



ESTRATÉGIAS HEURÍSTICAS REVELADAS NA PRODUÇÃO ESCRITA EM UMA ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Thais Maya Koga
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR
thaismkoga@outlook.com

Karina Alessandra Pessôa da Silva
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR
karinasilva@utfpr.edu.br

Jader Otávio Dalto
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR
jaderdalto@utfpr.edu.br

Resumo: Apresentamos os resultados de uma investigação da produção escrita de estudantes da disciplina de Pré-Cálculo do curso de licenciatura em Química, com o objetivo de identificar Estratégias Heurísticas, no encaminhamento de uma atividade de modelagem matemática. Os estudantes deveriam elaborar e responder a um problema, a partir de dados fornecidos pelo enunciado. Ao analisar a produção escrita dos grupos, classificamos os problemas estudados em Não problema; Problema Simples e Problema de Modelagem. A partir disso, analisamos e verificamos algumas dificuldades relacionadas ao aprendizado, bem como estratégias utilizadas pelos grupos no desenvolvimento de uma atividade de modelagem. Por fim, inferimos que a produção escrita revelou que as Estratégias Heurísticas são importantes instrumentos na construção do modelo matemático.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Produção Escrita. Estratégias Heurísticas.

INTRODUÇÃO

Nos cursos universitários em que disciplinas matemáticas como o Cálculo Diferencial e Integral I e II são obrigatórias, comumente nos deparamos com as seguintes situações: elevados índices de evasão, reprovação e o baixo rendimento. Essas situações, de forma geral, geram obstáculos na aprendizagem dos estudantes e inquietam pesquisadores e professores na busca de alternativas com o intuito de revertê-las.

Neste sentido, segundo Freitas (2008), essa problemática pode ser de natureza cognitiva, didática ou epistemológica. Isso implica dizer, conforme o mesmo autor, que possivelmente os alunos não são capazes de compreender as complexidades do Cálculo, ou, a metodologia de ensino não é a mais adequada, ou ainda, que as deficiências referentes são anteriores ao ensino de Cálculo, isto é, em conteúdos básicos fundamentais que estruturam a base da disciplina.

Levando em consideração as ementas de disciplinas de Pré-Cálculo, Cálculo Diferencial e Integral I e II, evidenciamos que o conhecimento sobre o conteúdo de funções consiste em uma base estruturante para abarcar os demais conteúdos. Pensando nisso, planejamos e desenvolvemos uma atividade de modelagem matemática cuja situação-problema possibilita abordar função. Tal atividade foi desenvolvida em uma turma de estudantes de Pré-Cálculo de um curso de Licenciatura em Química de uma Universidade Pública do Norte do Paraná. Entendemos, assim como pontuam Almeida; Silva e Vertuan (2012) que o encaminhamento de uma atividade de modelagem matemática se origina de uma situação problemática e, por meio de procedimentos matemáticos, chega-se a uma situação final que representa uma solução para a mesma.

Estudos realizados por Stender (2018) mostram que o encaminhamento para o desenvolvimento de uma atividade de modelagem pode ser descrito em termos de estratégias heurísticas. Em nossa investigação, intentamos investigar *Que estratégias heurísticas são reveladas nas produções escritas em uma atividade de modelagem matemática?* Para isso, nos fundamentamos em Buriasco (2004) que defende que a produção escrita dos alunos é uma rica fonte para entender os processos de ensino e aprendizagem bem como os procedimentos e as estratégias utilizadas por eles para resolver problemas.

Os resultados de nossa investigação foram organizados neste artigo em cinco seções subsequentes além dessa introdução. Na primeira delas, tratamos da modelagem matemática e das estratégias heurísticas pontuadas por Stender (2018). A segunda seção é destinada à análise da produção escrita como prática investigativa. Partindo então, para os procedimentos metodológicos e a análise das produções escritas realizadas em sala de aula. Por fim, destacamos algumas considerações a respeito das nossas inferências sobre os resultados obtidos.

