



FORMALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA: um estudo de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem

Gabriel dos Santos e Silva
Universidade Estadual de Londrina - UEL
gabriel.santos22@gmail.com

Lucas de Souza Venturini
Universidade Estadual de Londrina - UEL
s.lucasventurini@gmail.com

José Vinícius Inacio de Souza
Universidade Estadual de Londrina - UEL
jose-vis@hotmail.com

Resumo: O objetivo deste artigo é apresentar um estudo do processo de formalização em uma trajetória hipotética de aprendizagem à luz de aspectos da Educação Matemática Realística. De maneira geral, a Educação Matemática Realística (RME) é uma abordagem ao ensino de matemática em que a matemática não é vista como uma ciência pronta e acabada, e sim como uma atividade humana, e, portanto, a aprendizagem matemática é uma atividade social. Nessa perspectiva, aprendizagem se dá na passagem entre níveis em um processo de formalização, ou seja, em um processo em que atividades matemáticas menos formais são refinadas afim de tornarem-se mais formais. Para a análise, foi selecionada a monografia de Prestes (2013), pelo fato de ela trabalhar com uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem, objeto principal de análise neste artigo. Pode-se reconhecer indícios de formalização quando o aluno reconhece similaridades; refina termos usados para descrever um objeto matemático; sintetiza uma relação em uma equação matemática ou representa uma relação determinada em uma fórmula.

Palavras-chave: Educação Matemática Realística. Matematização. Formalização. Trajetória Hipotética de Aprendizagem.

INTRODUÇÃO

Nos estudos a respeito da Educação Matemática Realística (RME¹), autores afirmam que a aprendizagem em matemática passa por níveis de aprendizagens. Esses níveis vão se constituindo ao passo que os estudantes vão tornando mais formais suas produções, estratégias, resoluções (SILVA, 2018). Neste artigo, denominaremos esse processo de formalização. A cada nível, as produções dos estudantes são utilizadas como ponto de partida para a formalização de novos níveis, contribuindo, assim, para que reinventem conteúdos de matemática já desenvolvidos pela humanidade.

¹ *Realistic Mathematics Education.*

Conhecer aspectos relacionados à formalização em matemática é um assunto relevante ao passo que, de acordo com a RME, esse processo está relacionado à aprendizagem (GRAVEMEIJER, 2008). Foi escolhida, então, uma monografia de especialização em Educação Matemática que apresenta uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem para analisar a formalização presente na descrição elaborada pelo pesquisador à luz dos aspectos da Educação Matemática Realística. Nesse ínterim, temos por intenção fazer uma primeira investigação das formalizações propostas pelo pesquisador, para inserirmo-nos na discussão a respeito do tema.

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA

A Educação Matemática Realística é uma abordagem voltada ao ensino de matemática pensada no início dos anos 1960, tendo como fundador Hans Freudenthal (1905-1990). Essa abordagem surgiu como reação ao Movimento da Matemática Moderna e às abordagens estruturalista, mecanicista e empirista do final dos anos 1950. A principal crítica da RME ao ensino tradicional é o fato do professor, inicialmente, tratar de aspectos formais da matemática, para então apresentar aplicações.

Na Educação Matemática Realística, a matemática não é vista como uma ciência pronta e acabada, e sim como uma atividade humana, ou seja, deve “ficar perto dos estudantes e ser relevante para a sociedade, a fim de ser de valor humano” (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, p. 10, tradução nossa).

A aprendizagem matemática é uma atividade social, e, portanto, a matematização é uma das bases, ou seja, deve ser dada aos estudantes a oportunidade de seguir caminhos que foram trilhados pelos matemáticos para desenvolver o conhecimento historicamente acumulado e validado. Desse modo, o estudante é o agente principal, responsável pelo próprio aprendizado. Pode-se resumir esse princípio como “aos alunos é dada a oportunidade guiada de ‘reinventar’ a matemática, de modo que possam aprender matemática matematizando, isto é, vivenciando processos similares aos dos matemáticos de fazer matemática” (FREUDENTHAL, 1991). Isso vai em uma direção oposta ao ensino tradicional, em que o professor tem o papel de único responsável em relação ao conhecimento e responsável por transmiti-lo.

