IX EPMEM
Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática
União da Vitória – Paraná

Sobre o Papel da Modelagem na Aprendizagem da Matemática: uma interpretação pautada numa perspectiva wittgensteiniana

Informações sobre os Autores:

Emerson Tortola
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) – Campus Toledo
emersontortola@utfpr.edu.br

Jeferson Takeo Padoan Seki
Universidade Estadual de Londrina (UEL)
jefersontakeopadoanseki@hotmail.com

Lourdes Maria Werle de Almeida
Universidade Estadual de Londrina (UEL)
lourdes@uel.br

Resumo

Este artigo consiste em um ensaio que visa debater o papel da modelagem na aprendizagem matemática. Pauta-se em assertivas de que a modelagem proporciona, por um lado, o desenvolvimento de competências matemáticas, por viabilizar o uso de sistemas simbólicos e formais, e, por outro, a leitura de situações da realidade, através da matematização. Nesse sentido, lança um olhar terapêutico sobre os usos de duas atividades de modelagem, uma desenvolvida no Ensino Fundamental e outra no Ensino Superior, tendo como base uma perspectiva wittgensteiniana. A análise, de caráter qualitativo, evidencia os encaminhamentos dados pelos professores e os caminhos seguidos pelos alunos, contemplando as discussões empreendidas e os registros escritos produzidos. Os resultados sinalizam para a necessidade de dissolver a dicotomia formalismo – utilitarismo, evitando-se a adoção de posições dogmáticas quanto ao uso da modelagem na sala de aula.

Palavras-chave: Educação Matemática. Linguagem. Sala de Aula.

Abstract

This paper consists of an essay that aims to discuss the role of modelling in mathematical learning. It is based on assertions that modelling provides, on the one hand, the development of mathematical skills, by enabling the use of symbolic and formal systems, and, on the other hand, the reading of reality situations, through mathematization. In this sense, it takes a therapeutic look at the uses of two modelling activities, one developed in Elementary School and the other in Higher Education, based on a wittgensteinian perspective. The analysis, of a qualitative nature, evidences the directions given by the teachers and the paths followed by the students, contemplating the discussions undertaken and the written records produced. The results point to the need to dissolve the formalism – utilitarianism dichotomy, avoiding the adoption of dogmatic positions regarding the use of modelling in the classroom.

Keywords: Mathematics Education. Language. Classroom.

Introdução

A modelagem matemática tem sido apontada nas últimas décadas como uma proposta de usar a matemática para lidar com questões, situações ou fenômenos que vão além da própria matemática (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012; NISS; BLUM, 2020). Seu uso na sala de aula ou em projetos pedagógicos desenvolvidos no âmbito escolar tem sido fomentado por pesquisas e discussões que se fertilizam, sobretudo, em argumentos favoráveis à aprendizagem matemática dos alunos ou na descrição de como os alunos resolvem problemas da realidade, ou baseados nela, por meio de conteúdos matemáticos (SOUZA; BARBOSA, 2014).

Na modelagem, segundo SWAN et al. (2007, p. 2), uma forma de promover a aprendizagem da matemática é “estabelecer conexões fortes e explícitas entre o conhecimento matemático, por um lado, e os contextos nos quais esse conhecimento pode ser usado, por outro. [...] dando aos alunos a oportunidade de pensar a respeito e fazer uso de características matemáticas de seu entorno”. Nessa perspectiva, espera-se que em uma prática com modelagem os significados dos conceitos matemáticos venham revestidos também pelas características das situações em que são utilizados, assim como as situações possam ser (res)significadas por meio dos conceitos matemáticos utilizados como lente para a sua leitura (SCHRENK; VERTUAN, 2022).

O que se reconhece é que atividades de modelagem, por um lado, contribuem para o desenvolvimento de competências, que se mostram como fontes poderosas de compreensão e inserção dos alunos no uso de sistemas matemáticos simbólicos e formais (SWAN et al., 2007) e, por outro lado, viabilizam uma leitura, ainda que parcial e idiossincrática de situações da realidade com o apoio da matemática (ALMEIDA; SOUSA; TORTOLA, 2021), de modo que a matemática é utilizada para auxiliar na organização de nossas experiências com o mundo, a partir da matematização de situações de natureza empírica (SOUZA; BARBOSA, 2014; SOUSA; ALMEIDA, 2019).

Nosso interesse neste ensaio é colocar em debate o papel da modelagem na aprendizagem matemática, trazendo à tona uma interpretação pautada na filosofia da linguagem, sob a perspectiva do segundo Wittgenstein, cujas ideias e discussões se edificam a partir do que o autor chama de “jogos de linguagem” (WITTGENSTEIN, 2012, §7), que revelam uma visão de filosofia como atividade terapêutica, cuja estabilidade dos significados, ora vista como certa, se constitui a partir de determinados usos da linguagem em certas atividades ou formas de vida[1].

O debate a respeito da aprendizagem na modelagem é recorrente – assim como sobre seus reflexos para o ensino –, e têm se intensificado nas últimas décadas, como aponta Almeida (2018). Publicações como as de Almeida e Dias (2004), Swan et al. (2007), Souza e Barbosa (2014), Niss e Blum (2020), são exemplos de pesquisas que abordam a temática. Gostaríamos de chamar atenção para duas delas em particular, que se alinham e justificam o direcionamento que optamos para esta pesquisa.

Swan et al. (2007) ilustram, a partir de algumas experiências, como a modelagem pode promover a aprendizagem da matemática desenvolvendo a linguagem matemática do aluno e o uso de suas ferramentas, bem como desenvolvendo a capacidade do aluno de fazer e responder perguntas em, com e sobre matemática. De acordo com os autores, em atividades de modelagem, os alunos lidam com estimativas, aproximações, analisam erros, desenvolvem longas cadeias de raciocínio, verificam a consistência de suas soluções, comunicam-se usando a linguagem matemática. Desse modo, "o aluno desenvolve conhecimentos matemáticos com base em um campo de conhecimento integrado. Em matemática, as conexões superam as classificações de tópicos que são introduzidas pelo currículo" (SWAN et al., 2007, p. 10).