MODELAGEM MATEMÁTICA E AS ESTRATÉGIAS HEURÍSTICAS

Na Educação Matemática existem muitas caracterizações para Modelagem Matemática. Para nossa investigação, adotamos a Modelagem Matemática como alternativa pedagógica, definida por Almeida; Silva e Vertuan (2012). Segundo os autores, uma atividade de modelagem matemática pode ser:

[...] descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final. Nesse sentido, relações entre a

realidade (origem da situação inicial) e Matemática (área em que os conceitos e os procedimentos estão ancorados) servem de subsídio para que conhecimentos matemáticos e não matemáticos sejam acionados e/ou produzidos e integrados. A essa situação inicial problemática chamamos situação-problema; à situação final desejada associamos uma representação matemática, um modelo matemático (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 12).

Os autores explicam ainda que o modelo matemático é “um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática e que tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 13).

Ainda sobre os encaminhamentos de uma atividade de Modelagem Matemática, os autores apresentam cinco fases relativas aos procedimentos necessários para o seu desenvolvimento: inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação.

Para Almeida e Vertuan (2014), a fase de inteiração, é o primeiro contato com o assunto, momento em que o estudante conhece e inteira-se dele, buscando compreender a situação-problema, ou seja, “implica, portanto, em se cercar de informações sobre esta situação por meio de coleta de dados quantitativos e qualitativos, seja mediante contatos diretos ou indiretos” (p. 4). Já a matematização se caracteriza como o momento de transformar “a linguagem natural” em “linguagem matemática”, nesta fase utiliza de conceitos, estratégias e operações matemáticas para resolvê-lo, é o momento de “formulação de hipóteses, seleção de variáveis e simplificações em relação às informações e ao problema definido na fase de inteiração” (p. 5). A resolução é o momento de construção do modelo matemático a fim de resolver o problema. Em seguida, há a interpretação de resultados e finalmente a validação que é o momento em que o modelo criado é avaliado empiricamente e aceito como solução.

Na busca de uma solução para um problema matemático em uma situação de modelagem, podem ser utilizadas estratégias heurísticas. O uso de tais estratégias é uma abordagem bem conhecida na resolução de problemas matemáticos. Partindo da premissa que, em atividades de modelagem, o estudante resolve uma situação-problema, concordamos com Stender (2018) ao afirmar que nas fases de encaminhamento da atividade, podemos identificar a utilização de estratégias em resoluções bem sucedidas.

Desta forma, apresentamos o nosso entendimento a respeito da Heurística, que é uma parte da filosofia que se dedica a inventar maneiras de resolver problemas. Um dos estudiosos dessa ciência foi George Pólya, cientista matemático e professor que em 1945 publicou uma

de suas principais obras “*How to Solve it*”, na qual abordou estratégias de como pensar o problema de modo a descobrir a solução, ou seja, a técnica que vai fazer com que o problema seja resolvido (SANTOS; SOUZA, 2017).

No Quadro 1, apresentamos as estratégias heurísticas listadas por Stender (2018). Essa lista foi elaborada seguindo o método de Pólya e outros.

Estratégia Heurística	Aplicação em Modelagem Matemática
1- Compreender um problema: 1.1- Conversão de dados 1.2- Representação apropriada	São dois aspectos de uma abordagem fundamental em todos os tipos de resolução de problemas, sendo identificados quando o modelo responde a situação inicial pesquisada.
2- Tentativa e Erro: 2.1- Simulações	Possibilita explorar a situação e conseguir um entendimento melhor do problema e das possíveis abordagens. O uso de simulações com ou sem um computador, é uma ampliação da tentativa e erro, uma vez que muitas outras situações complexas podem ser testadas e muitos outros aspectos diferentes podem ser calculados em um curto tempo. Essa estratégia fica visível na atividade com o esboço de gráficos, fórmulas e funções presentes no desenvolvimento, mas às vezes deslocada e/ou ignorada na conclusão.
3- Supersignos:	São instrumentos para estruturar uma situação a fim de organizar o material e reduzir a carga de trabalho da memória operacional. Alguns exemplos do uso dessa estratégia são os encaminhamentos em que observamos a utilização de representação de conjuntos, vetores, matrizes, funções e outras estruturas que visam reduzir a matematização.
4- Uso de simetria	No processo de modelagem é utilizado para simplificar a situação criando um modelo simétrico, reduzindo a complexidade e tornando acessível para uma (primeira) descrição matemática.
5- Dividir em subproblemas	Essa estratégia tende a possibilitar a solução de uma parte do problema de modelagem por vez.
6- Generalização	Significa diminuir certas restrições do problema e então lidar com um problema mais amplo. Assim, suponhamos que pode ser mais fácil resolver a situação-problema devido às restrições omitidas.
7- Pensar Grande	Não se pensar em limites dispensáveis, sair da forma convencional e buscar informações para ir além.
8- Uso de analogias	Na matemática, é comum utilizar a solução de problemas resolvidos em forma de teoremas comprovados. Assim também acontece em um processo de modelagem, pois é possível que resultados obtidos