Algumas atividades nas quais pode-se reconhecer matematização são:

- identificar as especificidades matemáticas no contexto geral;
- esquematizar;
- formular e visualizar o problema;
- descobrir relações e regularidades;

- reconhecer similaridades em diferentes problemas
- representar uma relação em uma fórmula;
- provar regularidades;
- refinar e ajustar modelos;
- combinar e integrar modelos;
- generalizar (DE LANGE, 1999, p. 18).

Nessa perspectiva, os estudantes são orientados a construir a matemática pela reinvenção, utilizando dos conhecimentos prévios dos mesmos. O papel do professor segundo a RME é o de orientador, devendo “propor situações que oportunizem a imersão de ideias e conceitos matemáticos a partir da organização matemática de situações, favorecendo a oportunidade de o aluno ser construtor/elaborador/reinventor da matemática” (MENDES, 2014, p. 22). O professor se torna o guia, responsável por intervenções, discussões e escolha das tarefas. Isso não exclui a responsabilidade do professor de dominar aspectos do conhecimento matemático, o conhecimento acumulado e validado historicamente, pois é necessário ter ciência do caminho que os estudantes podem percorrer em seu processo de reinvenção a fim de orientá-los em busca das normas da comunidade matemática, em seguida à matemática formal. A formalização é uma etapa final do processo de aprendizagem, e não o inicial.

A Educação Matemática Realística entende que a aprendizagem se dá na passagem entre níveis em um processo de *formalização*, ou seja, em um processo em que atividades matemáticas menos formais são refinadas a fim de tornarem-se mais formais. Isso não ocorre, necessariamente, de maneira suave ou linear, mas pode acontecer ao passo que os estudantes lidam com suas atividades matemáticas que “ativam e – quando necessário – induzem a invenção de uma estratégia mais avançada em cada nível” (AMERON, 2002, p. 76, tradução nossa).

Para que a formalização ocorra, é essencial iniciar o processo a partir das produções dos próprios alunos, uma vez que “trabalhar com o que os estudantes já sabem é o primeiro passo para que, por meio de intervenções e orientações do professor, o estudante aprenda” (SILVA, 2018, p. 25).

Em relação ao termo “realístico” do nome da abordagem, pode-se dizer que está associado a tudo aquilo que pode ser real para as pessoas. Isso inclui o que efetivamente está na realidade, o que poderia ser real, o que é fantasioso e até mesmo a própria matemática (SILVA; PRESTES; FORSTER, 2019). Na RME, a função do professor é tratar de contextos próximos à realidade dos estudantes, não necessariamente presentes no cotidiano, ou auxiliá-los a se aproximar de novos contextos que possam ser relevantes a eles.

MÉTODO

Para a análise, o trabalho selecionado foi a monografia de Diego Barboza Prestes (PRESTES, 2013), monografia apresentada ao curso de Especialização em Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina no ano de 2013, sob orientação da Profa. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco, que tem como título: Proposta de Uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem.

A monografia foi escolhida pelo fato de ela trabalhar com uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem - THA, aspecto principal a ser analisado neste artigo. Outra justificativa é que o autor da monografia é um membro participante do GEPEMA² – Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação – da Universidade Estadual de Londrina, assim como os autores deste artigo.

Uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem é uma descrição hipotética de uma aula, cuja sua missão é “supor antecipadamente a relação entre a meta que se pretende alcançar, o raciocínio a respeito das decisões que o professor deve tomar e as hipóteses desse percurso” (PRESTES, 2013, p. 12).

Na monografia de Prestes (2013), o autor faz uma descrição hipotética de uma aula cuja intenção é a formalização da relação de Euler ($V + F = A + 2$) para poliedros convexos, a partir de materiais manipuláveis em atividades que inicialmente envolvem contagem, organização de informações. Cabe ressaltar que a trajetória é hipotética e, portanto, os diálogos também são hipotéticos. Entretanto, os diálogos foram elaborados segundo a experiência profissional do autor da monografia sob os cuidados de sua orientadora. Tal experiência envolve o trabalho com esse conteúdo (como professor de Matemática), leitura de textos da área e reflexões acerca do tema.

Para a análise, utilizou-se as orientações presentes na Análise de Conteúdos (BARDIN, 2016). Inicialmente foi feita uma leitura inicial da trajetória proposta por Prestes (2013). Em seguida, recortou-se os excertos do texto que haviam indícios de formalização, ou seja, indícios do reconhecimento de algum processo de refinamento matemático de alguma estratégia, conceito, linguagem. Por fim, discutiu-se as relações entre os excertos e a Educação Matemática Realística.

