



União da Vitória - Paraná

# IX EPMEM

Encontro Paranaense de Modelagem na  
Educação Matemática

## Informações sobre as Autoras:

*Janayna da Costa Goulart*

Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
(UTFPR) – Campus Curitiba  
jgoulart@alunos.utfpr.edu.br

*Leônia Gabardo Negrelli*

Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
(UTFPR) – Campus Curitiba  
negrelli@utfpr.edu.br

## Modelagem Matemática e Física Teórica na Formação Inicial de Professores

### Resumo

Este artigo refere-se a uma pesquisa realizada como trabalho de conclusão de um curso de Licenciatura em Matemática e tem como objetivo principal abordar possibilidades para o emprego da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem na disciplina de Física Teórica existente na matriz curricular do curso de formação de professores em questão. Após a realização de um estudo bibliográfico acerca da Modelagem Matemática na educação básica e na formação inicial de professores, foram selecionados temas da ementa da disciplina mencionada com potencial para uma abordagem via Modelagem Matemática e foram elaboradas e descritas possibilidades de vivências dessa estratégia. A realização do estudo levou à constatação de que uma releitura de práticas metodológicas consolidadas em determinadas disciplinas da graduação são uma via oportuna para o aperfeiçoamento do processo de formação inicial de professores e para o emprego da Modelagem no ensino superior e, conseqüentemente, na educação básica.

**Palavras-chave:** Modelagem. Física. Professores.

### Abstract

This article refers to a research carried out as a conclusion work for a degree in mathematics and its main objective is to address possibilities for the use of mathematical modeling as a teaching and learning strategy in the discipline of Theoretical Physics existing in the curriculum of the course of teacher training in question. After a theoretical study on modeling in basic education and in the initial training of teachers, themes from the curriculum of the mentioned subject with potential for an approach via modeling were selected and possibilities of modeling experiences were elaborated and described. The realization of the study led to the realization that a reinterpretation of consolidated methodological practices in certain undergraduate disciplines is an opportune way to improve the process of initial teacher training and for the use of modeling in higher education and, consequently, in basic education.

**Keywords:** Modeling. Physical. Teachers.

Realização:





## Introdução

Durante a realização do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, campus Curitiba (UTFPR-CT), estudam-se, em várias disciplinas, estratégias metodológicas para o ensino da Matemática em diversos níveis de ensino. Porém, nem sempre estratégias de ensino semelhantes são utilizadas em disciplinas da matriz curricular do referido curso de modo que os licenciandos possam vivenciar na prática, enquanto estudantes ainda, o emprego delas. Uma dessas estratégias metodológicas é a Modelagem Matemática que, de acordo com Bassanezi (2019, p. 16) “[...] consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”. Nas palavras de Almeida, Silva e Vertuan (2020, p. 15) a Modelagem Matemática “visa propor soluções para problemas por meio de modelos matemáticos”, que são representações simplificadas da realidade.

A percepção, por parte da primeira autora deste trabalho, de que a utilização dessa estratégia no contexto da formação inicial de professores remove barreiras entre diversas disciplinas e revela relações naturais entre as áreas do conhecimento, levou à produção de um trabalho de conclusão de curso, sob a orientação da segunda autora. A participação de ambas em uma iniciativa que abordou inovações criativas no ensino de graduação, o fato da primeira autora também ser licenciada em Física e as demandas das diretrizes atuais para a formação de professores de Matemática para a educação básica também foram norteadoras do trabalho. A realização das práticas de Modelagem vislumbradas por meio do estudo foi inviabilizada até o presente momento devido a condições impostas pela pandemia da Covid-19; por isso, esta comunicação contempla uma abordagem teórica no trabalho de conclusão para o qual foi realizado um estudo bibliográfico acerca da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem em cursos de Licenciatura em Matemática; foram explicitadas contribuições do estudo de conteúdos da Física para a formação de um professor de Matemática frente às demandas atuais da Educação Básica; selecionou-se na ementa da disciplina de Física Teórica 1 do Curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR-CT alguns temas e, por fim foram propostas atividades para o desenvolvimento da Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática.

