



União da Vitória - Paraná

IX EPMEM

Encontro Paranaense de Modelagem na
Educação Matemática

Informações sobre as Autoras:

Élida Maiara Velozo de Castro

Universidade Estadual de Londrina (UEL)
elidamaiara.vc@gmail.com

Rosângela Maria Kowalek

Universidade Estadual de Londrina (UEL)
rosangelakowalek1@gmail.com

Joice Caroline Sander Pierobon Gomes

Universidade Estadual de Londrina (UEL)
joicepierobon@hotmail.com

Kassiana Schmidt Surjus

Universidade Estadual de Londrina (UEL)
email.kaka@gmail.com

Lourdes Maria Werle de Almeida

Universidade Estadual de Londrina (UEL)
lourdes.maria@sercomtel.com.br

Conceitos de Geometria emergentes na Fase Resolução em uma Atividade de Modelagem Matemática

Resumo

No presente estudo, temos como objetivo destacar a emergência de conceitos de geometria na fase resolução em uma atividade de modelagem matemática. A atividade foi desenvolvida por cinco pessoas, no contexto da disciplina de Modelagem Matemática na Educação Matemática. Sendo assim, o estudo segue orientações da abordagem qualitativa, pois buscamos compreender a luz do referencial teórico adotado, elementos característicos da fase resolução. Os resultados apontam que embora as fases pareçam interligadas em uma atividade de modelagem, a fase resolução pode ser decisiva tanto para obter um modelo que responda a situação inicial identificada, como para a mobilização e construção de conhecimentos de geometria. Inferimos ainda que no contexto em estudo, a atividade desenvolvida proporcionou a utilização de conceitos como teorema de Pitágoras, escala, segmento de reta, projeção, perspectiva e posição relativa entre retas. Concluímos, ainda, que a modelagem proporciona associar diferentes conceitos de geometria entre si e deles com situações da realidade.

Palavras-chave: Hipóteses. Modelagem Matemática. Estratégias Metacognitivas.

Abstract

In the present study, we aim to highlight the emergence of geometry concepts in the resolution phase in a mathematical modeling activity. The activity was developed by five people, in the context of Mathematics Modeling in Mathematics Education. Therefore, the study follows qualitative approach guidelines, as we seek to understand the light of the adopted theoretical framework, characteristic elements of the resolution phase. The results indicate that although the phases seem interconnected in a modeling activity, the resolution phase can be decisive both to obtain a model that responds to the initial situation identified, and for the mobilization and construction of geometry knowledge. We also infer that in the context under study, the activity developed provided the use of concepts such as the Pythagorean theorem, scale, line segment, projection, perspective and relative position between lines. We also concluded that the modeling allows associating different concepts of geometry with each other and with reality situations.

Keywords: Hypotheses. Mathematical Modeling. Metacognitive Strategies.

Realização:





Introdução

As necessidades dos povos antigos, como a demarcação de terras, construção de habitações, lugares para armazenamento de alimentos, eram algumas das situações- problema do dia a dia que motivaram o desenvolvimento da geometria. Nas construções humanas e na natureza vemos diversos elementos da geometria presentes de forma concreta. Entretanto, muitas vezes, essa relação entre Geometria e realidade, não é abordada explicitamente em sala de aula. Isso porque, a introdução de conceitos que historicamente levaram séculos para serem desenvolvidos e formalizados, pode apresentar-se como um desafio ao professor. Segundo Almeida e Brito (2005, p. 1):

uma dificuldade comumente enfrentada por professores de matemática, consiste em tornar compreensíveis conceitos que foram sendo construídos ao longo de muitos anos e cuja sistematização atual os distancia da linguagem empregada pela maioria das pessoas em seu cotidiano.

A aproximação entre situações da realidade e a matemática pode ser facilitada por meio de atividades de modelagem matemática, de modo particular, conceitos de geometria. Conforme apontam Brito e Almeida (2021), as práticas de modelagem matemática podem se constituir como um conjunto de condições para a aprendizagem de tais conceitos. Entretanto, conforme aponta Omodei (2021), para que o professor esteja apto a trabalhar com atividades de modelagem matemática em sala de aula, a formação que ele recebe deve capacitá-lo tanto teoricamente quanto para a prática. Daí o indicativo de que a formação do professor para a modelagem matemática deve considerar "aprender sobre a Modelagem Matemática; aprender por meio da Modelagem Matemática; ensinar usando Modelagem Matemática" (DIAS, 2005, p. 46).

