cidade de Bituruna no estado do Paraná, conhecida como a cidade do vinho. A imagem do monumento foi apresentada aos alunos pela professora (Figura 2) e a partir de um diálogo entre a professora e os alunos sobre algumas informações a respeito da cidade e da imagem do monumento do garrafão, alunos e professora, conjuntamente, definiram o problema: supondo que o vinho desse garrafão seja servido em um jantar, qual é o número de taças de vinho que poderão ser servidas?

Figura 2 – Monumento do garrafão na cidade de Bituruna



Fonte: <https://arquivo.bituruna.pr.gov.br/turismo/exibe/32/garrafo>

Para resolver o problema os alunos utilizaram as medições obtidas com auxílio de régua do garrafão da imagem e de uma garrafa de vinho padrão de 500ml. Em seguida para a construção do modelo matemático assumiram um formato cilíndrico tanto para o garrafão como para a garrafa e utilizando conceitos matemáticos de proporção encontraram uma quantidade de vinho. O modelo matemático final construído pelos alunos fornece a quantidade de taças de vinho em função da altura do monumento: $f(h) = 0,0010353195 h^3 = 0,00104h^3$, em que h é a altura em centímetros e $f(h)$ é a quantidade de taças de vinho. Como resposta final o grupo apresentou que poderiam ser servidas 4.981.750 taças de vinho no jantar.

Análise dos encaminhamentos dos alunos para validar o modelo e a respostas para o problema

Com base nos dados coletados, identificamos encaminhamentos dos alunos no desenvolvimento da atividade na intenção de validar a resposta para o problema e o modelo matemático.

Os recortes do relatório entregue pelo grupo que são apresentados no Quadro 2 ilustram alguns encaminhamentos dos alunos na intenção de validar a resposta encontrada para o problema.

Quadro 2 – Indicativos dos encaminhamentos dos alunos para validar a resposta

Código	Recorte do relatório dos alunos
R ₁	<i>Para validar nossa resposta encontrada foi enviado um e-mail para a Prefeitura de Bituruna perguntando a respeito do diâmetro da garrafa, pois, a nosso ver, com o diâmetro em mãos e a altura poderíamos calcular o seu volume.</i>
R ₂	<i>As informações obtidas com a prefeitura contribuíram para dar credibilidade a resposta dada à situação-problema, confirmando que a resposta obtida pelo modelo matemático obtido está bem próxima dos dados obtidos acerca da situação real.</i>

Fonte: relatório do grupo

Nota-se que no recorte R₁ os alunos apresentam a descrição de seus encaminhamentos para validar a resposta obtida. Identificamos nesse recorte uma intenção dos alunos de obter



informações reais sobre as medidas do garrafão ao mencionarem que entraram em contato com os órgãos responsáveis pelo turismo na prefeitura municipal de Bituruna. Isso indica que os alunos sentem a necessidade de validar a resposta obtida em relação a aspectos da situação da realidade, com intenções de garantir uma razoabilidade para sua resposta por meio da resolução realizada.

No recorte R_2 os alunos relatam suas considerações sobre a resposta encontrada após uma análise envolvendo as informações reais obtidas e a validação do modelo. Visto que na descrição dos alunos fica explícito que utilizam aspectos da validação do modelo para inferir considerações sobre a validação da resposta. Identificamos, portanto, uma articulação da validação da resposta e da validação do modelo e os encaminhamentos dos alunos para validar o modelo recaem também na validação das respostas.

No que tange a articulação entre validação do modelo e validação da resposta, é importante destacar que ela decorreu do encaminhamento dos alunos de olhar para os resultados encontrados pelo modelo em relação às informações reais da situação-problema. De fato, ao serem questionados ao final da atividade sobre o modo como a resposta foi validada, os alunos informaram que a mesma foi validada *“levando em consideração a diferença entre os dados obtidos pelo modelo e os dados reais”*.

Identificamos que a validação da resposta apresentada pelos alunos para a atividade foi inferida com base na validação do modelo obtido para a quantidade de vinho no garrafão. Assumindo que se o modelo para a quantidade de vinho é válida, a quantidade de taças é aceitável, pois se respaldam na justificativa que a quantidade servida em cada taça é padrão, analisando apenas se o cálculos para encontrar esse número de taças estavam corretos.

Os encaminhamentos dos alunos para a validação do modelo identificadas na atividade envolvem também ações relativas ao processo de verificação. De fato, os alunos revelam procedimentos para analisar a precisão do modelo matemático bem como o quanto o resultado obtido pelo modelo se aproxima da realidade. Os diálogos e os recortes do relatório entregue pelo grupo indicam os encaminhamentos dos alunos para validar o modelo e os indicativos da realização de verificações, conforme sugere o Quadro 3.