	anteriormente possam ser utilizados mais tarde.
9- Otimizar	É uma possibilidade de simplificar uma situação real, pode ocorrer na primeira fase da modelagem, durante a exploração dessa situação ou criando exemplos especiais. Mas, basicamente trata-se de identificar o “melhor”, o modelo ideal.
10- Discretização	No processo de modelagem a discretização pode ser usada para construir um modelo real ou para traduzir a linguagem real para a linguagem matemática.
11- Trabalhando de Maneira Invertida	Na análise, inicia-se com o que é requerido, já que por hipótese temos como verdade e a partir disso infere-se sob as consequências.
12- Manter a Abordagem ou Mudar a Abordagem no Momento Certo	É uma das decisões mais desafiadoras da modelagem, pois dispendo de várias maneiras, nenhuma é garantida. Explorar um pouco cada estrada ajuda a tomar a decisão.

Quadro 1- Estratégias Heurísticas

Fonte: adaptado de Stender (2018)

As Estratégias Heurísticas presentes no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, segundo Stender (2018), regulam o trabalho cognitivo, tal como a realização de cálculos, a criação de figuras ou a determinação de uma função. A investigação das estratégias heurísticas utilizadas pelos alunos na resolução de um problema pode ser realizada a partir dos registros escritos realizados por eles durante este processo. Assim, tendo a análise da produção escrita como estratégia de investigação sob uma perspectiva de avaliação como prática de investigação, buscamos:

[...] revelar como os participantes dessas investigações lidam com essas questões, ou seja, que interpretações fazem do enunciado, que estratégias de resolução (entendida com o qual se aborda um problema) e procedimentos de resolução (modo com o qual se desenvolve a estratégia) utilizam para resolvê-las. (SANTOS; BURIASCO, 2015, p.234).

Assim, motivados pelo trabalho de Buriasco (2004), intuímos buscar o “conhecimento escondido”, pela análise da Produção Escrita como pratica de investigação, retratada na próxima seção.

A ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA COMO PRÁTICA DE INVESTIGAÇÃO

A análise da produção escrita como prática de investigação tem sido explorada no Estado do Paraná pelo GEPEMA – Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e

Avaliação, desde 2005. Este grupo, além de estudos relacionados à Avaliação Escolar, também volta sua investigação em Educação Matemática Realística, sendo a produção escrita a principal ferramenta utilizada:

[...] o GEPEMA tem realizado investigações com o intuito de compreender como alunos, e professores que ensinam matemática, lidam com questões abertas de matemática quando apresentadas em situação de avaliação. Com isso, tendo como estratégia de investigação a análise da produção escrita, os estudos buscam, de modo geral, revelar como os participantes dessas investigações lidam com essas questões, ou seja, que interpretações fazem do enunciado dessas questões, que estratégias e procedimentos de resolução utilizam para resolvê-las (SANTOS, 2014, p.19).

Em nossa investigação, partimos de uma situação rotineira que, segundo Santos (2014) são aquelas “questões frequentemente trabalhadas em sala de aula e frequentemente encontradas em livros didáticos”, e objetivamos evidenciar o que revelam a produção escrita dos alunos com relação a uma especificidade da atividade de modelagem matemática. Para isso, nos fundamentamos a respeito da análise da produção escrita, uma vez que:

[...] o professor pode perceber que, por meio dessa resolução, seja ela considerada totalmente correta, parcialmente correta ou incorreta, é possível obter informações sobre o que eles sabem do conteúdo envolvido, ter pistas do que podem vir a saber futuramente, além de também ter pistas de como ele, o professor, pode auxiliá-los em suas aprendizagens (SANTOS; BURIASCO, 2015, p. 236).