O presente estudo apresenta uma atividade desenvolvida por um grupo de cinco pessoas (professores atuantes, futuros professores e pesquisadores), no contexto da disciplina de Modelagem Matemática em um Programa de Pós Graduação. A atividade surgiu como proposta para que os alunos vivenciassem o desenvolvimento de uma atividade de modelagem, integrando a prática a aspectos teóricos estudados. O propósito principal da atividade consistiu em proporcionar aos envolvidos com a atividade vivenciar a condição de "aprender por meio" articulando suas discussões e reflexões à aspectos relativos ao "aprender sobre a Modelagem Matemática". Assim, sob a óptica de uma abordagem qualitativa, conforme Bogdan e Blinks (1994), as discussões, reflexões e materiais produzidos pelo grupo constituem os dados que são analisados e fundamentam o presente estudo.



O tema da atividade, sugerido pela professora da disciplina, foi “A altura da catedral de Londrina”. A situação que deu origem à problemática foi uma fotografia do edifício religioso, motivado ainda pela indagação: determinar a altura de um objeto é um problema? O trabalho do grupo consistiu em realizar a seleção de informações, definição de hipótese e simplificações, aplicação de métodos, técnicas e representações matemáticas para responder à questão assumida na situação inicial.

Esses aspectos, de certa forma, parecem associados ao que Almeida, Silva e Vertuan (2012) denominam de fase de matematização e fase de resolução de uma atividade de modelagem matemática e é sobre esta última que debruçamos nossas análises. Embora esses autores apresentem quatro fases para a resolução de uma atividade de modelagem, e que tais fases sejam interdependentes e estejam, muitas vezes, interligadas, acreditamos ser na fase resolução que os conceitos de geometria emergem e ganham significado e a resposta para a situação problema é evidenciada.

Portanto, neste estudo, temos como objetivo analisar conceitos de geometria que emergem na fase resolução em uma atividade de modelagem matemática, no contexto do “aprender fazendo”. Para tanto, organizamos nossas reflexões em seções, quais sejam: *As fases de uma atividade de modelagem matemática; A fase resolução em uma atividade de modelagem matemática, A geometria em atividades de modelagem matemática, Descrição e análise de uma atividade, Considerações Finais.*

As fases de uma atividade de modelagem matemática

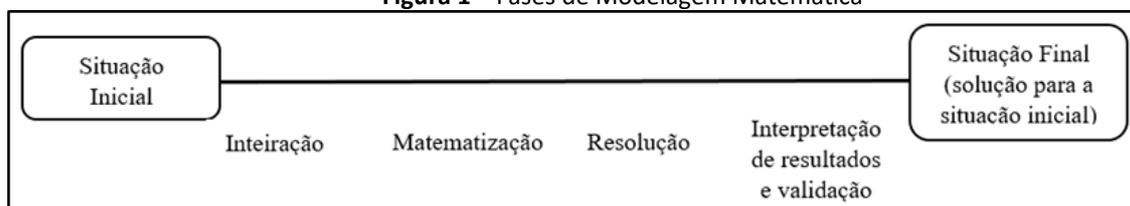
A modelagem matemática na literatura do âmbito da Educação Matemática possui diferentes compreensões e concepções estabelecidas pelos pesquisadores da área, no entanto todas convergem para o entendimento de que atividades de modelagem matemática preconizam a investigação envolvendo a transição entre a realidade e a matemática, bem como, o protagonismo do aluno na sala de aula (VIANA; VERTUAN, 2021).

Diante disso, assumimos no nosso estudo o entendimento da modelagem matemática como “uma alternativa pedagógica que aborda, por meio da matemática, um problema não essencialmente matemático” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN 2012, p. 9). Compreendendo que atividades de modelagem matemática possibilitam, portanto, que os alunos se envolvam com um

conjunto de atitudes, mediante o qual se define estratégias de ação em relação ao problema identificado na situação inicial.

Para Almeida, Silva e Vertuan (2012) uma atividade de Modelagem Matemática pode ser concebida a partir de um conjunto de procedimentos que visam apresentar para uma situação inicial e problemática, uma solução matemática, definida como situação final. Assim, no decorrer da transição da situação inicial para a situação final, diversos processos são empreendidos pelos estudantes, caracterizando as denominadas fases da Modelagem.

Figura 1 – Fases de Modelagem Matemática



Fonte: Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 15)

A primeira fase é a interação, que tem por finalidade que os estudantes busquem informar-se, tornar-se ciente e tomar conhecimento a respeito da situação. A fase de matematização consiste em uma descrição matemática do problema, requer a seleção de variáveis, o levantamento de hipóteses e o encaminhamento da elaboração do modelo matemático, levando em consideração aspectos relevantes da situação inicial. A etapa de resolução consiste na elaboração de um modelo matemático com o objetivo de descrever e analisar aspectos da situação, responder às questões e à problemática admitida na situação inicial. A fase interpretação dos resultados e validação caracteriza-se por considerar os procedimentos matemáticos e a resposta obtida no sentido de analisar se são adequados. É também nessa fase que se analisa o processo de construção de modelos e se valida o(s) resultado(s) para o problema, para, posteriormente, avaliar a resposta quanto a sua validade e importância (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012).

Segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012), as fases da modelagem matemática são definidas na intenção de amparar e orientar o desenvolvimento de atividades dessa natureza em sala de aula, tendo um caráter flexível. Assim, a ordem em que são descritas as fases podem variar, bem como o tempo destinado a cada uma delas, de acordo com a dinâmica que demanda cada situação a ser investigada. A ordem em que as fases aparecem/acontecem pode variar, assim como o tempo destinado a cada uma delas, devido ao movimento de “ida e vinda” que demanda cada atividade,



sendo assim as fases da Modelagem Matemática são caracterizadas na intenção de amparar e orientar o desenvolvimento de atividades dessa natureza.

A fase de resolução em uma atividade de modelagem matemática

Embora neste artigo tomamos como referência as fases da Modelagem Matemática segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012) reconhecemos que existem diferentes concepções sobre a Modelagem Matemática na Educação Matemática e cada uma dessas concepções orienta de maneiras distintas quanto a condução de atividades nesse contexto. Alguns autores propõem a realização seguindo “etapas” (BASSANEZI, 2002), outros seguindo “ações” em um ciclo de modelagem (BORROMEO FERRI, 2006; BLUM Leiß, 2005). O fato é que, notamos que alguns elementos são comuns às distintas estruturas apresentadas, como é o caso da fase/etapa/ação *resolução*.

Enquanto “fase” ela é descrita por Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 16) como uma fase que

consiste na construção de um modelo matemático com a finalidade de descrever a situação, permitir a análise dos aspectos relevantes da situação, responder às perguntas formuladas sobre o problema a ser investigado na situação e até mesmo, em alguns casos, viabilizar a realização de previsões para o problema em estudo.

Nesse mesmo contexto, Vertuan (2013, p. 35) afirma que é

nessa fase o sujeito utiliza conceitos, técnicas, métodos e representações matemáticas, põe em uso seus conhecimentos prévios, busca padrões, recorre a ferramentas computacionais, coordena diferentes representações dos objetos matemáticos, busca conhecer conceitos novos e ressignifica os já conhecidos [...].

Para Bassanezi (2002), a *resolução* é a terceira etapa da Modelagem e está diretamente associada ao modelo matemático, em seu estudo analítico e numérico, na abstração, e a possibilidade de novas técnicas e conhecimentos matemáticos. De acordo com o autor,

A resolução de um modelo está sempre vinculada ao grau de complexidade empregado em sua formulação e muitas vezes só pode ser viabilizada através de métodos computacionais, dando uma solução numérica aproximada. De qualquer forma, os métodos computacionais podem oferecer pistas e sugestões para posteriores soluções analíticas. A modelagem pode vir a ser o fator responsável para o desenvolvimento de novas técnicas e teorias matemáticas quando os argumentos conhecidos não são eficientes para fornecer soluções dos modelos – nisto consiste a riqueza do uso da modelagem, em se tratando de pesquisa no campo próprio da Matemática. A resolução de modelos é uma atividade própria do matemático, podendo ser completamente desvinculada da realidade modelada (BASSANEZI, 2002, p. 27).



Já Blum e LeïB (2005) denominam, o que entendemos por *resolução*, como trabalho matemático, no qual é indicado resolver o modelo usando as ferramentas da matemática. Ou seja, trabalhar matematicamente com o problema a partir do modelo, fazendo análises matemáticas e determinar conhecimentos matemáticos para responder a situação. Isso, deverá acarretar na aquisição de resultados matemáticos para o problema de estudo.

De modo geral, mesmo nas diferentes concepções ou denominações adotadas, a fase *resolução* associa-se ao modelo matemático. Ou seja, entendem que a fase *resolução* apoia-se na investigação matemática para a obtenção de um *modelo matemático* que descreva ou faça previsões sobre a questão abordada.

Almeida, Silva e Vertuan (2012) definem modelo como “prever o comportamento de um fenômeno, ser demonstrativo de algo (como uma maquete), ter um fim pedagógico (auxiliar na ilustração de um conceito), ser descritivo de algo, entre outras coisas” (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2012, p. 13). Segundo os autores, o modelo pode ser uma tabela, um quadro, uma figura, uma maquete, uma função.

Cabe ressaltar que o modelo é sempre uma aproximação conveniente da realidade, entretanto, conforme aponta Veronez (2013), a elaboração de modelos matemáticos não tem um fim em si mesma, mas conduz a busca por uma solução para o problema evidenciado na situação inicial, alicerçada por atitudes interpretativas. Diante disso, compreendemos que se uma das características da *resolução* é a construção, obtenção ou uso do modelo e que ele traz com eles todas essas particularidades, pautamos nossos estudos nas características da fase *resolução* e em aspectos decorrentes dessa fase no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática.