Para o referencial teórico da pesquisa foram utilizados três principais aportes para a Modelagem Matemática: a formação de professores de Bassanezi (2019), as perspectivas e momentos de familiarização de Almeida, Silva e Vertuan (2020) e as ações de vivência da



Modelagem Matemática de Silva (2007). Com base neles foram apresentadas três propostas de atividades envolvendo Modelagem e Física, cada uma com um enfoque e temas diferentes, com o intuito de compreender e revelar como atividades que propiciem a interdisciplinaridade podem ser consideradas em curso de Licenciatura em Matemática. Os temas escolhidos livremente pela primeira autora deste trabalho e os conteúdos selecionados da ementa relacionados a esses temas foram: uma corrida de 100 m e o movimento retilíneo; arremesso de peso e o movimento parabólico; a patinação no gelo e a conservação do momento angular. Para esta comunicação será destacada e exposta uma das atividades propostas, a que trata da patinação no gelo e a conservação do momento angular.

### Modelagem e Formação de Professores

Quando se pensa nos processos da Modelagem Matemática, tem-se como referência a obra de Bassanezi. Publicada originalmente em 2002, e com algumas reedições ao longo dos anos, a obra “Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática”, traz os processos da Modelagem como um método científico, voltada para a Matemática Aplicada. Nessa obra, o autor também ressalta como a utilização desses processos em cursos de formação de professores pode contribuir com a sua aprendizagem.

Conforme Bassanezi (2019, p. 24), a Modelagem Matemática “é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos”. Porém, é necessário ver que ela somente é eficiente quando se tem consciência de que se está trabalhando com aproximações da realidade. Já os modelos matemáticos são um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado. O autor define uma sequência de etapas para a realização de uma atividade de Modelagem Matemática, e são elas: a *experimentação*, que contempla uma atividade laboratorial na qual se processa a obtenção de dados; a *abstração*, que é o procedimento que deve levar à formulação dos Modelos Matemáticos, o que demanda a seleção das variáveis, a problematização, e a formulação de hipóteses; a *resolução*, caracterizada pela construção de um modelo matemático utilizando a linguagem matemática coerente; a *validação*, que é o processo de aceitação ou não do modelo proposto e, por fim, a etapa de *modificação*, que ocorre caso o modelo obtido não corresponda satisfatoriamente à abstração feita no início da atividade.



Essas definições e caracterizações de modelo matemático e do processo de Modelagem expostos são importantes para que a atividade tenha uma linguagem concisa e que expresse as ideias de maneira clara e sem ambiguidades.

De acordo com Bassanezi (2019), o próprio processo atual de formação do professor ainda não leva o licenciando a estabelecer uma associação relevante entre o que se ensina e o mundo real. Historicamente as disciplinas são vistas de modo independente umas das outras, não havendo uma interligação delas com outras disciplinas escolares. Contudo, utilizar a Modelagem Matemática como estratégia de ensino-aprendizagem, pode ser um dos caminhos a tornar um curso de Matemática mais atraente e agradável, assim “uma Modelagem eficiente permite fazer previsões, tomar decisões, explicar e entender, enfim, participar do mundo real com capacidade de influenciar em suas mudanças.” (BASSANEZI, 2019, p. 177). Sua utilização é levada em conta em um ensino mais dinâmico, visando um curso de Licenciatura construído por meio de realizações de projetos, de ações pedagógicas, fazendo com que o futuro professor reconheça a utilidade da Matemática na capacidade desta de ensinar a pensar e raciocinar com mais criatividade e autonomia. Por isso, complementa esse autor, ao se pensar na formação do estudante de Licenciatura, pode-se utilizar a Modelagem como estratégia de ensino para se ter uma articulação entre teoria e prática, mostrando o valor intrínseco da Matemática, enquanto ferramenta para outras áreas do conhecimento.

Ao discutir o uso da Modelagem no ensino, deve-se pensar qual seria a concepção mais adequada, uma vez que na Matemática Aplicada ela é um método de pesquisa, mas no ensino a Modelagem precisa ser adaptada a diferentes faixas etárias e aos diferentes anos escolares. Uma das obras marcantes para esse estudo é a “Modelagem Matemática na Educação Básica”, dos autores Almeida, Silva e Vertuan, cuja primeira edição é de 2012. Nela, os autores, além de descreverem o processo de Modelagem, situando-o no contexto escolar, abordam quais os espaços indicados e as possibilidades para sua realização, de forma a trazer benefícios para os estudantes.