Considerando esse entendimento, seguimos os mesmo direcionamentos de Silva e Dalto (2017), leitura das produções de todos os alunos, leitura horizontal, encontrar semelhanças entre as produções, identificar estratégias e procedimentos de resolução mais utilizados. No intuito de analisar o que o aluno demonstra saber.

Assim, buscamos lançar um olhar sobre as produções escritas dos alunos, ao resolverem uma situação problema em um ambiente de modelagem matemática, de modo a investigar as estratégias heurísticas por eles utilizadas.

ATIVIDADE DE MODELAGEM DESENVOLVIDA: DESCRIÇÃO E ANÁLISE

Para evidenciar *Que Estratégias Heurísticas são reveladas nas produções escritas em uma atividade de modelagem matemática?* Analisamos uma atividade desenvolvida por 32 alunos em uma disciplina de Pré-Cálculo, do curso de Licenciatura em Química de uma Universidade Pública do Norte do Paraná. A atividade foi desenvolvida durante duas aulas de

50 minutos geminadas, com os alunos divididos em 6 grupos com média de cinco integrantes, os quais, já possuíam familiaridade com atividades de modelagem matemática.

A figura 1 apresenta a situação-problema entregue aos grupos de alunos, cuja temática é o uso de combustível por um veículo.

Vai de gasolina ou etanol?

Com o interesse de analisar a conveniência da escolha entre os combustíveis: gasolina e etanol de automóveis do tipo flex, desconsiderando fatores como poluição do meio ambiente e conservação do motor. Uma aluna do mestrado profissional coletou os seguintes dados do veículo Ford -Ka+, com motor 1.0 de 3 cilindros, o consumo médio do carro é 8,8 km/l (cidade) e 10,2 km/l (estrada), quando utiliza apenas etanol. Ao abastecer com gasolina, as médias ficam em 13,1, para trechos urbanos, e 15 km/l, ao rodar na estrada. Na Tabela 1, apresentamos três variações de preços dos combustíveis praticados em três diferentes postos neste mês.

Tabela 1: Dados coletados pela aluna em novembro de 2018.

Posto	Gasolina (R\$)	Etanol (R\$)
A	4,29	2,89
B	4,39	2,85
C	4,79	2,99

Fonte: Relatório da aluna

Figura 1 - Atividade de Modelagem Matemática
Fonte: autores

Diante de algumas informações, como modelo do veículo, rendimento/consumo no perímetro urbano e na estrada, além do valor da gasolina e do etanol em três postos diferentes coletados pela primeira autora em novembro de 2018, competiu aos grupos elaborar um problema, definir as variáveis relacionadas, bem como as hipóteses e a deduzir o modelo matemático que possibilitasse dar uma solução para o problema. No momento da entrega da atividade, foi relatado em diário de bordo os procedimentos e etapas seguidos pelo grupo.

Depois de todos os dados coletados, prosseguimos com as análises e concomitante com estudos em trabalhos de autores como Czoher (2017), Santos e Souza (2017), Stender (2018), Silva e Dalto (2017). Dessa forma, realizamos uma análise predominantemente qualitativa dos dados levantados, das produções escritas elaboradas pelos alunos e o diário de bordo da professora, primeira autora deste artigo.

A fim de se realizar uma primeira análise nomeamos os grupos como G1, G2, G3, G4, G5 e G6. A partir da questão que cada grupo enunciou, os agrupamos em três grupos, que foram analisados individualmente, considerando: Não problema, problema simples e problema de modelagem (Quadro 2).

Situação-Problema	Classificação: Não Problema
G1: Analisar a distância por litros gastos, tendo em vista o combustível etanol.	Justificamos a classificação por considerar que não há a busca por uma solução

G2: Qual posto ficaria mais barato, comprar combustível caso escolha fazer um trajeto na cidade utilizando etanol?	desconhecida.
Situação-Problema	Classificação: Problema Simples
G3: Queremos saber: Quantos em R\$ será gasto no Posto A em ambos os combustíveis, para um tanque?	Esta classificação baseou-se em Gonçalves (2006). São os problemas-padrão que, geralmente, aparecem nos livros. A tarefa básica para resolvê-los é identificar quais operações ou algoritmos são mais apropriados.
G4: Qual combustível escolher no posto A para pagar menos e percorre 100 Km na cidade?	
Situação-Problema	Classificação: Problema de Modelagem
G5: Qual combustível escolher no posto A?	Seguindo a ideia de Onuchic e Allevato (2005), um problema de modelagem pode ser entendido como o que não se sabe fazer, mas que desperta o interesse em solucionar.
G6: Qual combustível compensa mais?	