Quadro 3 – Indicativos de verificação realizada pelos alunos

Código	Diálogo dos alunos/ recorte do relatório
D ₁	<p>A1: eu acho que a gente vai precisar usar essas informações naquele modelo que a gente encontrou.</p> <p>A5: sim, mas como vamos fazer isso?</p> <p>A1: Vejam se o que eu estou pensando é correto: a gente pode substituir aqueles valores nas variáveis do modelo.</p> <p>A3: acho que vai funcionar. Vamos testar e ver se o resultado tem lógica.</p>
D ₂	<p>A4: como a gente pode provar que esses valores se aproximam entre si? Será que só substituir valores na fórmula já é suficiente?</p> <p>A5: Então, olhando para os resultados nós vemos que eles são próximos, né?</p> <p>A2: Vocês lembram da atividade das marés? e se a gente fizer igual? Podemos primeiro calcular com esse valor real e depois encontrar o erro entre esse valor e o valor do nosso modelo.</p> <p>A4: pode ser</p>
R ₃	<p>Utilizando a altura do monumento sem a rolha já estimado anteriormente ($h=16, 8571$) e o raio fornecido, obtemos:</p> $V_{\text{real}} = \pi r^2 \cdot h \Rightarrow V_{\text{real}} = \pi \cdot (3,25)^2 \cdot 16, 8571 \Rightarrow V_{\text{real}} = 559, 3703 \text{ m}^3$ <p>Note que, o valor encontrado em cm^3 foi de $559.370.369,8 \text{ cm}^3$</p>
R ₄	<p>Observe que, o valor que encontramos pelo modelo se aproxima do valor que obtivemos na internet que pode ser o valor real</p> $ \text{Valor obtido pelo modelo} - \text{Valor real} $ $ 552.264.180 - 559.370.369, 8 \approx 7.106.189, 8 \text{ cm}^3$ <p>Calculando o erro percentual em relação ao valor real, temos:</p> $\frac{\text{valor obtido pelo modelo} - \text{valor real}}{\text{valor real}} \cdot 100 = \text{erro percentual}$ $\frac{7106189,8 - 559370369,8}{559370369,8} \cdot 100 = 1, 27\%$ <p>Logo, o erro encontrado é $1,27\%$ que é aceitável.</p> <p>O erro é pequeno considerando-se o tamanho do monumento</p>
R ₅	<p>Os resultados encontrados ao substituímos as informações obtidas em contato com a prefeitura contribuíram para dar credibilidade à resposta dada ao problema, uma vez, que com essas informações validamos o modelo para encontrar a quantidade de vinho e considerando a quantidade de vinho correta assumimos a quantidade de taças servidas como uma resposta adequada.</p>

Fonte: Relatório do grupo

No diálogo D₁ os alunos demonstram a intenção de utilizar para a validação do modelo as informações que solicitaram a prefeitura da cidade de Bituruna. Identificamos que os encaminhamentos dos alunos nesse momento remetem a uma utilização de informações reais para verificar a razoabilidade do modelo construído. Nesse sentido, os alunos demonstram realizar verificações de quão preciso é o modelo ao passo que substituem valores reais na intenção de analisar e avaliar se o resultado encontrado pelo modelo é aceitável.

Vale destacar que a verificação, conforme indicado por Thacker et. al. (2006), consiste em uma comparação de resoluções e resultados, como pode-se observar os encaminhamentos dos alunos para validação do modelo envolvem comparações de resoluções e repostas. No diálogo D₂ os alunos indicam estratégias na intenção de realizar uma comparação entre os resultados encontrados na resolução com a substituição dos valores reais no modelo obtido. Nos recortes R₃ e R₄ a comparação entre os resultados fornecidos pelo modo ficam mais evidente nas descrições dos alunos que destacam serem valores próximos.



É importante destacar que ao longo da atividade as verificações dos alunos foram no sentido de validar o modelo obtido para quantidade de vinho no garrafão, levando em consideração a resolução do problema, o modelo matemático, bem como a comparação dos resultados obtidos pelo modelo decorrentes dos valores utilizados na resolução e os resultados obtidos pelos modelo decorrentes de dados reais pesquisados após a resolução da atividade. Assim, vale frisar que os encaminhamentos dos alunos para validar o modelo matemático utilizam os dados reais relacionados a situação problema.