Assim, para Almeida, Silva e Vertuan (2020, p. 13), um modelo matemático é “uma representação simplificada da realidade sob a ótica daqueles que a investigam”, sendo assim “o modelo matemático ‘dá a forma’ à solução do problema e a Modelagem Matemática é a ‘atividade’ de busca por essa solução”. Os autores concebem uma atividade de Modelagem Matemática contendo uma *situação inicial*, uma *situação final* desejada e um *conjunto de procedimentos e conceitos* necessários para passar da situação inicial para a final. Assim, uma atividade de



Modelagem Matemática, se dá em fases que são caracterizadas como: a *inteiração*, que é o primeiro contato com a situação-problema, onde procuram-se informações e é feita a coleta de dados qualitativos e quantitativos. Essa fase à formulação do problema e definição de metas e objetivos a serem perseguido. A *matematização* permite a adequação do problema em linguagem matemática, formulando hipóteses simplificadoras e selecionando variáveis, utilizando notações matemáticas apropriadas. Já fase da *resolução* evidencia a construção de um modelo matemático que permite responder a perguntas formuladas na fase da inteiração. Por fim, a *interpretação de resultados e validação* instiga a análise das respostas para o problema, considerando as teorias envolvidas e adequação do modelo para descrever a realidade em questão. (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2020).

Por mais que essas fases envolvam ações e procedimentos necessários para a realização da atividade, elas podem não ocorrer de forma linear, caracterizando a dinamicidade da atividade.

A utilização desse tipo de atividade pode não ser usual e ser desafiadora para o estudante, por isso é adequado que a familiarização com as atividades de Modelagem Matemática ocorra de forma gradativa, caracterizando diferentes *momentos de familiarização*, conforme proposto em Almeida, Silva e Vertuan (2020, p. 26):

- Momento 1 – os estudantes são colocados em contato com uma situação-problema delineada, juntamente com os dados e demais informações para que eles elaborem um modelo matemático e apresentem uma solução ao problema, mobilizando seus conhecimentos e escolhendo estratégias.
- Momento 2 – uma situação-problema é proposta aos estudantes, que a complementam com coleta de dados e demais informações necessárias, formulam problemas, definem procedimentos, propõem soluções, etc.
- Momento 3 – os estudantes escolhem um tema, formulam problemas, coletam dados, selecionam variáveis, elaboram hipóteses, escolhem estratégias, etc.

Para realizar uma atividade de Modelagem Matemática também é oportuno destacar sob que perspectiva ela será proposta. Uma perspectiva é determinada pelo objetivo principal com o qual a Modelagem é desenvolvida. Segundo Kaiser e Sriraman (2006, apud ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2020, p. 28) podem ser consideradas seis perspectivas distintas: realística, contextual, sociocrítica, epistemológica, cognitiva e educacional.

A perspectiva contextual, por exemplo, coloca situações-problema contextualizadas ou com aplicações de conteúdo, levando em conta questões motivacionais. Um exemplo seria o estudo de



otimização na produção de embalagens para produtos de higiene e limpeza no qual conteúdos de cálculo diferencial e integral podem ter sua aplicabilidade evidenciada. A perspectiva educacional tem como foco a integração de modelos matemáticos no ensino da Matemática, levando os estudantes a investigar o “por quê” e o “como” dos modelos matemáticos. Dentro dessa perspectiva é papel do professor analisar possíveis dificuldades dos estudantes no processo de Modelagem, principalmente as relacionadas à matematização e à interpretação dos resultados obtidos.

É importante conhecer essas perspectivas para que se possa refletir sobre o trabalho a ser realizado em sala de aula e planejá-lo de um modo mais adequado. É possível que uma mesma atividade contemple mais de uma perspectiva, porém é necessário ter clareza sobre essas possibilidades, pois cada uma tem o seu propósito e seu interesse, trazendo implicações para a forma como o professor conduz o desenvolvimento das atividades de ensino, bem como os resultados obtidos por meio delas.

Assim, as perspectivas contextual e educacional foram as principais norteadoras das atividades de Modelagem propostas neste estudo, dado que o objetivo principal foi a elaboração de atividades com ênfase nos modelos matemáticos dos temas e conteúdos de Física abordados, trazendo uma reflexão sobre a matematização, a interdisciplinaridade e as interpretações de resultados.

A utilização da Modelagem Matemática como uma estratégia de ensino pode trazer duas experiências distintas, uma para o professor e uma para o estudante. Os artigos dos autores Silva (2007) e de Silva e Dalto (2011) abordam a Modelagem no contexto da formação inicial de professores e a importância das ações de vivências, tanto para professor quanto para estudante, pois a sua utilização pode propiciar um ensino com maior motivação, facilitação da aprendizagem e preparação para utilizar a Matemática em diferentes áreas. Porém é necessário discutir a qualidade das ações de Modelagem na formação inicial de professores na perspectiva do desenvolvimento profissional.