Quadro 2 - Classificação de Situação-Problema
Fonte: Autores

O agrupamento relativo ao *não-problema* considera que a questão elaborada não busca algo desconhecido, isto é, a solução pode ser obtida pela leitura e interpretação de dados contidos no enunciado, a solução para G1: 8,8Km/l na cidade e 10,2Km/l na cidade, já para G2: Posto B – Menor preço R\$ 2,85 . Entendemos que mesmo que haja a utilização de estratégias, a carência da primeira Heurística, segundo Stender (2018), inviabiliza o processo e consequentemente podemos inferir que não houve a compreensão da importância do método.

O segundo agrupamento (*problema simples*) levou em consideração que a questão enunciada seria facilmente resolvida com operações básicas, proporcionalidade e algoritmos. Assim, G3, solucionou ao multiplicar o valor do combustível pela capacidade do tanque e a resolução de G4, foi calcular o preço proporcional ao rendimento e encontrar o menor valor. Logo, nos problemas simples a sua resolução conduz a uma resposta e poucas possibilidades de diferentes encaminhamentos. Diante das produções escritas, evidenciamos um processo matemático correto na sua resolução.

Inferimos que os alunos pertencentes aos grupos: G1, G2, G3 e G4 apresentam dificuldades relacionadas ao estudo de funções afins, além de um incômodo com soluções não padronizadas. Mesmo que estas manifestações não sejam o foco deste trabalho, serão consideradas pelo professor na elaboração de atividades que busquem levar ao entendimento e a prática de atividades de modelagem.

No último agrupamento de situação-problema consideramos as questões elaboradas como desconhecidas. Para Abbagnano (2012) caracterizam-se como situações que se diferenciam da noção de teorema. Enquanto que o teorema era concebido pelos matemáticos como qualquer proposição demonstrável, o problema era visto como qualquer proposição que partia de certas condições conhecidas (e assumidas como verdadeiras), para buscar alguma coisa desconhecida. Resumindo, “problemas são proposições demonstráveis que exigem provas ou expressam uma ação cujo modo de execução não é imediatamente certo” (ABBAGNANO, 2012, p. 934).

Então, esse problema não essencialmente matemático, desdobrado por entre as fases de inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação, como sugerem Almeida, Silva e Vertuan (2012), que se desenvolva uma atividade de modelagem, foi chamado de problema de modelagem. Seguimos nossa investigação a fim de evidenciar estratégias heurísticas reveladas na produção escrita dos grupos G5 e G6 na dedução do modelo matemático. Primeiramente identificamos as estratégias utilizadas ao analisar a produção escrita, em seguida, apresentaremos nossas inferências a respeito do que os alunos demonstram saber e as dificuldades no encaminhamento da atividade de modelagem.

Realizando a análise da produção escrita dos dois grupos. Utilizamos o código EHⁿ – EH sigla para estratégia heurística e n é a ordem da estratégia anunciada no quadro 1. Podemos evidenciar que algumas estratégias, como apresentada por Stender (2018) são comuns a qualquer prática de modelagem matemática e não poderia ser diferente nas produções analisadas, são elas: EH¹- Compreensão do problema visto que a solução responde com sucesso a situação-problema elaborada; EH³- Supersignos são evidenciados em forma de função do primeiro grau, nesta análise, pois, simplificam e apresentam a interpretação linear do modelo; EH⁶- Generalização é uma característica do modelo matemático, evidenciada nos encaminhamentos, ao abrir mão de algumas restrições e o modelo verificado de maneira mais ampla; EH⁹- Otimização, simplificação de uma situação real, a partir dos dados fornecidos a situação-problema proposta pelo grupo possibilitou uma “melhor” exploração; EH¹⁰- Discretização, trata-se de traduzir a linguagem real para a linguagem matemática, isto é, fase de matematização.