Souza e Barbosa (2014), com o objetivo de discutir a aprendizagem matemática na modelagem, teceram uma análise teórica sob uma perspectiva wittgensteiniana e identificaram que "as experiências ou ainda as situações-problema tratadas em modelagem no contexto escolar são homogeneizadas pelo sistema matemático escolar. Ou seja, toda e qualquer experiência é especificamente vista com a ferramenta conceitual peculiar ao sistema matemático escolar" (SOUZA; BARBOSA, 2014, p. 52).

A busca por argumentos e artefatos matemáticos, típicos do sistema matemático escolar, para tratar as situações-problema em atividades de modelagem se respalda, sobretudo, na organização curricular, cuja estrutura se centraliza no ensino a partir de conteúdos (BRASIL, 1997) – atualmente a partir de habilidades (BRASIL, 2018).

[1] Wittgenstein usou a expressão forma de vida para referir-se às atividades da linguagem associadas a determinada prática e cultura, na qual governa um conjunto de regras compartilhado pelos integrantes de uma ou mais comunidades, que orienta e regula as ações simbólicas individuais ou coletivas que se realizam em um tempo-espaço determinado.

Souza e Barbosa (2014) argumentam que as primeiras implementações da modelagem já mostraram que essa organização curricular pouco favorece, ou até mesmo dificulta, o desenvolvimento de atividades de modelagem, principalmente por conta da linearidade esperada na abordagem dos conteúdos, que contrasta com a proposta da modelagem de romper com essa linearidade (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012).

Diante desse contexto que se apresenta para nós, nos questionamos: *afinal, qual é o papel da modelagem matemática na aprendizagem matemática?* Com tal questão queremos colocar em debate, a partir de um olhar terapêutico, os usos de atividades de modelagem matemática para auxiliar na aprendizagem matemática, direcionando uma crítica aos usos dogmáticos, seja por aqueles que colocam sobre um pedestal a matemática, privilegiando as discussões matemáticas a todo custo, seja por aqueles que subjugam a necessidade de formalização matemática, deixando transparecer uma ideia de que o simples fato de fazer modelagem pode acarretar aprendizagem matemática.

Para isso, trazemos para a discussão duas atividades de modelagem desenvolvidas em dois contextos educacionais distintos. A intenção, com a análise dessas atividades, é fornecer subsídios para o debate a respeito do papel da modelagem na aprendizagem matemática. Os dados que trazemos foram produzidos em aulas regulares e foram registrados a partir de gravações em áudio, vídeo, imagens e produções escritas dos alunos. Trata-se, portanto, de uma investigação de cunho qualitativo, uma vez que encaramos a natureza subjetiva da pesquisa, tendo em vista a curiosidade investigativa despertada nos pesquisadores a partir da observação de problemas revelados pela prática educacional (LÜDKE; ANDRÉ, 2014).

Modos de ver a Aprendizagem na Filosofia de Wittgenstein

A filosofia de Wittgenstein pode ser entendida como uma atividade terapêutica, cujo propósito é dissolver confusões conceituais que emergem da aplicação dogmática de conceitos, isto é, quando se privilegia um determinado uso em detrimento de outros (MORENO, 2005). Tal terapia filosófica busca esclarecer o significado das palavras por meio de uma descrição da variedade de situações de uso delas no interior de diferentes jogos de linguagem[2], caracterizados como

[2] Para Wittgenstein, um jogo de linguagem pode ser caracterizado como uma atividade linguística guiada por regras, tais como “ordenar, agir segundo as ordens, [...] fazer suposições sobre o acontecimento, [...] resolver uma tarefa de cálculo aplicado” (WITTGENSTEIN, 2012, § 23).

atividades linguísticas guiadas por regras (WITTGENSTEIN, 2012, §7, §130) e que mostram diferentes modos de ver os conceitos e ampliam nossas formas de interpretação da linguagem (MORENO, 2005).

Haja vista que a maneira como agimos ou pensamos está ancorada em determinadas certezas adquiridas no interior de jogos de linguagem, a terapia filosófica tem a finalidade de "relativizar estas certezas adquiridas [...], em que, ao mesmo tempo em que se tornam necessárias, não perdem seu caráter convencional. Em outras palavras, poderiam ser outras, em outra forma de vida" (GOTTSCHALK, 2018, p. 61). Decorre dessa finalidade que a atividade terapêutica possui um caráter arbitrário ao considerar que em diferentes formas de vida as convenções gramaticais podem ser distintas, bem como diferentes podem ser as decisões que tomamos em cada aplicação de uma regra (MORENO, 2005). Nessa concepção de filosofia, para uma grande quantidade de casos, "o significado de uma palavra é seu uso na linguagem" (WITTGENSTEIN, 2012, §130) e pode ser identificado no interior dos jogos de linguagem.

Diante da dificuldade de estabelecer limites precisos para um conceito, Wittgenstein sugere: "[...] pergunte-se sempre: como foi que aprendemos o significado desta palavra? Então você verá, facilmente, que a palavra deve ter uma família de significados" (WITTGENSTEIN, 2012, §77). Essa sugestão terapêutica é utilizada no decorrer de suas obras Investigações Filosóficas (1953) e Da Certeza (1969), nas quais o filósofo recorre à aprendizagem da linguagem para falar sobre o significado de diversos conceitos que foram objetos de atenção de sua filosofia.

Wittgenstein começa sua obra Investigações Filosóficas estabelecendo uma crítica ao modelo referencial de aprendizagem da linguagem (WITTGENSTEIN, 2012, § 1), no qual a aprendizagem é reduzida a um processo de aprender os nomes que designam os objetos. Vale salientar que Wittgenstein não nega tal modelo, apenas o condiciona para um domínio restrito da linguagem, aquele em que ocorre o uso de formas primitivas da linguagem, como empregado por crianças quando aprendem a falar, por exemplo (WITTGENSTEIN, 2012, § 5).

Ao fornecer às crianças uma definição ostensiva de uma palavra, não ensinamos com isso o seu uso. Por exemplo, a explicação da figura do rei no jogo de xadrez apontando para a peça e dizendo "Este é o rei no xadrez" apenas ensina o uso dessa peça se "o lugar já estiver preparado. E não está preparado aqui pelo fato de que a pessoa, a quem damos a explicação, já saiba as regras, mas porque, num outro sentido, ela já domina um jogo" (WITTGENSTEIN, 2012, § 31). Mas o que precisamos já saber ou dominar para que possamos aprender novos conceitos? Em outras palavras, o que torna possível aprendermos novos conceitos?