Silva e Dalto (2011) mostram que as práticas de Modelagem em sala de aula são caracterizadas pelo conjunto de relações estabelecidas entre estudantes e o professor, sendo necessária a aprendizagem relacionada ao fazer Modelagem, à preparação de situações de Modelagem e à aplicação dessas situações em sala de aula. Isso leva à conclusão de que “a prática com Modelagem na formação de professores requer uma perspectiva capaz de possibilitar futuras implementações no exercício da docência” (SILVA; DALTO, 2011, p. 182).



Silva e Dalto (2011) apontam dois domínios para a formação de professores: a experiência como estudante e a experiência como professor e afirmam que professores precisam ter a oportunidade de “aprender” sobre Modelagem, “aprender” por meio da Modelagem e “ensinar” usando Modelagem. Silva (2007) coloca que se podem utilizar dois tipos de ações para incorporar a Modelagem à prática do professor: ações de vivência da Modelagem e ações didático-pedagógicas de Modelagem.

As ações de vivência da Modelagem oferecem aos licenciandos a familiaridade com o processo de Modelagem, bem como oferecerem experiência com situações didáticas que envolvem situações reais, problematizações e investigações. Ao implementar as ações de vivência em disciplinas do currículo, elas podem estabelecer relações entre teoria e as aplicações da matemática, viabilizando a construção do conhecimento matemático de modo mais eficiente.

Algumas formas de ações de vivência que podem ser desenvolvidas na formação inicial, segundo Silva (2007), são: a exploração de modelos matemáticos, visando a recriação de modelos pelo sujeito; o estudo de textos com diferentes olhares sobre os comportamentos do processo de Modelagem, visando a identificação das características do processo de Modelagem sob as diferentes perspectivas existentes na literatura; ações de modelador, visando que o estudante desenvolva sua criatividade e habilidades de modelador; análise das ações de vivência no contexto da formação inicial de professores, visando a utilização de ações propostas em diferentes momentos e disciplinas de um curso de licenciatura, focalizando a relevância da Modelagem na formação e prática profissional.

Já nas ações didático-pedagógicas, Silva (2007) traz que:

[...] a Modelagem passa a ser fonte de reflexão sobre seu potencial no processo de ensino aprendizagem, sobre os argumentos que a constituem como estratégia de ensino, sobre os obstáculos à sua implementação, sobre sua essência enquanto processo investigativo, sobre sua viabilidade, sobre os caminhos para sua implementação, entre outros (SILVA, 2007, p. 226).

Logo, ao discutir sobre Modelagem e seu desenvolvimento em sala, o foco é nas ações didático-pedagógicas, porém ao realizar uma atividade em sala utilizando a Modelagem como recurso, utilizam-se das ações de vivência dela. Assim, o potencial da Modelagem para a formação inicial está atrelado à qualidade das ações propostas, também devendo ser coerente com a(s) perspectiva(s) de formação escolhida.



Silva (2007, p. 229) também coloca que a Modelagem permite ao licenciando “inovar nas ações que lhe são oportunizadas e desenvolver a autonomia na produção de saberes e valores”, contribuindo assim para a formação de um professor de Matemática mais reflexivo, crítico, colaborador e investigador da prática docente.

## Física e Modelagem Matemática na Licenciatura

A disciplina Física Teórica 1 da matriz curricular do Curso de Licenciatura Matemática da UTFPR-CT é ofertada aos estudantes do quarto período e atualmente tem como pré-requisito a disciplina de Cálculo Diferencial A. Vale destacar que até o quarto período, o estudante já cursou as disciplinas de Funções de uma Variável Real A e Geometria Analítica A, o que auxilia também no entendimento de conteúdos de Física.

Um dos objetivos da disciplina de Física Teórica 1 é a introdução à linguagem físico-matemática fundamental para quantificar todos os fenômenos físicos observados na natureza, o que se adequa a utilização da Modelagem Matemática, já que são situações vindas da realidade.

A ementa apresenta temas com grandes potenciais para o desenvolvimento de atividades de ensino que envolvam a Modelagem Matemática, dentre eles, foram selecionados três temas: movimento retilíneo, movimento parabólico e conservação do momento angular.

Uma atividade usual na disciplina de Física Teórica 1, presente tanto em livros de Física quanto de Cálculo, consiste em fornecer alguns parâmetros e solicitar, ainda que implicitamente, que se formule uma expressão matemática que relacione as variáveis envolvidas a fim de analisar um determinado fenômeno.