A Geometria em modelagem matemática

Em muitas situações do cotidiano se faz necessária a capacidade de pensar geometricamente. Saber ler e interpretar um gráfico, um mapa ou uma planta de uma casa, compreender as instruções para localizar um determinado endereço, são exemplos de situações que exigem uma percepção do espaço onde o indivíduo está inserido. Por ser considerada uma ferramenta muito importante para a descrição e inter-relação do homem com o espaço em que vive, pode ser considerada como a parte da matemática mais intuitiva, concreta e próxima a realidade (BRITO, 2018).



Neste sentido, podemos considerar que a Geometria desempenha um papel fundamental no processo de ensino e aprendizagem, ao passo que favorece ao aluno desenvolver o pensamento para compreender, descrever e representar de forma organizada o mundo em que vive, favorecendo o desenvolvimento das habilidades criativas e de percepção espacial.

Quando olhamos para pesquisas que articulam modelagem matemática e geometria, destaca-se o estudo de Brito (2018), que apresenta uma investigação segundo a perspectiva fenomenológica de como os estudantes aprendem geometria em práticas de modelagem matemática e o trabalho de Zapata-Grajales, Cano-Velásquez e Villa-Ochoa (2017), que também investigaram práticas de modelagem com geometria ao explorarem o crescimento de uma planta e a distribuição das folhas ao longo do tempo. Esse estudo mostra que, ao realizar projetos de modelagem alicerçados no estudo das formas e das grandezas geométricas, os estudantes construíram o significado de conceitos geométricos.

Em outro estudo, Zukauskas (2012) apresenta os resultados de uma pesquisa que analisa a motivação dos estudantes em aprender conteúdos de geometria a partir da atividade de construção de embalagens, realizada com estudantes do Ensino Fundamental. Este estudo concluiu que “a atividade desenvolvida extraclasse favoreceu a aprendizagem de conteúdos de geometria, assim como possibilitou que fossem identificados momentos de motivação e de desmotivação dos estudantes durante a sua aplicação” (Zukauskas, 2012, p. 5).

Deste modo, assim como destacam Brito e Almeida (2021), pensar as práticas de modelagem como um conjunto de condições para a aprendizagem da geometria exige considerar a dicotomia que existe entre aprender a demonstrar teoremas geométricos e aprender a construir modelos geométricos. Aprender a demonstrar, por exemplo, o teorema de Pitágoras e saber justificar a validade dessa demonstração é uma prática que, do ponto de vista epistemológico, difere radicalmente de uma prática em que esse teorema é utilizado para construir um modelo geométrico para uma situação real.

Discussão de resultados

Na presente seção, apresentamos a atividade de modelagem matemática desenvolvida pelo grupo, também autores deste artigo, buscando elucidar momentos em que aspectos da fase *resolução* foram evidenciados. Embora reconheçamos e, até mesmo, descrevemos aspectos

referentes à outras fases, optamos por não identificá-los, trataremos assim apenas da *resolução*, foco deste trabalho.

A atividade analisada foi desenvolvida por cinco alunos, em um Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, localizado em uma cidade do norte do Paraná, na disciplina de Modelagem Matemática, ministrada por uma das autoras do presente texto, no primeiro semestre letivo de 2022. Considerando as limitações decorrentes da pandemia do Covid-19 para a realização de aulas presenciais, a atividade foi desenvolvida de modo remoto e os encontros aconteceram em reuniões realizadas via *Google Meet*.

Do grupo composto por cinco alunos, três já haviam desenvolvido atividades de Modelagem e outros dois alunos estavam vivenciando essa experiência pela primeira vez. O objetivo da atividade consistia tanto em desenvolver/vivenciar uma atividade de modelagem matemática, quanto relacionar tal prática a aspectos teóricos estudados na disciplina.

Após a apresentação e discussão sobre o que é modelagem matemática e quais concepções podem ser encontradas na literatura nacional e internacional, foi solicitado pela professora que o grupo trabalhasse com a situação-problema sobre a altura da catedral de Londrina. Para isso foi encaminhado aos alunos um arquivo (Figura 2) que continha informações dos engenheiros que projetaram a catedral, bem como imagens da referida igreja. O problema já estava definido e consistia em determinar: *Qual é a altura da catedral de Londrina?*

Figura 2 - Situação problema que originou a atividade de modelagem

<p>O caso da Catedral da cidade de Londrina – Paraná</p> <p>A Catedral de Londrina, alicerçada em pedra e cimento e estruturada no aço, no ferro e no alumínio, é um verdadeiro monumento de arte e de fé. Moderna e majestosa, seu projeto é de autoria dos arquitetos Edoardo Rosso e Yoshimasa Kimach.</p> <p><i>Qual é a altura da catedral?</i></p>	<p>A altura corresponde à distância informada na linha vermelha</p>  <p>Fonte: Leila Maeda Fotografia¹.</p>	 <p>Uma informação</p>
--	---	--