Gottschalk (2018) argumenta que a possibilidade de aprendizagem está alicerçada na cristalização de determinadas certezas inquestionáveis (proposições gramaticais) em nossas formas de vida, como “esta mão é minha”, “eu existo”, “2+2=4”. Essas certezas são adquiridas tacitamente por meio de algumas lições, “ouvindo que sou destra, que estou aprendendo a escrever (o que pressupõe que eu exista)” (GOTTSCHALK, 2018, p. 63). Há aqui a aprendizagem de determinadas técnicas de uso da linguagem, que se dá mediante a um treinamento no interior de um jogo de linguagem. Essas certezas passam a ter um papel de regras e fornecem condições de significado para as outras proposições de nossa linguagem.

Nesse sentido, no contexto escolar, precisamos realizar um trabalho de treinamento que viabilize a aquisição dessas certezas, a fim de dar subsídios à aprendizagem de tais técnicas de uso da linguagem. Trata-se então de inserir o aluno em um outro jogo de linguagem cujas regras se amparam em convenções gramaticais do âmbito escolar, que devem ser aprendidas por ele por meio de treinamento. Gottschalk (2018) exemplifica esse argumento:

> Suponhamos a situação de uma criança que aprendeu a usar a palavra “juntar” segundo determinadas regras acionadas em seu cotidiano que lhe possibilitam atribuir imediatamente sentido aos enunciados “junte as mãos para orar”, ou então, “vamos agora juntar o material da escola” etc., mas que, ao assistir uma aula de geometria se depara com a seguinte ordem: “Junte agora os pontos A e B!” Trata-se de um modo inusitado de aplicação da palavra juntar, que deve ser ensinado. Como observa Wittgenstein, introduz-se um novo aspecto: veja a junção destes pontos como o traçado de um segmento de reta que passa por eles. Evidentemente, não se trata de uma evidência para a criança de que deva assim proceder (GOTTSCHALK, 2018, p. 65).

Embora Wittgenstein não estivesse interessado em elaborar uma teoria de aprendizagem, pois ele próprio afirma: “Estou a fazer psicologia infantil? – Estou a fazer a ligação entre o conceito de ensino e o conceito de significado” (WITTGENSTEIN, 1989, § 412), entendemos que as passagens a que Wittgenstein se refere lançam luz sobre a possibilidade de aprendizagem.

Aspectos metodológicos e Contexto da Pesquisa

A presente pesquisa se caracteriza por uma abordagem qualitativa dos dados (LÜDKE; ANDRÉ, 2014), uma vez que reflete os interesses dos pesquisadores em compreender o papel da modelagem na aprendizagem matemática. Esse interesse vem pautado nas assertivas de que, embora a modelagem favoreça uma aprendizagem que transborda os limites impostos pela organização curricular, tanto em relação a um ensino de conteúdos matemáticos mais articulados (SWAN et al., 2007), quanto em relação ao próprio entendimento de educação matemática (CALDEIRA, 2009), vemos em prática, predominantemente, uma modelagem que busca se ajustar a uma estrutura baseada em conteúdos, na qual tem hegemonia o sistema matemático escolar (SOUZA; BARBOSA, 2014).

Nesse sentido, pautados na filosofia da linguagem, sob uma perspectiva wittgensteiniana, sobretudo naquela fundamentada na ideia de jogos de linguagem, lançamos sobre duas atividades de modelagem matemática – uma desenvolvida no Ensino Fundamental e outra no Ensino Superior –, um olhar terapêutico a fim de dissolver confusões quanto ao papel da modelagem na aprendizagem matemática, de tal modo que possamos concebê-la livre de dogmas que, porventura, possam contaminar os usos da modelagem nesse contexto.

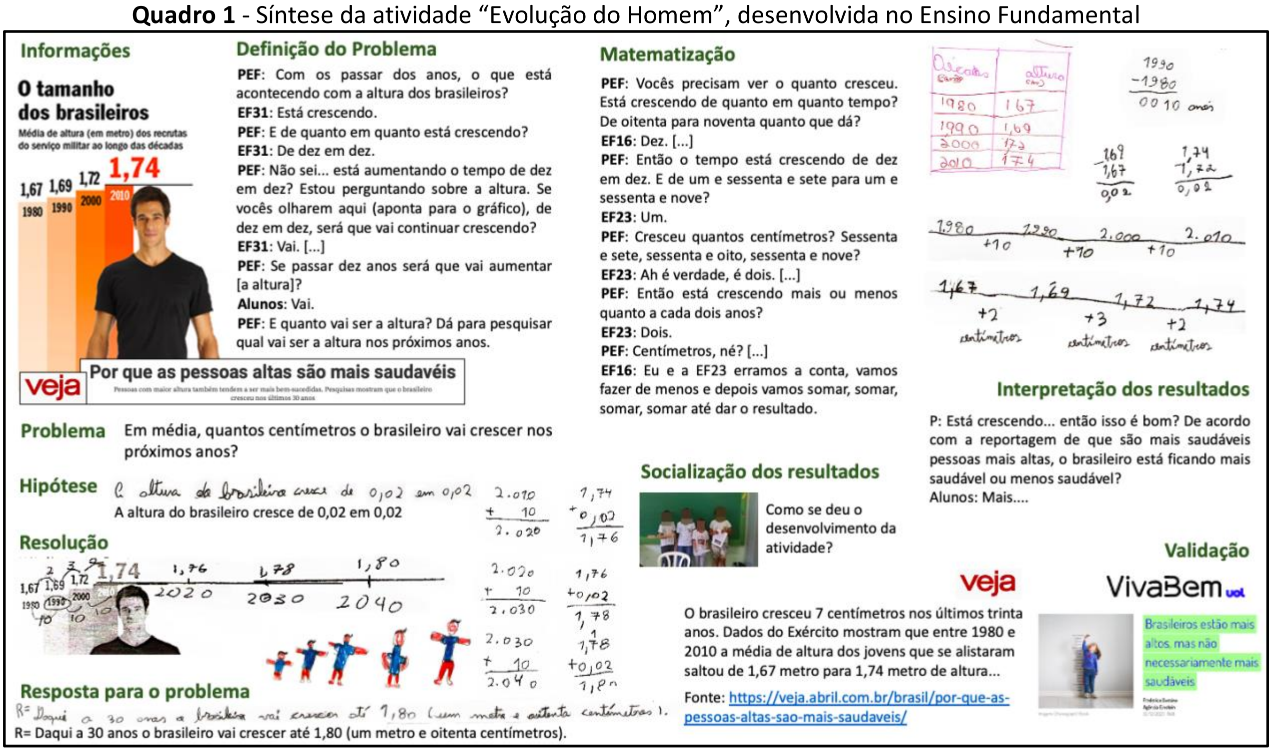
Esse olhar terapêutico, observado na filosofia de Wittgenstein, parte do pressuposto de que é possível "compreender algo que está manifesto" (WITTGENSTEIN, IF, § 89) por meio da descrição dos usos desse algo. Não se trata, portanto, de julgar se houve ou não aprendizagem matemática, tampouco de dizer como atividades de modelagem devem ser desenvolvidas para que a aprendizagem matemática ocorra, mas de esclarecer confusões que se originam de usos dogmáticos de como se dá a aprendizagem.