Atividades assim apresentam um viés que favorece o uso de Modelagem Matemática na perspectiva contextual. Para que se torne uma atividade que utilize a Modelagem Matemática como estratégia de ensino é necessária uma adaptação da mesma para incluir os elementos sugeridos também pela perspectiva educacional, para poder trabalhar com o estudante os temas presentes na ementa. Com este propósito, inspirando-se em situações usualmente exploradas no ensino de conteúdos de Física, foi feita uma releitura de certas abordagens, de modo a evidenciar a dinâmica do processo de Modelagem e os momentos de familiarização propostos por Almeida, Silva e Vertuan (2020).

Uma forma de execução de atividades de Modelagem em cursos regulares, segundo Bassanezi (2019) é a escolha de um tema geral que possa nortear o curso como um todo. Seguindo



essa ideia, foi escolhido o tema Práticas Esportivas, uma vez que ele pode ser abordado no âmbito da temática Qualidade de Vida, que permitiria, conforme interesse e/ou necessidade, o desenvolvimento destas mesmas atividades contemplando também a perspectiva sociocrítica. Esse tema geral abre possibilidades para muitas outras abordagens, pois o corpo humano visto como uma máquina, também está sujeito às leis da Física. Portanto, as três atividades propostas a seguir foram pensadas seguindo esse grande tema, mas elas podem abrir discussões para outros temas e assuntos, que envolvam a ementa da disciplina e que podem gerar outras atividades posteriormente.

As três etapas destacadas na apresentação das propostas de atividades foram inspiradas em Almeida, Silva e Vertuan (2020), mas também contém elementos da caracterização das fases da Modelagem dada por Bassanezi (2019), além de contemplar as possibilidades de vivências de Modelagem na formação inicial de professores dadas por Silva (2007).

### Uma proposta de Modelagem para o ensino na disciplina de Física Teórica

O assunto e o conteúdo inspiradores desta proposta de atividade é a patinação no gelo e a conservação do momento angular. Esta atividade considera uma possibilidade de atividade situada no Momento 3 de familiarização dos estudantes (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2020), no qual os estudantes podem escolher um tema, formulam os problemas, coletam dados, selecionam variáveis, elaboram hipóteses, escolhem estratégias. Mesmo sendo um momento de escolha para eles, é trazido aqui um exemplo de como se dão as etapas nesse momento.

Quando se trabalham os conceitos de momento angular, conservação do momento angular e inércia, alguns exemplos estudados são os de esportes que envolvem giros. Tanto no balé quanto na patinação artística no gelo, os atletas fazem recursos de giros e piruetas em suas rotinas. A inspiração para a atividade é dada tanto pelos Jogos Olímpicos de inverno que aconteceram em 2021, quanto por um filme há muito tempo visto, lançado pela Walt Disney Pictures em 2005 com o título “Sonhos no gelo”, que conta a história de Casey Carlyle, uma garota que utilizava os elementos de Física para melhorar as habilidades dela na patinação no gelo, conseguindo uma bolsa em Harvard por fazer tal estudo. Assim, temos que a inspiração para as atividades de Modelagem podem surgir de diversos lugares, não somente dos exercícios de livros didáticos.

Assim, para a realização da etapa 1 primeiro pensaram-se em alguns elementos da prática da patinação, como os giros e saltos praticados pelos atletas. Após a análise de algumas fontes sobre



o assunto, o seguinte questionamento foi levantado: por quanto tempo um patinador consegue girar, sem que ele coloque a vida em risco? Desse questionamento, a procura por mais informações referentes ao assunto se fez necessária. Pode-se então começar com outras perguntas, como “Qual a velocidade de um patinador?”, “Qual o número de giros que ele pode e deve fazer em um movimento?”.

Na etapa 2, foi feita a busca de dados para as questões, como massa de um patinador, velocidade inicial de giro, proporções e tamanho dos braços dos atletas. Foram necessárias a colocação de algumas hipóteses e simplificações para conseguir resolver o problema. Também foi realizada a matematização e resolução do problema, quando foram definidas as variáveis do problema, qual matemática seria necessária para resolvê-la e o modelo matemático da situação. Para a etapa 3, a interpretação dos resultados obtidos foi muito importante para a validação dos mesmos, analisando o modelo encontrado e se ele estava de acordo com o problema inicial.

Para a *Etapa 1* da atividade, consideramos a situação inicial de patinação no gelo e procedemos com pesquisas exploratórias e questionamentos a respeito.