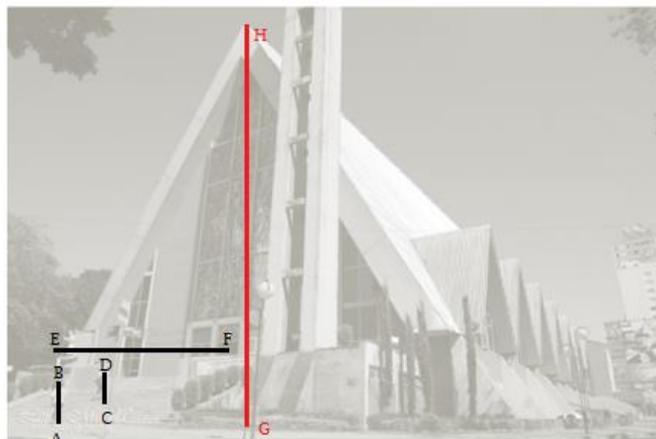
Fonte: relatório dos alunos

¹ Leila Maeda Fotografia. Disponível em <http://vidadeumafotografa.blogspot.com/2010/11/um-passeio-por-londrina.html>. Acesso 09/06/2022.

Os alunos passaram a se inteirar da situação, analisando a fotografia. Como a imagem não estava sob o ponto de vista frontal, os alunos optaram por coletar outras imagens que pudessem oferecer uma “melhor” visualização. Porém um dos integrantes do grupo destacou que era importante analisar a fotografia fornecida pela professora bem como o recorte dela, no qual estavam representadas duas pessoas (uma mulher e um menino) que poderiam ser utilizadas como informação para resolução do problema.

O grupo resolveu o problema de duas maneiras distintas. Numa primeira abordagem, com nenhuma informação além da imagem em perspectiva que foi fornecida, os alunos realizaram algumas marcações na fotografia que deu origem à situação problema, conforme Figura 3. Tais marcações representam, em relação à situação real, a altura da mulher, a altura do menino, a altura da igreja e a distância da mulher até a igreja. Para isso, traçaram segmentos de reta.

Figura 3 - Sinalização das alturas dos objetos na imagem por meio de segmentos de reta



Fonte: relatório dos alunos.

A opção por traçar segmentos de reta denota o uso de *técnicas matemáticas*, característica referente à fase *resolução*. Essa técnica utilizada favoreceu a definição e organização das informações matemáticas da situação, as quais encontram-se expressas no Quadro 1.

Quadro 1 - Informações acerca da escala utilizada pelos alunos

- Mulher: segmento de reta $AB = 1\text{cm}$ na imagem;
- Rapaz: segmento de reta $CD = 0,8\text{ cm}$ na imagem;
- Distância da mulher até a catedral: segmento de reta $EF = 4\text{cm}$ na imagem;
- Catedral: segmento de reta $GH = 10,3\text{ cm}$ na imagem;
- Os segmento de reta AB, CD e GH são paralelas entre si
- O segmento de reta EF é perpendicular aos demais segmentos

Fonte: relatório dos alunos.



Além de segmento de reta, outro conceito que emerge como informação, a partir das marcações realizadas, é a noção de paralelas e perpendiculares, ou seja, denota que os alunos recorrem ao conceito de posição relativa entre retas. As possíveis posições relativas utilizadas na resolução da atividade foram paralelas e concorrentes.

Desse modo, é possível notar aspectos relativos à fase *resolução* no tocante ao uso de *conceitos matemáticos*, mais especificamente geométricos. Entender ou recorrer a esses conceitos possibilita a definição de hipótese e simplificações, conforme ilustra o Quadro 2.

Quadro 2 - Hipóteses e simplificações assumidas pelos alunos

Hipóteses	Simplificações
H ₁ : a altura real da mulher é igual a altura real do menino, ambos têm 1,70 m de altura; H ₂ : a mulher está exatamente no ponto médio da largura da igreja; H ₃ : o menino percorreu $\frac{1}{4}$ da distância entre a mulher e a igreja.	S ₁ : a escala utilizada será de 1:170 cm S ₂ : a redução da projeção será de 20% por cm partindo da mulher até chegar no ponto central da porta principal da igreja.

Fonte: relatório dos alunos.

Para definir as hipóteses e simplificações descritas no Quadro 3, os alunos recorrem às marcações realizadas na figura, usando a noção de escala. Embora a noção de escala esteja associada à razão entre grandezas, ela também pode ser definida em termos de geometria.