A análise das atividades é guiada por uma atitude que busca uma descrição dos usos, evidenciando os encaminhamentos dados pelos professores e os caminhos seguidos pelos alunos, considerando as discussões empreendidas e os registros escritos produzidos. Para nos referirmos aos alunos usamos as siglas EF e ES para indicar os níveis de escolaridade Ensino Fundamental e Ensino Superior, respectivamente, seguidas de uma numeração de acordo com as listas de presença de cada turma. A participação dos alunos se deu mediante assinaturas de termos de consentimento. Para nos referirmos aos pesquisadores do Ensino Fundamental e do Ensino Médio utilizamos as siglas PEF e PES, respectivamente.

Em ambas as atividades, os dados foram produzidos em aulas regulares, em instituições públicas paranaenses, sob a orientação dos pesquisadores, e foram registrados a partir de gravações em áudio, vídeo, imagens e produções escritas dos alunos. A primeira atividade foi desenvolvida pelo primeiro autor em um contexto de observação participante. O espaço para a produção dos dados foi cedido pela professora regente da turma, que acompanhou o desenvolvimento da atividade. A turma participante foi um 4º ano, composto por 31 alunos, com cerca de 9 anos de uma escola localizada na região Centro Ocidental do Paraná. A segunda atividade foi desenvolvida pelo segundo autor em suas aulas na disciplina de Matemática Financeira, ministrada para alunos do 4º ano de um Curso de Licenciatura em Matemática. A turma era composta por 9 alunos, de uma universidade localizada no Norte Pioneiro Paranaense.

A primeira atividade teve como tema "Evolução do Homem", na qual os alunos investigaram a altura do ser humano com o passar dos anos. Para isso se basearam em informações de uma reportagem que apresenta um gráfico de barras com a altura (média) dos recrutas do serviço militar nas últimas décadas. A partir das diferenças das alturas os alunos concluíram que a cada década houve um aumento em torno de dois centímetros na altura do brasileiro, pautados na ideia matemática de *moda*. Com a hipótese de que esse comportamento se manteria, os alunos previram a altura dos brasileiros para as décadas seguintes. A atividade envolveu adição e subtração, incluindo números racionais, na forma decimal.

Quadro 1 - Síntese da atividade "Evolução do Homem", desenvolvida no Ensino Fundamental



Fonte: Elaborado pelos autores.

A segunda atividade teve como tema "Orçamento Familiar ou Pessoal". Os alunos investigaram o montante obtido em um investimento em um título pré-fixado do Tesouro Direto, considerando o orçamento financeiro de uma integrante do grupo, que era professora da Educação

Infantil em seu munícipio, com a finalidade de identificar se esse investimento poderia ser uma alternativa viável à aposentadoria pela previdência social. A partir das hipóteses formuladas sobre o consumo, a renda e o montante obtido no investimento, bem como sobre relações entre esses aspectos, os alunos elaboraram um modelo matemático com base em uma equação de diferenças de primeira ordem sobre o montante no mês n (M_n). A solução dessa equação de diferenças obtida pelos alunos foi um modelo matemático discreto com regime de capitalização em juros compostos. Como resposta ao problema os alunos concluíram que o montante obtido no investimento no Tesouro Direto será de R$ 271 578,58 durante o tempo que levaria para a aluna se aposentar como professora, tornando-se uma alternativa considerada viável para a previdência social, na medida em que o montante obtido equivale ao salário da aposentadoria durante 19 anos.

Quadro 2 - Síntese da atividade "Orçamento Familiar ou Pessoal", desenvolvida no Ensino Superior

Informações

Orçamento Familiar ou Pessoal					
A4	nov/17	dez/17	jan/18	fev/18	mar/18
Renda					
Salário	966,91	966,91	966,91	966,91	1059,08
Outras rendas	-	981,24	-	356,00	-
Total	966,91	1948,15	966,91	1322,91	1059,08
Consumo					
Supermercado	209,59	240,42	274,30	253,85	308,19
Cartão de débito	49,91	5,00	-	25,00	98,59
Plano Vivo	39,98	75,98	76,70	39,99	45,00
Celular Novo	-	-	90,00	90,00	90,00
Netflix	27,90	27,90	27,90	27,90	27,90
Alimentação	120,00	100,00	50,00	100,00	100,00
Computador	240,00	240,00	240,00	240,00	240,00
Manutenção da Conta	12,40	12,40	12,40	12,40	12,40
Compras/ lojas	84,72	-	50,00	68,92	137,00
Combustivel / Carro	160,00	230,00	80,00	60,00	-
Dentista	-	1000,00	-	-	100,00
Total Consumo	944,50	1931,70	901,30	918,06	1159,08
Sobras	22,41	16,45	65,61	404,85	-100,00

Problema

Considerando que o tempo de contribuição na previdência necessário para uma professora da Educação Básica se aposentar é de 25 anos, qual é o montante obtido em um investimento no Tesouro Direto em um tempo equivalente, se fosse investido mensalmente a diferença entre o salário e consumo?