A patinação artística no gelo teve as primeiras competições em meados de 1880 e a União Internacional de Patinação surgiu em 1892. Fez parte dos Jogos Olímpicos de Verão em 1908 e 1920 e entrou para os Jogos de Inverno em 1924 (CONFEDERAÇÃO BRASILEIRA DE DESPORTOS NO GELO, 2022). Os patinadores competem nos programas curtos e livres, sempre ao som de músicas, e suas rotinas incluem saltos, giros, levantamentos, arremessos e sequências coreográficas. Ao olhar os programas, às vezes se têm a impressão que os movimentos são fáceis e não requerem esforço para realizá-los. Mas será que isso é certo? Na verdade, os patinadores precisam de treinos constantes, sempre desafiando os limites do próprio corpo, além disso é necessário o conhecimento físico de todos os movimentos envolvidos e as habilidades necessárias para realizá-los.

Os giros e piruetas são passos sempre presentes nas rotinas de patinadores, mas é necessário muito treino para chegar ao nível de excelência. Contudo, o que a Física tem a ver com esses passos? Esses passos são regidos pela ideia de conservação, em particular o momento angular ( $L$ ), que matematicamente é expresso pela equação (modelo matemático)

$$L = I \cdot \omega$$

no qual a velocidade angular da patinadora ( $\omega$ ) é multiplicada por seu momento de inércia ( $I$ ) que está associado à rotação de um corpo em torno de um mesmo eixo de rotação (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2012, p. 301). Para que ela consiga manter o equilíbrio ao girar, não devem



existir forças de torque (“forças de giro”) externo agindo sobre si, se isso ocorrer o momento angular é constante, ou seja, há a conservação do momento angular. A inércia rotacional é entendida como a resistência do corpo ao movimento de rotação e ela aumenta quando a massa é distribuída longe do eixo de rotação, mas diminui quando a massa é distribuída próximo ao eixo de rotação. Então, para uma patinadora, por exemplo, ao trazer seus braços mais próximos ao corpo a sua inércia de rotação diminui e, para conservar o momento angular, a velocidade do giro tem que aumentar, permitindo a conservação do momento angular para que ela gire.

Então, qual a velocidade que uma patinadora consegue chegar ao realizar esse movimento? Quantos giros são seguros de serem feitos? Abordamos estas questões na *Etapa 2* da atividade, quando consideramos os dados do problema para a matematização na situação.

De acordo com livros textos e didáticos de Física para cursos de Graduação (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2012; TIPLER, 2014) algumas considerações serão necessárias. Primeiro, foi considerada uma patinadora de altura 1,60 m e um corpo com massa de 50 kg. Os braços foram considerados como massas separadas do corpo, como se fossem barras fixas na extremidade do eixo de rotação com massa de 4 kg cada. Para uma simplificação de formas, o corpo humano foi considerado um cilindro de raio 0,2 m, e os braços têm um tamanho de 1 m a partir do eixo de rotação, quando abertos. A velocidade inicial de um giro foi de 1,5 rev/s, considerando-se alguns exemplos encontrados nas leituras.

Assim, se não há torque externo, há uma conservação do momento angular, logo:

$$\Delta L = 0$$

$$L_f - L_i = 0$$

$$L_{\text{braço fechado}} - L_{\text{braço aberto}} = 0$$

$$L_{\text{braço fechado}} = L_{\text{braço aberto}}$$

$$I_{\text{braço fechado}} \cdot \omega_{\text{braço fechado}} = I_{\text{braço aberto}} \cdot \omega_{\text{braço aberto}}$$

$$\omega_{\text{braço fechado}} = (I_{\text{braço aberto}} \cdot \omega_{\text{braço aberto}}) : (I_{\text{braço fechado}})$$

Precisa-se então, das informações do momento de inércia da patinadora considerando o braço fechado, o momento de inércia com o braço aberto e a velocidade de giro com o braço aberto. Para o cálculo do momento de inércia da patinadora com o braço aberto, temos que considerar tanto o momento de inércia de seu corpo, quanto o momento de inércia de seu braço aberto, assim:

$$I_{\text{braço aberto}} = I_{\text{braço aberto}} + I_{\text{corpo}}$$



Ao considerar o corpo humano como um corpo rígido, mais especificamente como um cilindro, em rotação em torno de seu eixo longitudinal, pode-se utilizar a equação do momento de inércia de um cilindro sólido  $I = \frac{1}{2}mr^2$ , e ao considerar o braço como uma barra rígida fixa na extremidade, utiliza-se a equação do momento de inércia de uma barra rígida com eixo de rotação na extremidade:  $I = \frac{1}{3}ml^2$ , onde  $l$  é o tamanho do braço, lembrando que há dois braços envolvidos. (SERWAY; JEWETT, 2014, p. 325).