Já outras são próprias do pensamento dos grupos. Como evidenciamos no G5, a estratégia EH⁸- Uso de analogias quando, após um cálculo realizado, outro é feito de forma similar, mas de maneira simplificada. Além da EH¹², Manter a abordagem é sinalizada no momento em que na finalização do modelo, o grupo, retoma e reforça as hipóteses levantadas na fase de inteiração. No G6 a Divisão em subproblemas EH⁵, foi identificada com a divisão e

resolução do problema em partes para a formação da solução final. Ainda identificamos a EH¹¹, trabalhar de maneira invertida, quando se inicia com o que é requerido, já que por hipótese temos como verdade e a partir disso infere-se sob as consequências para chegar a conclusão do problema.

Na figura 2, são apresentadas as Estratégias Heurísticas reveladas na produção escrita de G5 no encaminhamento da atividade de modelagem matemática.

Tabela 1: Os dados coletados pela aluna

Posto	Gasolina (R\$)	Etanol (R\$)
A	4,29	2,89 (67,36)
B	4,39	2,85 (64,92)
C	4,79	2,99 (62,42)

Fonte: Relatório da aluna.

ESCOLHER GASOL. ETANOL ETANOL

EH⁸: Uso de analogia
Utilização de uma situação já resolvida.

Problema a ser estudado:
QUAL COMBUSTÍVEL ESCOLHER NO POSTO A?

Variáveis:
CUSTO BENEFÍCIO

Hipóteses:
MELHOR ESCOLHA É AQUELE MAIS BARATO
CONSIDERAMOS PERCURSO NA CIDADE
MANUTENÇÃO

Dedução do modelo matemático:

Consumo médio
G: 13,1 - 100
E: 8,8 - x
x = 67,18%

PREÇO
G: 4,29 - 100%
E: y - 67,18%
y = 2,88

CONSIDERANDO QUE O CUSTO BENEFÍCIO DE ABASTECER COM GASOLINA É MAIOR, ENTÃO USAMOS COMO 100%. E O RENDIMENTO DO ETANOL REPRESENTA 67,18%. EM RELAÇÃO A GASOLINA, O PREÇO DEVE MANTER A PORCENTAGEM PARA COMPENSAR.
PORTANTO, NO POSTO A COMPENSA ABASTECER COM GASOLINA.
PREÇO DO ETANOL: f(x) = f(g) · 67,18%

EH⁹: Otimizar
Simplificação da situação real.

EH¹⁰: Discretização
Tradução da linguagem real para matemática. (matematização)

EH¹²: Manter a abordagem
Temos a retomada da hipótese, mostrando a decisão de manter a abordagem.

EH¹: Compreensão do problema
O modelo responde a questão inicial.

EH³: Supersinais
Uso da estrutura de função

EH⁶: Generalização
Resolução para qualquer situação relacionada.

Figura 2 – Heurísticas identificadas na resolução do grupo 5
Fonte: relatório dos alunos

O grupo 5, propõe uma situação-problema na qual se deseja descobrir a opção de combustível de melhor custo benefício no Posto A, observamos uma otimização da fase de interação. Em seguida, a matematização, uma discretização da situação, em que nota-se a utilização de regras de três simples para a porcentagem equivalente ao rendimento

considerando o maior rendimento, da gasolina, como 100%, e assim a determinação do valor equivalente de etanol. Após a resolução, o grupo opta por manter-se na abordagem inicial de buscar o menor preço em relação ao rendimento, interpretando a solução, o grupo representa o modelo em forma de função composta, relacionando o preço dos combustíveis, o validam, já que demonstram a compreensão do problema e por fim, generalizam ao inferir que o preço do etanol não pode passar de 67,18% do valor da gasolina para que seja a escolha a ser feita em qualquer posto.

Na figura 3, temos a resolução do outro G6, bem como as Heurísticas reveladas na produção escrita.

Problema a ser estudado:
Qual combustível compensa mais?

Variáveis:
Preço
Desempenho Cidade / estrada

Hipóteses:
mesmo considerando o preço médio dos combustíveis ainda gastamos menos se utilizar o etanol. Terá um valor ^{de etanol} que mesmo menor que a gasolina não irá compensar abastecer com etanol.