Definição do Problema

PES: Beleza gente agora vocês precisam definir um problema, considerando o orçamento de vocês e qual o objetivo com o investimento, se é a longo prazo ou a curto prazo. Por exemplo, se vocês querem comprar um carro, quanto vocês precisam investir por mês e por quanto tempo.[...]
ES2: primeiro temos que definir o objetivo. ES4 para que você quer?
ES4: Estabilidade financeira. Para chegar aos meus 50 anos e não precisar trabalhar mais.
ES2: Ah você quer uma aposentadoria?
ES4: Não, não é bem aposentadoria. Eu quero ter dinheiro quando tiver 40 anos mais ou menos, para que eu possa escolher trabalhar ou não. [...]
ES9: Tem como simular o quanto vamos resgatar ou quanto vamos investir mensalmente.
ES8: não é melhor ver o quanto a gente quer no final e dividir para ver o quanto a gente pode gastar no mês? [...]
ES2: mas a gente tem que pensar em cima da renda da ES4, qual é a renda dela? [...]
PES: Sim. É legal então ver o quanto vocês ganham e o quanto vocês gastam.

Matematização

PES: Oi pessoal, o que decidiram, o quanto vocês vão investir mensalmente?
ES4: Olha, eu projetei minha renda para o ano que vem, nós podemos pensar em relação a porcentagens.
PES: Proporcional?
ES4: Exatamente, não importa o quanto vou receber, eu vou gastar 25 % em compras, 30% em mercado, 9 % em contas fixas...
PES: Quantos porcentos você gasta da sua renda?
ES4:89%.
ES9: Então, ela pode investir 11% por mês a diferença entre a renda e o consumo. [...]
PP : E o salário é fixo?
ES9: Não, ele vai variar. Vamos considerar o índice de inflação do IPCA para fazer o reajuste do salário.

Hipóteses

i) o consumo é proporcional à renda; ii) o salário será atualizado de acordo com a inflação medida pelo IPCA; iii) consideramos o índice de inflação IPCA, como a média dos últimos anos; iv) o saldo mensal do orçamento sempre será positivo; v) o capital investido mensalmente é a diferença entre a renda e consumo do mês.

Variáveis

S_n: salário no mês n;
S_0: salário inicial;
β: constante de proporcionalidade do consumo/despesas em relação ao salário;
C_n: consumo no mês n;
M_n: montante no mês n;
t:tempo (em meses);
∝: taxa de inflação segundo o IPCA;
i: taxa de juros do investimento ao mês;

Resolução

1º equação
$M_n = M_{n-1} + M_{n-1}.i + (S_n - C_n)$
2º equação
$C_n = \beta.S_n$, sendo $0 < \beta < 1$
3º equação
$S_n = S_{n-1}.(1 + \alpha)$
$S_n = S_0.(1 + \alpha)^n$
Relacionando as três equações
$M_n = M_{n-1} + M_{n-1}.i + S_0.(1 + \alpha)^n(1 - \beta)$

Por recursividade temos

$$M_n = M_0.(1+i)^n + S_0.(1-\beta).\left[\frac{(1+\alpha)^1 * (1+i)^n - (1+\alpha)^{n+1}}{(i-\alpha)}\right]$$

PES: Que relações matemáticas vocês usaram nessa dedução?
ES2: A ideia da proporcionalidade, que o consumo mensal vai ser proporcional ao salário mensal, utilizando o Beta como constante de proporcionalidade.
ES4: E tem também o reajuste do salário de acordo com a inflação.
PES: Mas a taxa de juros nominal do título é nominal né, a capitalização de acordo com o modelo de vocês é mensal, como vocês consideraram isso?
ES4: Nós convertemos, pois é a juros compostos. Nós usamos o conceito de taxas equivalentes.

Resposta para o problema

Sendo $M_0 = R\$\ 149{,}80$, $i = 0{,}6976\%\ a.m$, $S_0 = R\$\ 1070{,}00$, $\alpha = 0{,}49\%$, $\beta = 0{,}86$, $n = 300$ meses, substituindo no modelo matemático e calculando o montante por meio do Excel, temos:

$M_{300} = R\$\ 271{,}578{,}58$

Tempo (meses)	Montante no mês n
1	R$ 301,38
2	R$ 454,77
3	R$ 609,96
4	R$ 766,99
5	R$ 925,87
...	...
300	R$ 271.578,58

Interpretação dos resultados e Validação

Considerando que de acordo com a folha de pagamento de A4, o salário da aposentadoria obtido pela previdência é de R$ 1.179,12 e o montante obtido no investimento no Tesouro Direto no tempo equivalente de contribuição da previdência de 25 anos é de R$ 271.578,58, ponderamos que o esse investimento constitui uma alternativa a previdência, uma vez que, proporcionalmente, o montante obtido equivale ao salário da aposentadoria durante 19 anos.

Fonte: Elaborado pelos autores.

A linguagem e a aprendizagem nas atividades de modelagem matemática

Os jogos de linguagem conectam, em uma concepção de linguagem wittgensteiniana, ações, comportamentos, palavras, gestos, regras e pensamentos em situações específicas de uso da linguagem e podem servir ao propósito de ser objetos de comparação, com os quais, por meio de semelhanças e dissemelhanças, podemos lançar luz para as relações da linguagem (WITTGENSTEIN, 2012, § 130). Considerando essa ideia e que cada atividade de modelagem matemática traz consigo conceitos, linguagens, problemáticas e interesses daqueles que a desenvolvem, conforme sugerem Almeida, Sousa e Tortola (2021), olhamos para as duas atividades desenvolvidas.

A modelagem matemática proporciona um modo de ver a matemática, que pode ser diferente em outras atividades matemáticas e se caracteriza a partir dos usos que fazemos da matemática na resolução de problemas advindos de situações da realidade (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, NISS; BLUM, 2020). Esse modo de ver está alicerçado em competências ou modos de agir específicos do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, os quais podem ser revelados pelos ciclos de modelagem matemática descritos na literatura (KAISER; GRÜNEWALD, 2015; SWAN e al., 2007, NISS; BLUM, 2020), sinalizando comportamentos característicos do fazer modelagem matemática.