Assim, o momento de inércia quando os braços estão abertos é de:

$$I_{\text{braço aberto}} = 2 \left( \frac{1}{3} m_{\text{braço}} l^2 \right) + \frac{1}{2} m_{\text{corpo}} r^2$$

$$I_{\text{braço aberto}} = 2 \left[ \frac{1}{3} (4)(1)^2 \right] + \frac{1}{2} (50)(0,2)^2$$

$$I_{\text{braço aberto}} = 2,67 + 1$$

$$I_{\text{braço aberto}} = 3,67 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Para o cálculo do momento de inércia da patinadora ao fechar o braço, foi considerada o momento de inércia de seu corpo, igual ao anterior, e o momento de inércia de seu braço fechado, onde foi utilizada a ideia de que ele é um aro adicional em torno do cilindro (corpo). Para essa abordagem, a espessura dos braços não influencia no tamanho do cilindro, então o raio usado será o mesmo do anterior. Assim:

$$I_{\text{braço fechado}} = I_{\text{braço fechado}} + I_{\text{corpo}}$$

$$I_{\text{braço fechado}} = 2(m_{\text{braço}} r^2) + \frac{1}{2} m_{\text{corpo}} r^2$$

$$I_{\text{braço fechado}} = 2([(4)(0,2)^2]) + \frac{1}{2} (50)(0,2)^2$$

$$I_{\text{braço fechado}} = 0,32 + 1$$

$$I_{\text{braço fechado}} = 1,32 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Pode-se perceber que ao fechar o braço, o valor do momento de inércia diminui, conforme foi visto nas considerações iniciais. Agora, tendo a velocidade inicial de giro, com os braços abertos, como 1,5 rev/s, vem que:

$$\omega_{\text{braço fechado}} = (I_{\text{braço aberto}} \cdot \omega_{\text{braço aberto}}) : (I_{\text{braço fechado}})$$

$$\omega_{\text{braço fechado}} = (3,67 \cdot 1,5) : (1,32)$$

$$\omega_{\text{braço fechado}} = 4,17 \text{ rev/s}$$

Ou seja, a velocidade final do giro com os braços fechados chega a, aproximadamente, 4 rev/s.



Na *Etapa 3*, de interpretação e validação de resultados, é possível observar que a velocidade do patinador mais que dobra ao realizar esse movimento. Mas mesmo com todas as leituras e cálculos, não é possível chegar ao número exato de quantos giros um patinador pode fazer, pois também entra em conta a sua experiência e treinamento. De acordo com as leituras feitas e vídeos sobre o esporte (TANAKA, 2022), para competições, um patinador que consegue dar mais de 10 giros, já é considerado muito experiente e de alta performance. Tendo como base os dados aqui utilizados, seria um movimento que duraria uns três segundos, e observando algumas rotinas, é visto que é um tempo coerente com o calculado. Assim, não seria recomendado que uma pessoa iniciante em patinação já fizesse um movimento como esse, já que exige demais de seu corpo, embora seja algo mais comum para atletas profissionais.

### Considerações Finais

Com a proposta atual de reformulação do Ensino Médio e também com as adequações necessárias nas práticas de sala de aula nos Anos Finais do Ensino Fundamental devido à implementação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018), a demanda pela formação e professores com conhecimentos multidisciplinares será cada vez maior. Por isso, experiências que permitam o licenciando de áreas afins, como é o caso da Matemática e da Física, que contemplem aspectos como os preconizados pela Modelagem Matemática, revelam-se muito oportunas e promissoras.

Considerando que a formação de um professor deve atender às demandas legais e de ordem prática relacionadas ao seu campo de atuação profissional, diante das orientações presentes no Currículo da Rede Estadual Paranaense (CREP) (PARANÁ, 2020), vinculado ao Referencial Curricular do Paraná, que, por sua vez, orienta-se pela BNCC, investigou-se possibilidades para efetivar propostas de uso da Modelagem Matemática em um curso de Licenciatura em Matemática, de modo especial, para a abordagem de temas da Física.

No trabalho de conclusão de curso, que inspirou a proposição desta comunicação científica, foram exploradas três situações e propostos três encaminhamentos para atividades de Modelagem serem desenvolvidas em aulas da disciplina de Física Teórica 1 de um curso de Licenciatura.