O recorte R₃ ilustra que a substituição dos valores da altura e do raio do garrafão fornecidos pela prefeitura de Bituruna no modelo do volume do garrafão conduziu os alunos à obtenção de um resultado de $559370369,8 \text{ cm}^3$ para a quantidade de vinho no garrafão. Disso, podemos considerar, que no que diz respeito à validação do modelo os alunos demonstram estabelecer uma comparação entre os valores obtidos com essa substituição e o resultado encontrado na resolução, uma vez que descrevem “*Note que, o valor encontrado em cm^3 foi de $559370369,8 \text{ cm}^3$ ” fornecendo indicativos que analisam o que o valor encontrado representa para responder os problemas.*

Identificamos nos recortes R₄ e R₅ encaminhamento dos alunos em relação à validação do modelo no sentido de justificar e embasar suas argumentações sobre a razoabilidade e precisão do modelo com respaldo na matemática. Nesse sentido consideramos que os alunos apresentam encaminhamentos para a validação do modelo de modo articulado com o desenvolvimento da atividade bem como levam em consideração a situação real e os resultados obtidos. Destacamos ainda, que a validação da resposta apresentada pelos alunos é inferida a partir do pressuposto que se o modelo para a quantidade de vinho é válida a quantidade de taças é aceitável, pois se respaldam na justificativa que a quantidade servida em cada taça é padrão.

De modo geral, identificamos que os encaminhamentos dos alunos para validar o modelo envolveram técnicas de verificação como comparação e análise de valores e resultados matemáticos no contexto do modelo construído para responder o problema em estudo, cientificando-se sobre a precisão e razoabilidade do modelo para fornecer um resultado condizente ao problema investigado. Indicativos mais sucintos desses encaminhamentos podem ser observados na resposta dado pelos alunos quando questionados sobre como o modelo foi validado: *Por meio das medidas reais obtidas do diâmetro do garrafão do monumento comparamos o volume do garrafão do monumento com o volume obtido pelo modelo matemático e vimos que o erro era suficientemente pequeno, validando a precisão do modelo obtido.*



De modo geral, os encaminhamentos dos alunos para validar o modelo e a respostas para o problema foram identificados ao final do desenvolvimento da atividade durante a interpretação dos resultados e validação. Em seus relatórios os alunos deixam explícita a descrição da validação do modelo e da resposta na referida fase de modelagem, bem como os diálogos ao longo do desenvolvimento da atividade também indicam encaminhamentos dos alunos para validar o modelo e a respostas apenas após concluir a resolução da atividade.

Parece claro que os encaminhamentos dos alunos para validar modelo e a resposta na atividade são semelhantes aos pontuados por Czocher (2018) quando menciona a validação ao final da atividade. Todavia, ressaltamos que os encaminhamentos dos alunos nesta atividade foram no sentido de avaliar os resultados, o modelo construído, a resposta para o problema que são aspectos indicados como importantes na validação de atividades de modelagem matemática (PERRENET; ZWANEVELD; 2015; SAEKI; KANEKO; SAITO, 2017; GALBRAITH; HOLTON; TURNER, 2020).

Apresentados no Quadro 4 uma síntese dos encaminhamentos dos alunos para validar o modelo e a respostas para o problema identificados na atividade desenvolvida.

Quadro 4 - Síntese dos encaminhamentos dos alunos para validar o modelo e a respostas para o problema na atividade desenvolvida

Validação	Encaminhamento dos alunos
Do modelo	- Verificação do modelo: <ul style="list-style-type: none"> • Comparar os resultados da resolução da atividade com os resultados obtidos por meio da substituição das medidas reais no modelo; • Analisar o resultado obtido pelo modelo em relação às informações reais; - Avaliar os procedimentos usados para construir o modelo.
Da resposta	- Buscar por informações reais para comparar com o resultado obtido usando o modelo; - Analisar os resultados obtidos pelo modelo, em relação aos valores obtidos em site da internet - Avaliar e justificar se o resultado encontrado pelo modelo é satisfatório

Fonte: as autoras

Identificamos que os encaminhamentos dos alunos para validar a resposta para o problema constituíram em análises e avaliações dos resultados obtidos na validação do modelo e informações complementares da situação real que estava sendo estudada. Destacamos uma articulação entre a análise realizada pelos alunos para inferir sobre a resposta e a validação do modelo. Assim, os encaminhamentos utilizados para validar a resposta tiveram respaldo em conclusões dos alunos relativas ao modelo e sua adequação para a situação.

Em termos da validação do modelo, identificamos que os encaminhamentos dos alunos se respaldam na utilização de técnicas de verificação, como por exemplo a comparação e análise de



valores e resultados matemáticos como também, avaliação da precisão e razoabilidade do modelo. Consideramos assim que as verificações dos alunos análise do modelo estão alinhadas com indicações de Thacker et. al. (2006) relativas à verificação em atividades de modelagem.