Dedução do modelo matemático: Cidade

$$\frac{2,89 + 2,85 + 2,99}{3} = 2,91 \rightarrow \text{1L} \rightarrow R(e) = \frac{2,91}{8,8} \cdot \text{Km}$$

$$\frac{1,9 + 4,39 + 4,79}{3} = 4,49 \rightarrow \text{1L} \rightarrow R(g) = \frac{4,49}{13,1} \cdot \text{Km}$$

Para 100 Km Cidade

$$\frac{100}{8,8} \cdot 2,91 = 33,08 \text{ etanol}$$

$$\frac{100}{13,1} \cdot 4,49 = 34,25 \text{ gasolina}$$

mas use o etanol R\$ 3,02 para cidade

$$\frac{100}{8,8} \cdot 3,02 = 34,31$$

Diferença P(a) - P(etanol)

P(gasolina) - P(etanol)

Cidade: 1,47
Estrada: 1,43

Então,
Quando a diferença de preço for maior que R\$ 1,45 compensará o etanol caso contrário a gasolina.

Estrada

$$\frac{100}{10,2} \cdot 2,91 \rightarrow 28,52 \text{ etanol}$$

$$\frac{100}{13} \cdot 4,49 \rightarrow 29,94 \text{ gasolina}$$

É o preço R\$ 3,06 para use estrada

$$\frac{100}{10,2} \cdot 3,06 = 30,00$$

EH⁹: Otimizar
Simplificação da situação real.

EH¹¹: Maneira Invertida
Inicia-se pelo que é requerido.

EH¹⁰: Discretização
Tradução da linguagem real para matemática. (matematização)

EH³: Supersinais
Uso da estrutura de função

EH⁴: Uso de Simetria
Simplificar a situação com o modelo simétrico.

EH⁵: Subproblemas
Resolução de uma parte do problema por vez.

EH⁶: Generalização
Resolução para qualquer situação relacionada.

EH¹: Compreensão do problema
O modelo responde a questão inicial.

Figura 5 – Heurísticas identificadas na resolução do grupo 6
Fonte: relatório dos alunos

O problema estudado pelo G6, “qual combustível compensa mais?”, seguiu encaminhamentos diferentes do G5, pois, realizada a simplificação da situação real, na inteiração, no início da matematização, observamos a utilização de média aritmética para o preço dos combustíveis e a divisão em subproblemas. Depois, a partir de uma quilometragem fixa o grupo resolveu algebricamente, encontrando o valor pago em relação ao desempenho de cada combustível. A interpretação e validação do modelo em que o etanol compensará quando a diferença entre o preço da gasolina e do etanol não ultrapassar R\$ 1,45.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho permitiu aos autores identificarem que Estratégias Heurísticas, enunciadas por Pólya (1945) e relacionadas à modelagem por Stender (2018), podem ser evidenciadas nas produções escritas de estudantes que resolvem uma situação-problema de modelagem.

Na análise realizada, foi identificada nas produções a utilização das seguintes estratégias heurísticas: Compreensão de problema, Supersignos, Generalização, Otimização, Discretização, Uso de analogias, Manter a abordagem, Divisão em subproblemas e também Trabalhar de maneira Invertida. O que nos permitiu analisar que assim como a prática de modelagem matemática não segue soluções padronizadas, tão pouco lineares, a análise da produção escrita por meio das estratégias heurísticas apontam exatamente esse movimento não-linear, ainda que esteja relacionado à situação investigada. Por conseguinte, consideramos que cumprimos o nosso objetivo de evidenciar as estratégias heurísticas na atividade proposta e observar como elas podem colaborar para o desenvolvimento cognitivo do estudante.

Em razão desta análise podemos inferir que o estímulo à utilização de estratégias heurísticas no encaminhamento de uma atividade de modelagem matemática, no contexto de sala de aula e pela análise da produção escrita, parece contribuir para que se desenvolva uma prática refletida sobre o que se aprende e que, ao mesmo tempo, se identifique fragilidades na aprendizagem que devem ser ultrapassadas, visto que, para nós, professores, a importância da modelagem como alternativa pedagógica é enquanto os problemas são resolvidos, participar e orientar de todas as etapas, até mesmo as abordagens malsucedidas. Já ao ser documentada a produção escrita, firmamos a prática investigativa, logo, podemos (re)conhecer que conhecimentos os estudantes já possuem e quais ainda estão em construção conforme Nagy-Silva; Buriasco (2005).