Da hipótese H₃, que diz que o menino percorreu $\frac{1}{4}$ da distância entre a mulher e a igreja, decorre a simplificação S₂, assumida como a redução da projeção será de 20% por cm partindo da mulher até chegar no ponto central da porta principal da igreja. Isso porque, se o menino que tem a mesma altura da mulher na situação real, ambos estão a uma distância de 1 cm, e na imagem em escala, a altura do menino é 20% menor que a da mulher, logo, a inferência do grupo é de que a cada 1 cm de profundidade na imagem, haverá uma redução de 20% devido à noção de projeção, conforme ilustra Tabela 1.

Tabela 1 - Valores referentes à redução da escala considerando a perspectiva da foto

	Altura real (cm)	Escala (cm)
Menino	170	0,8
Mulher	170	1
Razão	1	8/10
Redução	0	2/10

Fonte: relatório dos alunos.

Os *conceitos e procedimentos matemáticos* adotados neste instante pelos alunos, são características relativas à fase *resolução*. O conceito de projeção, por exemplo, foi pensado pelos alunos, pois, tanto o menino quanto a igreja estão mais “ao fundo” do que a mulher na imagem, ou

seja, a foto foi tirada em perspectiva, logo, resolver por semelhança de triângulos não seria suficiente. Assim, essa compreensão de projeção, denota que conceitos de geometria descritiva foram utilizados na fase *resolução*.

Os encaminhamentos assumidos pelos alunos, conduzem, então, a resposta matemática para a situação. Da simplificação S_2 , sabendo que distância da mulher até a igreja é de 4 cm na escala e considerando que cada 1 cm infere uma redução de 20% devido à projeção, da mulher até a igreja teremos uma redução de 80%. Assim, caso a igreja fosse colocada exatamente ao lado da mulher, ou seja, trazida à frente, seu tamanho na imagem (sua escala) teria medida igual a 18,54 cm, conforme ilustram os cálculos apresentados na Tabela 2.

Tabela 2: Valores referentes à altura da igreja na escala

	Altura real	Escala	Projeção
Altura da igreja	x	10,3	$10,3+(10,3 \cdot 0,8)=18,54$
Altura da mulher	170	1	1

Fonte: elaborado pelos alunos.

Considerando a medida em perspectiva na imagem, os alunos passaram a calcular a altura real a partir das escalas definidas. Para isso, desenvolvem seus cálculos usando grandezas diretamente proporcionais, temos:

$$x = 18,54 \cdot 170$$
$$x = 3151,8 \text{ cm ou } \cong 31,51 \text{ m}$$

Os cálculos realizados indicam que a altura da Catedral de Londrina (Figura 1) é de aproximadamente 31 m. Assim, os conceitos (projeção, redução, escala), os procedimentos matemáticos (calcular, medir, organizar tabelas) e a resposta para a situação (31,51 metros de altura) indicam elementos característicos à fase *resolução* foram utilizados pelos alunos de forma simultânea.

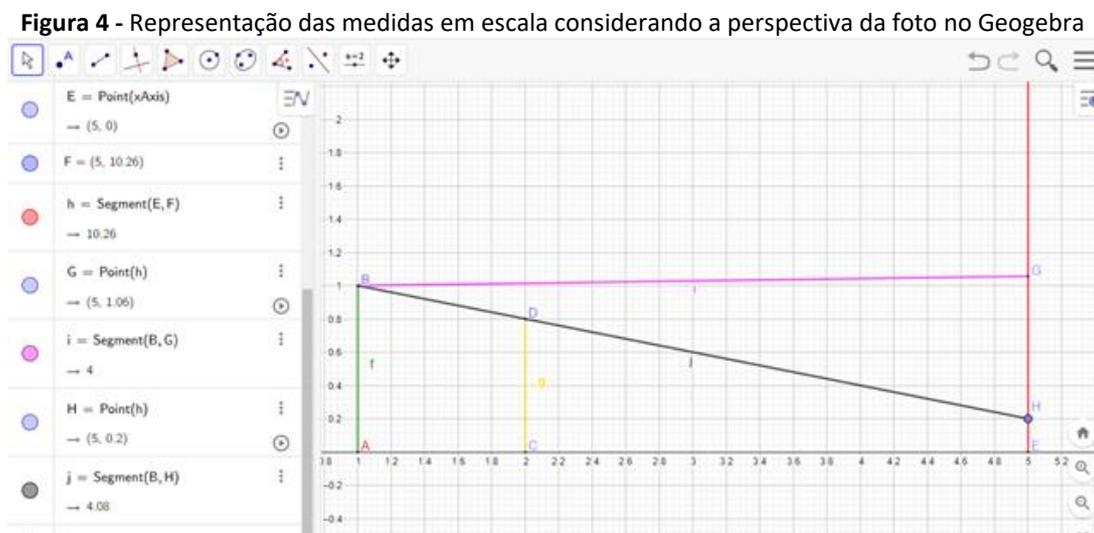
Na segunda abordagem, os alunos buscam fundamentar a resolução anteriormente apresentada, de forma a obter um resultado mais exato e preciso. Para isso, recorrem ao *software* Geogebra. Esse *software* permite manipular, de forma dinâmica, conceitos de geometria. Isso indica características da fase *resolução* relativamente à *recorrência a ferramentas tecnológicas e computacionais*.