MODELOS EMERGENTES NA TRAJETÓRIA DE ENSINO E APRENDIZAGEM

² <http://www.uel.br/grupo-estudo/gepema/>

Para iniciar a aula, Prestes (2013) propõe que o professor dê aos estudantes sólidos geométricos para que realizem contagens. Inicialmente, espera que os alunos contem apenas quantos sólidos tem. Então o professor pergunta se esse é o único tipo de contagem que pode ser realizada a partir dos sólidos.

[...]

Aluno: Não, podemos contar a quantidade de sólidos que rolam e a quantidade de sólidos que não rolam.

[...]

Professor: Podem sim, mas podemos também associar a nomenclatura desses sólidos a uma de suas características? Aliás, qual é uma de suas características?

Aluno: Eles rolam.

Professor: Por que esse tipo de sólido rola?

Aluno: Porque possui uma parte arredondada.

Professor: Isso mesmo. E quanto à nomenclatura relacionada a essa característica, alguém tem alguma ideia?

[...]

Quadro 1 – Excerto da monografia contendo diálogo hipotético entre professor e aluno
Fonte: Prestes (2013)

Nos trechos identificados acima, o aluno inicia afirmando que existem sólidos que rolam e outros que não rolam. Através de intervenções do professor, o aluno muda sua fala, que inicialmente é menos formal, para uma mais formalizada. Sendo assim, nesse trecho identificamos que há uma *mudança na fala do aluno* de uma *menos formal para uma mais formal* quando o aluno deixa de usar a expressão “sólidos que rolam” por “sólidos com partes arredondadas”.

Além disso, podemos inferir que o aluno passou de um nível menos formal para um mais formal quando identificou que os “sólidos que rolam” só “rolam” porque possuem uma parte arredondada, o que caracteriza que *reconheceram similaridades*.

A trajetória continua como segue.

[...]

Professor: Que outros tipos de poliedros temos?

Aluno: Esses que possuem duas bases idênticas e lados retos.

Professor: Você poderia explicar de outra maneira?

Aluno: Posso tentar. Estou me referindo a esses poliedros que possuem a parte que está apoiada sobre a mesa e a parte contrária a esse lado, voltada para cima, idênticas e os lados que ficam nas laterais, retos.

[...]

Professor: Agora que vocês sabem como são chamados os poliedros que possuem essa característica, como podemos classificar os poliedros?

Aluno: Pirâmides, prismas e outros que não são pirâmides nem prismas.

[...]

Quadro 2 – Excerto da monografia contendo diálogo hipotético entre professor e aluno
Fonte: Prestes (2013)

Nesse trecho vemos que o aluno sabia da existência de outros tipos de poliedro, porém não utilizava nenhum nome para eles, partindo então para a descrição do objeto que imaginou. O professor, em seu papel de orientador, guia o aluno para uma formalização de suas ideias até que este conclui que existem pirâmides, prismas e “outros que não são nem pirâmides nem prismas”. Podemos inferir que o aluno passou de um nível menos formal para um mais formal em um processo de *refinamento* quando, ao descrever aspectos dos sólidos, o professor ajuda-o a nomeá-los e ele consegue concluir que existem poliedros que são pirâmides, outros que são prismas e outros que não se encaixam nas outras duas classificações.

[...]

Professor: E as pirâmides e prismas, como podemos nomeá-los?

Aluno: Da mesma maneira, pois esses sólidos também são poliedros.

Informe aos alunos que as pirâmides e os prismas também podem ser nomeados de acordo com o polígono que compõe sua base, por exemplo, se a base de uma pirâmide é um triângulo, podemos chamá-la de pirâmide de base triangular, se a base de um prisma é um pentágono, podemos chamá-lo de prisma de base pentagonal.

Aluno: Então uma pirâmide de base triangular pode ser chamada tanto de pirâmide de base triangular como tetraedro?

[...]

Quadro 3 – Excerto da monografia contendo diálogo hipotético entre professor e aluno
Fonte: Prestes (2013)

O trecho acima apresenta uma das orientações do autor ao professor, para que os alunos sejam guiados ao objetivo final. E, com sucesso, o professor consegue levar ao aluno a uma formalização de que “uma pirâmide de base triangular pode ser chamada tanto de pirâmide de base triangular como tetraedro”.