Considerações finais

A investigação dos encaminhamentos dos alunos envolvidos em uma atividade de modelagem matemática para validar o modelo e a resposta foi dirigida aos procedimentos dos alunos que se tornaram acessíveis mediante a gravação do desenvolvimento de uma atividade bem como do relatório escrito entregue pelos alunos.

De modo geral, é possível pontuar que a validação realizada pelos alunos, ora se dá no sentido de validar resposta, ora de validar o modelo. Diante disso, a validação se configura como um processo que, na pesquisa empírica aqui considerada, desencadeia ações na busca de certificação e garantia de uma resolução e construção do modelo e de uma resposta plausível para o problema.

A validação do modelo foi realizada pelos alunos com respaldo na verificação que tem como foco o modelo e o desenvolvimento da matemática ao longo da resolução. Nesse sentido, a verificação foi assumida na atividade como parte da validação, e os resultados encontrados com a validação do modelo foram utilizados pelos alunos para concluir se a resposta encontrada é condizente a problemática estudada.

Assim, em consonância com o que apontam as pesquisas de Czocher (2018) e de Alvorado (2017), a validação, embora muitas vezes considerada como uma fase final do desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática, inclui procedimentos que requerem dos alunos avaliações e decisões em diferentes fases do trabalho dos alunos. Pesquisas futuras podem se dirigir à investigação de possíveis desdobramentos para a eficiência do modelo e da resposta decorrentes dessa avaliação.

Referências

ALMEIDA, L. M. W.; CASTRO, É. M. V.; SILVA, M. H. S. Recursos semióticos em atividades de modelagem matemática e o contexto on-line. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 14, n. 2, p. 383-406, 2021.



ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Editora Contexto, 2013.

ALVARADO, C. S. M. **Estudo e implementação de métodos de validação de modelos matemáticos aplicados no desenvolvimento de sistemas de controle de processos industriais**. 2017. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Tradução M. J. Alvarez, S. B. Santos e T. M. Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

BORROMEO FERRI, R. **Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education**. Picassoplatz, Switzerland: Springer, 2018, p. 13 – 39.

CZOCHER, J. A. **Toward a description of how engineering students think mathematically**. 2013. Tese de Doutorado. The Ohio State University.

CZOCHER, J.; STILLMAN, G.; BROWN, J. Verification and Validation: What Do We Mean? **Mathematics Education Research Group of Australasia**, 2018.

CZOCHER, J. A. How does validating activity contribute to the modeling process? **Educational Studies in Mathematics**, v. 99, n. 2, p. 137-159, 2018.

ELAASAR, M. Definition of modeling vs. programming languages. In: **International Symposium on Leveraging Applications of Formal Methods**. Springer, Cham, 2018. p. 35-51.

GALBRAITH, P.; HOLTON, D.; TURNER, R. Enfrentando o desafio: promovendo a modelagem matemática como solução de problemas do mundo real. In: **Modelagem Matemática Educação e Criação de Sentidos**. Springer, Cham, 2020. p. 253-263.

HALLERSTEDE, S.; LARSEN, P. G.; FITZGERALD, J. A Non-unified view of modelling, specification and programming. In: **International Symposium on Leveraging Applications of Formal Methods**. Springer, Cham, 2018. p. 52-68.

IKEDA, T. Pedagogical reflections on the role of modelling in mathematics instruction. In: **Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice**. Springer, Dordrecht, 2013. p. 255-275.

MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. S. **Modelagem em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

PACE, Dale K. Modeling and simulation verification and validation challenges. **Johns Hopkins APL technical digest**, v. 25, n. 2, p. 163-172, 2004.

PERRENET, J.; ZWANEVELD, B. The many faces of the mathematical modeling cycle. **Journal of Mathematical modelling and Application**, v. 1, n. 6, p. 3-21, 2012.



PINTO, T. F.; ARAÚJO, J. Um estudo sobre planos de atividades de modelagem matemática. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 12, n. 2, p. 1-25, 2021.

SAEKI, A.; KANEKO, M.; SAITO, D. Estudo de caso de formação inicial de professores para modelagem matemática e aplicações conectando pinturas com matemática. In: **Modelagem Matemática e Aplicações**. Springer, Cham, 2017. p. 313-323.

THACKER, B. H. et al. The role of nondeterminism in model verification and validation. **International Journal of Materials and Product Technology**, v. 25, n. 1-3, p. 144-163, 2006.

TWOMEY, J. M.; SMITH, A. E. Validation and verification. **Artificial neural networks for civil engineers: Fundamentals and applications**, p. 44-64, 1997.

VIANA, E.; VERTUAN, R. Modelagem Matemática e Criatividade: algumas confluências. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 12, n. 2, p. 1-23, 1 mar. 2021.