A proposta da terceira atividade, escolhida para ser apresentada e discutida neste texto, foi concebida como um caso a ser desenvolvido no Momento 3 de familiarização de acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2020), no qual tanto a situação-problema, quanto os dados e



encaminhamentos são buscados pelos estudantes. Ela é um exemplo de que podemos ter a inspiração para uma atividade vinda de vários lugares, já que a mesma foi pensada após o contato com um filme que abordou os conceitos de inércia e conservação do momento angular em um exercício de patinação no gelo. Isso levou a desenvolver a atividade que procurava saber qual a velocidade que um patinador consegue chegar ao realizar o giro e quantos giros podem ser feitos. Embora o esboço do caso de Modelagem pareça simples, essa questão foi um pouco mais complicada, pois algumas simplificações que exigiam considerável entendimento das teorias físicas subjacentes foram necessárias para que conseguíssemos chegar a uma resposta, como adotar que o corpo de um patinador é um cilindro, o tamanho de seu braço, uma aproximação de altura e de massa. Vale destacar que todas as simplificações precisam ser feitas pelo estudante e não pelo professor, como usualmente ocorre, e aceitas passivamente pelo estudante. Nessa atitude reside um diferencial das propostas de ensino por meio da Modelagem. Nessa atividade foi possível calcular a velocidade final de um giro, mas não há como dizer quantos giros são possíveis, pois para isso, é necessário levar em conta as habilidades do patinador. O que temos como certeza, devido às leituras feitas, é que um patinador que consegue chegar aos 10 giros, já é considerado um atleta de alta performance e muito experiente.

Logo podemos perceber que propostas de uso da Modelagem como estratégia de ensino e aprendizagem abrem espaço para questionamentos e pesquisas que os exercícios tradicionais usualmente não demandam, levando assim a um estudo mais profundo dos temas tratados, bem como sua consideração no mundo real. Também é possível que ao final da atividade não se possam responder às perguntas feitas inicialmente, porém devemos entender que mais do que a obtenção de um valor numérico como resultado, vale a oportunidade de vivência “ação de modelador” por parte do estudante, preconizada por Silva (2007).

Este trabalho nos permitiu estudar e formular essas atividades visando uma melhor aprendizagem do estudante. Também nos fez aspirar futuros estudos como, por exemplo, qual seria a melhor forma de introduzir atividades de Modelagem para estudantes da graduação, ou quais seriam os impactos que a introdução dessas atividades proporcionaria na futura atuação profissional de licenciandos. Atualmente, está em fase de planejamento a execução destas atividades em aulas regulares da referida disciplina que ocorrerão do segundo semestre letivo de 2022.



## Referências

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2020. 1 ed. 2 reimpressão.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. 4. ed. São Paulo: Contexto, 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

CONFEDERAÇÃO BRASILEIRA DE DESPORTOS NO GELO. **A Patinação Artística**. 2022. Disponível em: <http://www.cbdg.org.br/modalidades/patinacao-artistica/>. Acesso em: 27 jun. 2022

HALLIDAY, D; RESNICK, R; WALKER, J. **Fundamentos de física**. volume 1. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

PARANÁ, SEED. **Currículo da Rede Estadual Paranaense**. 2020. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=1669>. Acesso em: 18 jul. 2021.

SERWAY, R. A.; JEWETT, J. W. **Princípios de Física**: volume 1. São Paulo: Cengage Learning, 2014. Tradução da 5ª edição norte-americana.

SILVA, D. K. Ações de modelagem para a formação inicial de professores de Matemática. In: BARBOSA, J.C.; CALDEIRA, A.D.; ARAÚJO, J.L. **Modelagem matemática na educação matemática brasileira**: Pesquisas e Práticas Educacionais. Recife: Sbem, 2007. v.3, p. 215-232.

SILVA, D. K.; DALTO, J. O. Modelagem matemática na formação de professores: compartilhando uma experiência. In: ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J. L.; BISOGNIN, E. **Práticas de modelagem matemática na educação matemática**: relatos de experiências e propostas pedagógicas. Londrina, PR: EDUEL, 2011. p. 181-200.

SONHOS no Gelo. Direção: Tim Fywell. Produção: Bridget Johnson. [S.l]: Walt Disney Pictures, 2005. 1DVD (98 min), color.

TANAKA, Y. **Aprenda o idioma da patinação artística**. 2022. Disponível em: <https://olympics.com/pt/noticias/aprenda-o-idioma-da-patinacao-artistica>. Acesso em: 27 jun. 2022.

TIPLER, P. A.; MOSCA, G. **Física para cientistas e engenheiros**: volume 1. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014.