Para determinar a altura da Catedral a partir da imagem, traçaram um segmento de reta que une os pontos - pés da mulher até o topo da igreja, obtendo (em escala) a medida de 11 cm. Sendo

o segmento perpendicular da mulher até a igreja de 4 cm (H_3), os alunos recorrem ao teorema de Pitágoras, verificando que a altura é de 10,26 cm,

Assim, é possível notar que outro conceito de geometria foi utilizado na resolução da atividade, o Teorema de Pitágoras. Ou seja, o uso de *conceito matemático* denota que os alunos se envolveram com a fase *resolução* neste momento.

Plotando todas as escalas das alturas no Geogebra, de acordo com as informações presentes no Quadro 2. Traçando uma reta que sai de B (altura da mulher) e passa por D (altura do menino), essa reta chega em H de coordenadas (5, 0,2), ou seja, uma redução de 80% como os alunos haviam suposto inicialmente, conforme ilustra Figura 4.



Fonte: relatório dos alunos.

Procedendo de forma análoga a primeira resolução, os alunos desenvolvem os cálculos:

$$10,26+(10,260,8)=10,26+8,208=18,468$$

$$18,468170=31,3965 \text{ m}$$

Logo, a medida da altura da catedral é de aproximadamente 31,40 m. Assim, a resolução apresentada usando o Geogebra, se aproxima do resultado inicial. Tanto o Geogebra utilizado como *recurso tecnológico digital*, quanto a obtenção da *resposta para a situação*, denotam aspectos da fase *resolução*.

Ainda característico à fase *resolução* os alunos realizam a generalização do modelo, conforme Figura 5.

Figura 5 – Generalização do modelo matemático

Generalização do modelo (para qualquer escala usada na fotografia em questão):

$$\frac{x}{m} = \frac{y + (0,8y)}{C}$$

$$C = \frac{1,8 \cdot m \cdot y}{x}$$

C = altura real da catedral
 m = altura real da mulher
 y = escala da altura da catedral
 x = escala da altura da mulher

Fonte: relatório dos alunos.

Para a validação dos resultados, os alunos buscam informações sobre a altura real e com a obtenção de um valor de 32,5 m conforme Moraes (2019).

Quadro 3 - Informações da Catedral Metropolitana de Londrina (1968-1972)

De acordo com Castelnou (2002, p. 82-84) a nova catedral, construída em aço e concreto, apresenta ênfase estrutural e linguagem arquitetônica similar às tendências do período, tendo altura de 32,5 m e largura de 35 m. O autor ressalta que a edificação “possui forma triangular, que significa a Santíssima Trindade, revelando grande força expressiva, embora nem sempre de agrado universal”. Já Probst (1998) afirma que o projeto foi orientado pela figura do tabernáculo que primitivamente tinha o formato de uma tenda, com base retangular e estacas de fixação próximo ao solo.

Fonte: Moraes (2019)

Considerando as medidas encontradas tanto na resolução 1, quanto na resolução 2, os alunos verificaram que a taxa de erro com relação à altura real da catedral de Londrina foi de aproximadamente 3 e 3,4%. Logo as resoluções encontradas foram consideradas satisfatórias, inferindo que é possível utilizar fotografias para estimar medidas reais e evidenciar conceitos de geometria. A recorrência ao cálculo da taxa de erro, sinaliza que, novamente, para complementar a validação, os alunos precisam recorrer a *conceitos matemáticos*, ou seja, retornam à fase *resolução*.

Considerações Finais

Neste artigo buscamos contribuir para uma reflexão sobre aspectos da fase resolução em uma atividade de modelagem matemática. A experiência vivenciada pelos membros do grupo de pesquisa (professores e futuros professores) teve fundamental importância para que os mesmos pudessem traçar paralelos entre teoria sobre a fase resolução e a prática dela, vivenciando o que Dias (2005) estabelece como condição de “aprender por meio da Modelagem Matemática”.

Durante o decorrer da atividade, embora a problemática (altura da catedral de Londrina) já estivesse definida, os integrantes do grupo tinham autonomia para assumir encaminhamentos e



desenvolver a resolução matemática, que foi onde emergiram os conceitos de geometria. Daí nosso interesse em olhar para a fase resolução, por acreditar que ela pode ser fonte para discussões acerca de como atividades de modelagem matemática podem elicitar conceitos de geometria.

A atividade de modelagem matemática descrita e analisada, se deu a partir da problematização inferida por uma fotografia/imagem, que proporcionou uma investigação matemática acerca de uma situação real. Nessa atividade denota-se que mais de um conceito de geometria foi evidenciado (Teorema de Pitágoras, Escala, Segmento de reta, Projeção, Perspectiva, Posição relativa entre retas) para resolver o problema da realidade.