O olhar analítico que lançamos para o papel da modelagem matemática na aprendizagem matemática tem como pressuposto uma atitude holística sobre os modos de fazer modelagem matemática dos alunos do Ensino Fundamental e do Ensino Superior, constituídos nas discussões, encaminhamentos e ações realizadas na matematização, na construção do modelo matemático e na interpretação dos resultados frente à situação inicial.

Na atividade "Evolução do Homem", com a intenção de saber quanto aumentará a altura média dos brasileiros nos anos seguintes, os alunos analisaram as diferenças entre as médias de altura dos recrutas do serviço militar nas últimas décadas (1980 a 2010), supondo, a partir da moda – diferença mais observada –, que esse crescimento se manteria.

> **PEF**: Vocês precisam ver o quanto cresceu. Está crescendo de quanto em quanto tempo? De oitenta para noventa quanto que dá?
> **EF16**: Dez. [...]
> **PEF**: Então o tempo está crescendo de dez em dez. E de um e sessenta e sete para um e sessenta e nove?
> **EF23**: Um.
> **PEF**: Cresceu quantos centímetros? Sessenta e sete, sessenta e oito, sessenta e nove?
> **EF23**: Ah é verdade, é dois. [...]
> **PEF**: Então está crescendo mais ou menos quanto a cada dois anos?
> **EF23**: Dois.
> **PEF**: Centímetros, né? [...]
> **EF16**: Eu e a EF23 erramos a conta, vamos fazer de menos e depois vamos somar, somar, somar, somar até dar o resultado.

O diálogo sinaliza que, a partir da definição da hipótese, uma regra matemática é reconhecida: as alturas seguem uma sequência cuja ação para obter o próximo número é adicionar

2 centímetros, ou ainda, 0,02 metros. Essa regra que decorre de uma interpretação das informações sobre a situação foi tomada como critério de correção pelos alunos e os guiou para determinar a altura dos brasileiros nas décadas seguintes às informadas na reportagem.

Na atividade "Orçamento Familiar ou Pessoal", a partir da formulação do problema, os alunos empreenderam uma discussão acerca dos elementos que seriam considerados para o investimento em um título pré-fixado no Tesouro Direto, tendo como base informações sobre renda e consumo mensal de uma das alunas integrantes do grupo (ES4). A formulação das hipóteses e a seleção de variáveis constituem relações estabelecidas pelos alunos entre conceitos das finanças pessoais, conceitos da Matemática Financeira e o objetivo dos alunos.

> **PES:** O que vocês querem determinar com esse problema?
> **ES9:** vamos supor que a pessoa vai depositar 200,00 reais por mês, a pessoa tem que fazer esse investimento durante quanto tempo para que o final tenha um valor igual ou final do salário da aposentadoria.
> **PES**: E qual é esse valor? [...]
> **ES4:** É o salário que ela vai ter na época.
> **ES9:** Mas aí teria que considerar o reajuste anual do salário né. Então não sei quanto vai ser.
> **PES:** Vai mudar. [...]
> **PES:** Mas aí qual é o sentido de investir 200,00 reais?
> **ES4:** o consumo é proporcional a renda.
> **PES:** Então investe a diferença entre a renda e o consumo.
> **ES4:** não importa qual seja os gastos, vamos investir com base na renda. Aí eu fui pegando aqui as contas fixas, com base no orçamento, dão aproximadamente 9% do salário. Mercado e alimentação, coloquei 30%.
> **PES:** E qual é a porcentagem considerando todo o consumo?
> **ES4:** É do que eu vou investir, é 19%.
> **PES:** então o seu consumo é 81%?
> **ES4:** Sim.

Inicialmente, os alunos optaram por investir mensalmente um valor fixo de R$ 200,00, que seria estipulado a partir do salário de ES4 e de seu consumo. Após o professor questionar sobre o sentido de investir esse valor fixo todo mês e, levando em consideração a hipótese de que o consumo é proporcional à renda e que o salário tem reajuste anual, os alunos modificaram a hipótese de investir o valor fixo de R$ 200,00 e passaram a pensar em um investimento mensal dado pela diferença entre a renda e o consumo, ou seja, o valor poderia variar.

Podemos ponderar que há aqui uma mudança no modo de ver dos alunos, decorrente de uma reflexão proposta pelo professor sobre o sentido de suas hipóteses e nos conceitos de proporcionalidade e reajuste monetário. Neste caso, a matemática, em conjunto com os conceitos sobre finanças, forneceu regras que serviram como condição para que os alunos atribuíssem significado às hipóteses formuladas, adicionando um aspecto do significado de investimento de acordo com o orçamento pessoal. Ao refletir sobre o conceito de investimento em outro jogo de linguagem, diferente daqueles com que lidam em sua vida pessoal, os alunos ampliam o espectro de aplicação desse conceito.

Para a construção do modelo matemático, na atividade "Evolução do Homem" os alunos utilizaram a noção de diferença para conjecturar uma regularidade a partir dos dados disponíveis e, a partir do cálculo das diferenças, observaram que o crescimento tem sido constante (2cm por ano). O caminho pelo qual os alunos chegaram ao cálculo da diferença oportunizou que o professor explicasse em que momentos a subtração pode ser utilizada, de modo a incentivar que eles não se apegassem a pistas sintáticas – mais, menos, maior, menor – para identificar que operações matemáticas utilizar na resolução de problemas.

> **PEF**: Pessoal, sempre que a gente quer saber quanto aumentou, não é porque está aumentando que eu vou fazer uma conta de mais.
> **EF14**: É menos.
> **PEF**: Quanto aumentou, a diferença, é menos. Só que... aí depois que... se você sabe a diferença, aí você faz um e sessenta e sete mais dois centímetros: um e sessenta e nove. Entendeu? Aí é mais. Quando você já sabe o quanto está aumentando. Agora quando você quer achar o quanto está aumentando, aí é de menos igual a EF14 falou.