É possível notar que o aluno *relaciona dois objetos matemáticos com nomes diferentes* e os *conecta* de modo que, por mais que sejam escritos com nomes diferentes, representam objetos iguais uma vez que contêm as mesmas características. Nesse caso, o professor oferece ao aluno a oportunidade de não olhar para a matemática como um conjunto de conteúdos independentes cujos domínios não estão ligados, mas que os domínios são inter-relacionados.

[...]

Professor: Observe o que vocês registraram na lousa e verifiquem se há alguma regularidade.

Aluno: Eu vi uma regularidade, a quantidade de faces e vértices de cada uma das pirâmides é igual.

Professor: Então podemos afirmar que em todas as pirâmides a quantidade de vértices e faces é igual?

Aluno: Sim, vale para todas as pirâmides.

Professor: Mas como você chegou a essa conclusão?

Aluno: Porque imaginei outras pirâmides e em cada uma delas a quantidade de faces e vértices é igual.

[...]

Quadro 4 – Excerto da monografia contendo diálogo hipotético entre professor e aluno
Fonte: Prestes (2013)

No excerto acima, o encontro da regularidade em relação às pirâmides é obtido por meio de estratégias de contagem que são informais do ponto de vista da propriedade das pirâmides que podem ser deduzidas, validadas e provadas. Tais estratégias informais demandam a *busca de especificidades matemáticas em um contexto geral*. Isso significa que, ainda que iniciando com estratégias informais, propriedades formais podem ser deduzidas e, futuramente se possível, validadas e provadas.

Por fim, no excerto, o professor o questiona perguntando “então podemos afirmar que em todas as pirâmides a quantidade de vértices e faces é igual?” E o aluno responde à pergunta do professor *generalizando* que para todas as pirâmides a relação é válida.

[...]

Professor: Será que podemos determinar outra regularidade associando a quantidade de arestas, faces e vértices?

[...]

Aluno: Em cada caso, a soma é duas unidades a mais que a quantidade de arestas. Eu posso afirmar que isso é uma regularidade?

[...]

Professor: Mas que relação é essa?

Aluno: A soma da quantidade de vértices e faces é igual à quantidade de arestas mais dois.

Professor: É possível escrever essa sentença com linguagem matemática?

Aluno: Sim.

Professor: Então escreva na lousa.

Aluno: vértices + faces = arestas + 2

Professor: Verifique se essa relação é válida para todos os poliedros nos quais vocês fizeram a contagem.

Aluno: Sim, é válida.

Professor: Podemos abreviar essa relação?

Aluno: Sim, podemos utilizar a inicial de cada palavra, assim: **A** corresponderá à quantidade de arestas, **F** à quantidade de faces e **V** à quantidade de vértices.

Professor: Como fica essa relação de acordo com a abreviação?

Aluno: $V + F = A + 2$

[...]

Quadro 5 – Excerto da monografia contendo diálogo hipotético entre professor e aluno
Fonte: Prestes (2013)

Nos trechos destacados acima, o aluno, com orientação do professor, encontra outra regularidade ao analisar o quadro feito por eles. É possível afirmar que o estudante passou por quatro formalizações. A primeira está no trecho “Em cada caso, a soma é duas unidades a mais que a quantidade de arestas. Eu posso afirmar que isso é uma regularidade?”. O aluno identificou outra regularidade, o que caracteriza uma formalização em relação às quantidades que contaram inicialmente. A segunda está na fala “A soma da quantidade de vértices e faces é igual à quantidade de arestas mais dois”. É possível observar que da primeira formalização para a segunda ele refinou o pensamento, conseguindo afirmar mais claramente a regularidade que havia encontrado. A terceira: “vértices + faces = arestas + 2”. O aluno passa de uma linguagem

materna, escrita por extenso e *sintetiza em uma equação matemática*, ainda que escrita com palavras inteiras. Por último, na quarta, “ $V + F = A + 2$ ”, o aluno refina ainda mais a equação que havia escrito, *representando a relação determinada em uma fórmula* chegando na relação escrita matematicamente.