Assim, se por um lado conhecimentos de geometria, que aparecem interligados e contextualizados e, juntos, são significativos para a resolução matemática do problema que deu origem à atividade de modelagem. Por outro lado, uma atividade de modelagem matemática pode fomentar conceitos geométricos diversos, emergentes na fase resolução.

Ainda, é na fase resolução que os conceitos de segmento de reta e posição relativa entre retas, por exemplo, contribuíram para a organização e visualização dos dados assumidos para a resolução de um problema. Nessa fase também, os conceitos como escala, projeção e teorema de Pitágoras foram relevantes para resolver a situação-problema, possibilitando o resultado em torno de 31 metros de altura.

O desenvolvimento apresentado pelos alunos permite considerar que, conceitos de geometria surgiram devido aos encaminhamentos iniciais dado a atividade, como no tratamento dos dados referentes à situação-problema proposta, assim como na forma como os encaminhamentos assumidos para lidar com a noção de perspectiva da imagem e a ideia de projeção. Outros olhares sobre a mesma situação-problema poderiam conduzir a conceitos distintos dos relatados.

Os resultados indicam que atividades de modelagem podem potencializar a aprendizagem no ensino de Geometria, em particular, ao passo que possibilita ao envolvido reconhecer propriedades, discutir sobre características geométricas percebidas, investigar e comprovar suas afirmações. Concluímos, ainda, que a modelagem proporciona associar conceitos de geometria a situações da realidade. Por fim, esta experiência pode servir como sugestão de atividade ao passo que ela justifica a resolução na Modelagem Matemática, elencando reflexões acerca de conteúdo que aborda, modelo que evidencia, ferramentas que utiliza, respostas ou soluções à situação



problema propostas e sinaliza possibilidades de adaptações da problemática para futuros trabalhos em sala de aula.

Referências

ALMEIDA, L. M. W.; BRITO, D. S. **Atividades de modelagem matemática**: que sentido os alunos podem lhe atribuir? *Ciência & Educação* (Bauru). v.11, n.3, p. 483-498, 2005.

ALMEIDA, L. W. de; SILVA, Karina Pessoa da; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. 1. ed. SP: Contexto, 2012.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Contexto, 2002

BLUM, W.; LEIß, D. "Filling Up" – the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. **Paper for the CERME4**, 2005, WG 13 Modelling and Applications, p. 1623-1633.

BOGDAN, C.; BLINKEN, R.E. **Investigação qualitativa em educação** – Uma introdução à teoria e aos métodos. Porto Editora: Coleção Ciências da Educação, 1994.

BORROMEIO FERRI, R. **Theoretical and empirical differentiations of phases in the modeling process**. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, v. 38, n. 2, p. 86-95, 2006.

BRITO, D. S; ALMEIDA, M. W. **Práticas de Modelagem matemática e as dimensões da aprendizagem da geometria**. *Actualidades investigativas em Educación*, V. 21. n, 1. P.169-198, 2021.

BRITO, D. S. **Aprender Geometria em Práticas de Modelagem Matemática**: Uma Compreensão Fenomenológica. 2018. Número total de folhas. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

DIAS, M. R. **Uma Experiência com Modelagem Matemática na Formação Continuada de Professores**. 2005. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina.

MORAES, R. R. **Catedral metropolitana de Londrina**: a arquitetura religiosa de Eduardo Rosso e Yoshimasa Kimachi. 2019. 247p. Dissertação de Mestrado (Arquitetura e urbanismo) – Universidade Estadual de Londrina, UEL, Londrina, 2013.

OMODEI, L. B. C. **Autenticidade em Atividades de Modelagem Matemática**: da Aprendizagem para o Ensino em um Curso de Formação de Professores. 2021. 189 f. Tese de Doutorado (Pós Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2021.

VERONEZ, M. R. D. **As funções dos signos em atividades de Modelagem Matemática**. Tese (Doutorado) – Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.



VERTUAN, R. E. **Práticas de Monitoramento Cognitivo em Atividades de Modelagem Matemática**. 2013. 247p. Tese de Doutorado (Pós Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, UEL, Londrina, 2013.

VIANA, E.; VERTUAN, R. Modelagem Matemática e Criatividade: algumas confluências. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 12, n. 2, p. 1-23, 1 mar. 2021.

ZAPATA-GRAJALES, F., CANO-VELÁSQUEZ, N. A; VILLA-OCHOA, J. A. **Art and geometry of plants: Experience in mathematical modelling through projects**. Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14(2), 585-603. 2017.

ZUKAUSKAS, N. S. T. **Modelação matemática no ensino fundamental: motivação dos estudantes em aprender geometria** (Dissertação Mestrado em Ciências e Matemática). Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil 2012.