Os alunos apresentaram dificuldades na representação de medidas, seja no uso correto da vírgula, seja nas transformações de unidades (metros para centímetros). Trata-se, entretanto, de uma dificuldade frequente nesse ano escolar, e cabe ao professor orientar o caminho para que o uso da linguagem matemática seja feito de acordo com as proposições gramaticais, características da linguagem matemática.

Na atividade "Orçamento Familiar ou Pessoal", por sua vez, os alunos utilizaram a noção de equações de diferenças de primeira ordem, haja vista que o regime de capitalização do investimento é o de juros compostos e, portanto, a base de cálculo para o montante no mês n (M_n) é o montante do mês anterior (M_{n-1}). Mediante as três equações formuladas a partir das hipóteses sobre o salário no mês n (S_n) e o consumo no mês n (C_n), o modelo matemático foi obtido por meio da resolução, por recursividade, da equação $M_n = M_{n-1}.(1+i) + S_0.(1+\alpha)^n.(1-\beta)$, em que i é a taxa unitária de juros do título do tesouro direto, α é a média do IPCA dos últimos anos e β é a constante de proporcionalidade obtida pela razão entre o consumo no mês n e o salário no mês n. Ao resolver a equação, os alunos tiveram dificuldade em generalizar a equação em função de M_0. O professor então chamou a atenção para algumas possibilidades de reescrever M_1 em relação a M_0, M_2 em relação a M_0 e assim por diante.

PES: Veja vocês chegaram nisso aqui né: $M_2 = (M_0.(1+i) + S_0.(1+\alpha).(1-\beta)).(1+i) +$
$+S_0.(1+\alpha)^2.(1-\beta)$.
Agora, vocês podem fazer a distributiva de (1+i) pela expressão que vocês substituíram no M_1: $M_2 = M_0.(1+i)^2 + S_0.(1+\alpha).(1-\beta).(1+i) + S_0.(1+\alpha)^2.(1-\beta)$ [alunos escrevem no caderno]
Agora, como fica se a gente colocar $S_0.(1-\beta)$ como evidência:
$M_2 = M_0.(1+i)^2 + S_0.(1-\beta).((1+\alpha).(1+i) + (1+\alpha)^2)$ [alunos escrevem no caderno]
Certo, façam o mesmo para o M_3 e veja se vocês conseguem perceber um padrão. [...]
ES4: Sim, aqui nessa parte aqui $(1+\alpha).(1+i)^2 + (1+\alpha)^2(1+i) + (1+\alpha)^3$
PES: O que está acontecendo?
ES4: um está aumentando e o outro tá descendo o n.
PES: vocês conseguem generalizar isso?
Alunos escrever no caderno:
$M_n = M_0.(1+i)^n + S_0.(1-\beta).((1+\alpha).(1+i)^{n-1} + (1+\alpha)^2(1+i)^{n-2} + \cdots + (1+\alpha)^n)$
ES2: Então, a gente tem a soma de uma PG.
PES: e qual é a razão?
ES2: (1+ α)
PES: Veja, sempre está multiplicando por $(1+\alpha)$ e dividindo por $(1+i)$.
Elton: então vai ser $\frac{1+\alpha}{1+i}$

O professor chamou a atenção dos alunos para outras formas de escrever M_1 e M_2 em relação a M_0 para que pudessem perceber um padrão. A regra a ser aplicada em cada passo da recursividade não foi imediatamente evidente para os alunos. Foi preciso que professor os conduzisse até que, a partir de certo ponto, eles conseguiram continuar sozinhos. Ao mostrar outra forma de escrever os passos da recursividade e questionar os alunos sobre um possível padrão, o professor faz um convite para que os alunos vejam determinada forma de escrever M_1, M_2, ..., como uma equação que os possibilita reconhecer um padrão e generalizar M_n.

Por fim, na interpretação dos resultados, na atividade "Evolução do Homem", os alunos do Ensino Fundamental compararam seus resultados com informações das reportagens de que o brasileiro cresceu 7 centímetros nos últimos 30 anos, o que corrobora com a hipótese assumida de um crescimento de 2 centímetros a cada década.

Já na atividade "Orçamento Familiar ou Pessoal", os alunos do Ensino Superior recorreram ao comportamento indicado pelo modelo matemático, para justificar a viabilidade do investimento do Tesouro Direto como uma opção para obter uma renda extra e justificaram que o modelo matemático por ter a função de ajudar uma pessoa a tomar uma decisão sobre suas finanças: "ao estimar um crescente montante visando à aposentadoria [...] podemos planejar uma poupança como plano B [...]," (registro escrito dos alunos do Ensino Superior). Esse aspecto evidencia a modelagem matemática como uma atividade que, intermediando a aprendizagem por meio da necessidade do uso de conceitos e procedimentos matemáticos, ocupa um papel de incentivo ao aprender a partir de necessidades específicas do problema estudado em cada atividade.

Considerações finais

O presente artigo, voltando-se para a aprendizagem em atividades de modelagem, indica que a competência matemática como consequência do uso de sistemas simbólicos formais, como propõem Swan et al. (2007), e a leitura da realidade associada à uma matematização, como se discute em Almeida, Sousa e Tortola (2021), não podem ser vistos como extremos que sugerem uma dicotomia entre formalismo e utilitarismo.

A interlocução entre dois domínios, matemática e realidade, viabilizada pelas atividades de modelagem matemática, por um lado se apoia no processo de matematização em que se configura um diálogo entre a situação da realidade e a matemática mediado pela capacidade do aluno modelador de identificar características essenciais da situação e conteúdos matemáticos oportunos para fomentar a resolução de um problema. Por outro lado, entretanto, o uso da matemática como sistema simbólico e com caráter normativo não se torna indispensável e, muito menos se destitui. Ou seja, é privilegiando a profícua relação entre a situação da realidade e o uso da matemática que as possibilidades de aprendizagem se tornam presentes na modelagem matemática.

Isso implica em evitar a adoção de posições dogmáticas quanto ao uso da modelagem na sala de aula. De fato, a abordagem da matemática no âmbito da modelagem matemática não pode ser exclusivamente teórica, atribuindo uma supremacia ao sistema matemático escolar – como é criticado por Souza e Barbosa (2014) – e não pode ser exclusivamente utilitarista, subjugando a necessidade de formalização matemática, deixando transparecer que só se deve ensinar o que será útil ou aplicável.