Portanto, as Estratégias Heurísticas podem ser um importante instrumento para auxiliar nos encaminhamentos com problemas de modelagem matemática por conduzir a uma participação ativa e efetiva dos alunos, aumentando a sua motivação e autoestima, bem como promovendo a autonomia no trabalho da sala de aula. Outras inquietações podem inspirar futuras pesquisas, pois, ao observar as estratégias usadas pelos alunos, pode se estudar os problemas através delas e perceber os pré-requisitos selecionados e aplicados, analisar como as ideias se formam e se modificam dentro do processo de aprendizagem.

REFERÊNCIAS

- ABBAGNANO, N. **Dicionário de filosofia**. 6 ed. São Paulo: Martins Fontes, 2012.
- ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. P, & VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na educação básica**. 1 ed. São Paulo: Contexto, 2012.
- ALMEIDA, L. M. W. & VERTUAN, R. E. Modelagem Matemática na Educação Matemática. In: ALMEIDA, L. M. W., & SILVA, K. A. P. (Orgs.). **Modelagem Matemática em Foco**. 1 ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2014. p. 1-20.
- BURIASCO, R. L. C. Análise da Produção Escrita: a busca do conhecimento escondido. IN: ROMANOWSKI, J. P., MARTINS, P. L. O. & JUNQUEIRA, S. A. (orgs). **Conhecimento Local e Conhecimento Universal: a aula e os campos do conhecimento**. 3 ed. Curitiba: Champagnat. 2004. p. 243-251.
- CZOCHER, J. A. Mathematical Modeling Cycles as a Task Design Heuristic. **The Mathematics Enthusiast**, v. 14, n. 1, p. 129-140, 2017.
- DALTO, J. O. **A produção escrita em matemática: análise interpretativa da questão discursiva de matemática comum à 8ª série do ensino fundamental e a 3ª série do ensino médio da AVA/2002**. 2007. 101 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007.
- FREITAS, J.L.M. (2008) Situações didáticas, Machado, S.D.A. (org), **Educação Matemática: Uma (nova) introdução**. 3ed. São Paulo: Educ. 2008. p. 77-111.
- GONÇALVES, J. L. O. Raciocínio Heurístico e a Resolução de Problemas. **REUNI – Revista UNIJALES**, v. 1, n.1, 2006. p. 499-512.
- NAGY-SILVA, M. C. & BURIASCO, R. L. C. Análise Da Produção Escrita Em Matemática: Algumas Considerações. **Ciência & Educação**. v. 11, n. 3, 2005. p. 1-13.
- ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Orgs.). **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. 2 ed. São Paulo: Cortez, 2004. p. 213 - 231.

SANTOS, E. R. **Análise da produção escrita em matemática: de estratégia de avaliação a estratégia de ensino.** 2014. 159 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2014.

SANTOS, E. R. & BURIASCO, R. L. C. Análise da Produção Escrita em Matemática como uma Estratégia de Ensino: algumas considerações. **Educação Matemática Pesquisa**, v.17, n.1, p.119-136, 2015.

SANTOS, E. R. & BURIASCO, R. L. C. A análise da produção escrita em Matemática como estratégia de avaliação: aspectos de uma caracterização a partir dos trabalhos do GEPEMA. **Alexandria (UFSC)**, v. 9, n.2, p. 233-247, 2016.

SANTOS, L. & SOUZA, P. **A heurística de Pólya e a resolução de problemas de trigonometria.** 2017. 171 F. (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal de Roraima, Boa Vista, 2017.

SILVA, K. A. P.; DALTO, J. O. Uma estratégia de Avaliação de Atividades de Modelagem Matemática. **Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias (en línea)**, v. 12, n. 2, p. 1-17, 2017.

STENDER, P. The use of heuristic strategies in modelling activities. **ZDM: The International Journal on Mathematics Education**, v. 50, n.1-2, p. 315–326, abril 2018.