Tal relação é conhecida por relação de Euler, apresentada e provada pelo matemático Leonhard Euler em 1752. Na proposta de Prestes (2013), a intenção principal do professor é que os alunos, por meio de suas próprias estratégias e orientações do professor, possam reinventar a relação estabelecida por Euler, formalizando, passo a passo, etapas para a elaboração desse conteúdo. Não significa que criaram algo novo do ponto de vista do conhecimento matemático historicamente acumulado e validado, mas novo para eles, que se tornam autores de seus conhecimentos, portanto responsáveis por ele.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Neste artigo, tivemos por objetivo apresentar um estudo do processo de formalização em uma trajetória hipotética de aprendizagem à luz de aspectos da Educação Matemática Realística. Para tanto, apresentamos excertos da THA desenvolvida por Prestes (2013) e fizemos relações com aspectos da Educação Matemática Realística.

De maneira geral, reconhecemos indícios de formalização nos momentos em que o aluno

- reconhece similaridades;
- refina termos usados para descrever um objeto matemático;
- relaciona dois objetos matemáticos com nomes diferentes;
- conecta dois objetos matemáticos com nomes diferentes;
- busca especificidades matemáticas em um contexto geral;
- generaliza uma propriedade matemática para objetos com mesma denominação;
- sintetiza uma relação em uma equação matemática;
- representa uma relação determinada em uma fórmula.

Tais indícios foram reconhecidos em situações em que os estudantes iniciam apresentando ao professor, por meio da linguagem oral, escrita, aspectos e, em seguida, apresentam novamente de maneira mais formal. Isso se deve às intervenções do professor, às tarefas e às oportunidades criadas intencionalmente pelo professor. Além disso, para que o professor tenha indícios de formalização, é necessário que os estudantes manifestem em suas

produções tais mudanças. Isso significa que processos de formalização podem ocorrer mesmo quando o professor não tem indícios. Mas esses que são manifestados podem contribuir para que o professor tenha informações a respeito da aprendizagem dos estudantes.

É possível observar que as ações nas quais se reconhece indícios de formalização têm relação com as atividades nas quais se reconhece matematização. Isso ocorre porque o contexto de ensino suscitado pela Educação Matemática Realística fomenta a matematização e porque, segundo Silva (2015), os aspectos da RME, como matematização, níveis de aprendizagem, reinvenção guiada, são processos entrelaçados.

Por fim, entendemos que este artigo tem caráter de discutir o tema formalização, mas apresenta limitações, sobretudo pelo fato de analisar um contexto hipotético. Entretanto, pode-se usar alguns dos resultados apresentados neste texto para fazer outros tipos de estudos e análises em contextos reais, hipotéticos e em diferentes níveis de ensino. De qualquer modo, esperamos que a discussão feita aqui possa suscitar reflexões acerca do tema.

REFERÊNCIAS

- AMERON, Barbara Ann van. **Reinvention of early algebra**: developmental research on the transition from arithmetic to algebra [S.l.]: [s.n.] - Tekst. - Proefschrift Universiteit Utrecht, 2002.
- BARDIN, Laurence. **Análise de Conteúdo**. Tradução: Luís Augusto Pinheiro. São Paulo: Edições 70, 2016.
- DE LANGE, Jan. **Framework for classroom assessment in mathematics**. Madison: WCER, 1999.
- FREUDENTHAL, Hans. **Revisiting Mathematics Education**. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.
- GRAVEMEIJER, Koeno. RME theory and mathematics teacher education. In: **International handbook of mathematics teacher education**, Rotterdam: Sense Publisher, v. 1, p. 238-302, 2008.
- MENDES, Marcele Tavares. **Utilização da prova em fases como recurso para regulação da aprendizagem em aulas de cálculo**. 2014. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.
- PRESTES, Diego Barboza. **Proposta de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem**. 2013. 39f. Monografia (Especialização em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.
- SILVA, Gabriel dos Santos e. PRESTES, Diego Barboza. FORSTER, Cristiano. **Boas tarefas**

de matemática na perspectiva da Educação Matemática Realística. In: XIII Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), 2019, Cuiabá. Anais do XIII ENEM, 2019.

SILVA, Gabriel dos Santos e. **Uma configuração da reinvenção guiada.** 2015. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

_____. **Um olhar para os processos de aprendizagem e de ensino por meio de uma trajetória de avaliação.** 2018. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, Marja. **Assessment and Realistic Mathematics Education.** Utrecht: CD-β Press/Freudenthal Institute, Utrecht University. 1996.