Adotar a perspectiva terapêutica, observada na filosofia de Wittgenstein, nos ajuda a entender que ensinar matemática não pode ser dogmático – corroborando com o que nos sinaliza a epistemologia do uso, proposta por Moreno (2005, 2018). Ou seja, na modelagem, por um lado, não pode se restringir ou privilegiar aspectos utilitários (empíricos) e, por outro, não se pode privilegiar apenas aspectos teóricos (gramaticais).

Propomos, dessa forma, a modelagem matemática como uma possibilidade de ultrapassar tal dicotomia. Atividades de modelagem envolvem um modo de fazer característico, como se discute, por exemplo, em Almeida, Sousa e Tortola (2021), ou muitas vezes expresso na literatura por meio de ciclos de modelagem – ainda que diferentes modos de fazer possam ser observados. Assim, são reconhecidos regras e modos de agir como um jogo de linguagem que, dentre outros, pode promover a aprendizagem da matemática a partir de um modo de ver a matemática.

Trazer essa discussão para os debates relativos à modelagem na sala de aula é relevante para, como já sugerem Souza e Barbosa (2014), refletir sobre qual aprendizagem é essa proporcionada pela modelagem, ou sobre o que cabe ser ensinado em atividades de modelagem.

Esse ensino deve-se ancorar em fundamentos teórico-epistemológicos que justificam determinadas práticas. Por um lado, para que gere aprendizagem, o professor precisa conhecer sobre modelagem, para que possa criar condições e direcionar a inserção dos alunos em novos jogos de linguagem que ampliam as certezas matemáticas. Também é preciso ponderar que não se aprende matemática somente por fazer modelagem, considerando que uma atividade de modelagem pode abarcar nuances de um conceito matemático. São necessárias intervenções do professor no sentido de dar aos alunos um treinamento adequado, sob a perspectiva colocada por Wittgenstein. Por outro lado, esse ensino não pode perder de vista o objetivo da modelagem de interpretar, descrever e resolver situações-problema da realidade, o que implica em não ignorar que a matemática aprendida precisa ser útil e importante para resolver um problema.

Embora o artigo possa ter a limitação de analisar apenas duas atividades, trata-se de um ensaio que sinaliza resultados úteis em termos de esclarecer que o papel da modelagem na aprendizagem matemática é o de proporcionar um modo de ver a matemática não exclusivista e que combate a dicotomia, formalismo – utilitarismo, mas respeita as formalidades de um sistema matemático, mesmo que não seja o escolar, como defende Caldeira (2009) e como sugerem Souza e Barbosa (2014). Trata-se de um modo de ver que requer uma formalização, a partir do seguir regras que são convencionadas no âmbito de uma comunidade, seja ela escolar ou não, caso contrário atividades de modelagem matemática podem se reduzir a mera curiosidade para os alunos.

Referências

ALMEIDA, L. M. W. Considerations on the use of mathematics in modeling activities. **ZDM**, Berlin, v. 50, n. 1, p. 19-30, 2018.

ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **Bolema**, Rio Claro, n. 22, p. 19-35, 2004.

ALMEIDA, L. M. W.; SOUSA, B. N. P.; TORTOLA, E. The Formulation of Hypotheses in Mathematical Modelling Activities. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 23, n. 5, p. 66-93, set./out. 2021.

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.

CALDEIRA, A. D. Modelagem Matemática: um outro olhar. **Alexandria**, Florianópolis, v. 2, n. 2, p. 33-54, jul. 2009.

GOTTSCHALK, C. M. C. A terapia wittgensteiniana como esclarecedora de conceitos fundamentais do campo educacional. **IXTLI**, Buenos Aires, v. 2, n. 4, p. 299-315, 2015.

GOTTSCHALK, C. M. C. Fundamentos epistemológicos da educação de uma perspectiva wittgensteiniana. In: AZIZE, Rafael Lopes (org.). **Wittgenstein nas Américas**: legado e convergências. Salvador: Edufba, 2018. p. 53-72.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação**: abordagens qualitativas. 2. ed. Rio de Janeiro: E.P.U., 2014.

MORENO, A. R. **Introdução a uma pragmática filosófica**. Campinas: Ed. da Unicamp, 2005.

MORENO, A. R. For an epistemology of use: one aspect of the wittgensteinian concept of use: construction of the sign and constitution of meaning. In: AZIZE, Rafael Lopes (org.). **Wittgenstein nas Américas**: legado e convergências. Salvador: Edufba, 2018. p. 27-52.

NISS, M.; BLUM, W. **The learning and teaching of mathematical modelling**. London, New York: Routledge, 2020.

SCHRENK, M. J.; VERTUAN, R. E. Modelagem Matemática como Prática Pedagógica: uma possível caracterização em Educação Matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 24, n. 1, p.194-224, 2022.

SOUSA, B. N. P. A.; ALMEIDA, L. M. W. Linguagem em Atividades de Modelagem Matemática: uma perspectiva wittgensteiniana. **REMATEC**, Belém, v. 14, n. 31, p. 171-191, 2019.

SOUZA, E. G.; BARBOSA, J. C. Contribuições teóricas sobre a aprendizagem matemática na modelagem matemática. **Zetetiké**, Campinas, v. 22, n. 41, p. 31-58, jan./jun. 2014.

SWAN, M.; TURNER, R.; YOON, C.; MULLER, E. The roles of modelling in learning mathematics. In: BLUM, W.; GALBRAITH, P. L.; HENN, H. W.; NISS, M. (Eds.). **Modelling and Applications in Mathematics Education**: New ICMI Study Series, vol 10. Boston: Springer, 2007. p. 275-284.

WITTGENSTEIN, L. **Investigações Filosóficas**. 7. ed. Tradução de Marcos G. Montagnoli. Petrópolis: Editora Vozes; Bragança Paulista: Editora Universitária São Francisco, 2012. (Coleção Pensamento Humano). Tradução de: Philosophische Untersuchungen.

WITTGENSTEIN, L. **Fichas** (Zettel). Lisboa: Edições 70, 1989.