



DINÂMICA POPULACIONAL: MODELAGEM MATEMÁTICA UTILIZANDO EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Guilherme Henrique dos Santos Ferreira
Universidade do Oeste Paulista- Unoeste
gf976635@gmail.com

Marília Davoli Moreira Lopes
Universidade do Oeste Paulista - Unoeste
marilia@unoeste.br

Monica Fürkotter
Universidade do Oeste Paulista – Unoeste
monicaf@unoeste.br

Resumo: Apresentamos um recorte de uma pesquisa de iniciação científica na qual estudamos a Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática e a Biologia Matemática. Discutimos aqui modelos da Dinâmica Populacional, que permitem fazer previsões, tomar decisões, explicar e entender a evolução da população mundial. Mais especificamente, abordamos os modelos de Malthus e Verhulst, utilizando os dados populacionais fornecidos pela Organização das Nações Unidas (ONU) no período de 1950 a 2020, assim como estimativas para a população mundial em 2050 e 2100. Os dois modelos originam equações diferenciais ordinárias. A partir das soluções estimamos a população mundial e comparamos com os valores da ONU. O modelo de Malthus ajusta bem os dados de 1950 a 2000. Para o modelo de Verhulst foram consideradas como população limite as estimativas da ONU para 2050 e 2100. Nos dois casos os valores são próximos de 1950 a 1970 e menores nos anos seguintes, ocorrendo erros que são maiores para a estimativa de 2050. A pesquisa em desenvolvimento tem mostrado que a Modelagem Matemática pode e deve ser utilizada no ensino-aprendizagem de Matemática por envolver uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas.

Palavras-chave: Dinâmica populacional. Modelagem matemática. Equações diferenciais ordinárias. Ensino e aprendizagem de Matemática.

INTRODUÇÃO

Como aluno do curso de licenciatura em Matemática e pensando na futura prática docente e na importância de mostrar aos alunos as possibilidades de aplicação da Matemática nas diferentes áreas do conhecimento, estamos desenvolvendo um projeto de iniciação científica no qual estudamos a Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática.

A Modelagem Matemática é um processo que envolve a obtenção de um modelo e demanda não apenas conhecimento matemático, mas também “intuição e criatividade para

interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e também ter senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas” (BIEMBEGUT; HEIN, 2003, p. 12).

Obtido o modelo, a tarefa é resolvê-lo. Mesmo que se tenha obtido uma ou mais equações e não seja possível obter a solução da(s) mesma(s), procura-se obter o máximo de informações qualitativas, que possam contribuir na explicação dos fenômenos envolvidos.

Segundo Bassanezi e Ferreira Jr. (1988), a Modelagem Matemática transforma problemas da realidade em problemas matemáticos e as soluções devem ser interpretadas à luz dos dados reais, que não são somente das Ciências Exatas, mas também dados das Ciências Humanas e Biológicas. “A modelagem eficiente permite fazer previsões, tomar decisões, explicar e entender; enfim, participar do mundo real com capacidade de influenciar em suas mudanças” (BASSANEZI, FERREIRA JR., 1988, p. 7). Muitos dos problemas reais já resolvidos utilizando a Modelagem Matemática contribuíram para o avanço da Medicina, Biologia, Engenharia, Economia, entre outras áreas.

A Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática consiste de “[...] um conjunto de procedimentos cujo objetivo é estabelecer um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e a tomar decisões” (BURAK, 1992, p. 62).

Em outras palavras, um conjunto de procedimentos

[...] significa algo unido, conjugado, contíguo de ações, caminhos a empreender com vista a um objetivo. Além disso, estabelecer um paralelo significa algo análogo, isomorfo, equivalente; e tem-se fenômenos presentes no cotidiano, considerando aquilo que é percebido pelo indivíduo, neste caso o estudante, que favorecem, ou seja, possibilitam fazer predições, realizar um prognóstico, diagnóstico pelo estudante e que permitem tomar decisão, isto é, favorecem deliberar, ou estar desembaraçados diante de uma decisão. Para que isso ocorra, alguns encaminhamentos são sugeridos, contudo, é a situação que mostrará a conveniência ou não da sua adoção (BURAK; KLÜBER, 2013, p. 36).

Trata-se de uma estratégia de ensino-aprendizagem que pode estimular a busca por conhecimento, levando o aluno a adquirir conceitos que ele ainda não conhece, a partir de situações do seu cotidiano, ampliando cada vez mais o seu conhecimento matemático. Assim, ao adotar a modelagem é importante partir do interesse dos alunos dado que “[...] o interesse pela atividade está diretamente relacionado à motivação intrínseca e ganha força também no contexto que nutre tanto o interesse como a motivação” (BURAK; KLÜBER, 2013, p. 36).

Isso posto, considerando o interesse do licenciando pela Biologia optamos por desenvolver o projeto de iniciação científica “Modelagem Matemática como estratégia de

ensino-aprendizagem e a Biologia Matemática”, abordando modelos que envolvem as Equações Diferenciais Ordinárias. Mais especificamente, foi estudado: quantidade de bactérias de uma cultura, a idade de uma árvore ou fóssil, crescimento de uma célula, absorção de drogas e de álcool, crescimento de uma célula, difusão de moléculas através da membrana celular, crescimento específico, despoluição de lagoas, digestão de ruminantes e crescimento de uma população, o tempo de dosagem e absorção de uma droga ou remédio por um organismo, e até mesmo determinar qual o melhor e mais eficiente remédio ou método para o tratamento de um câncer, entre outros.

Dos modelos estudados, o que mais nos interessou foi a “Dinâmica Populacional”, que apresentamos neste trabalho. Mais precisamente, abordamos os modelos de Malthus e Verhulst para analisar o comportamento e crescimento populacional mundial ao longo da história, a fim de obter resultados e analisa-los quanto à sua eficácia.

DINÂMICA POPULACIONAL

É notável que a humanidade vem crescendo cada vez mais e ocupando o planeta. Entretanto, o crescimento não tem sido o mesmo nas diferentes épocas da história. A população mundial aumentou lentamente por ocasião das economias agrícolas pré-industriais, quando o coeficiente de natalidade e o de mortalidade eram elevados, devido a epidemias, inanição e guerras (YUNES, 1971). O crescimento foi maior em determinadas épocas, impulsionado por eventos e descobertas, como durante a Revolução Industrial, que produziu enorme progresso no conhecimento científico proporcionando o controle de muitas doenças endêmicas. Por sua vez, há períodos de declínio como o período entre guerras ou período em que ocorrem epidemias ou escassez de alimentos nas diferentes regiões do planeta.

Segundo Alves (2016), o mundo alcançou 1 bilhão de habitantes, aproximadamente, no ano de 1800. Duplicou para 2 bilhões em 1927. Na virada do milênio, no ano 2000, atingiu a cifra de 6 bilhões de pessoas e chegou a 7 bilhões em 2011.

Com o avanço da Ciência nos últimos três séculos, começaram a surgir teorias e estudos referentes ao crescimento populacional, questionando alguns aspectos. Um deles é a capacidade que o próprio planeta teria para abrigar e fornecer recursos para as gerações futuras, o que impulsionou o estudo sobre o crescimento populacional das civilizações, desde o levantamento de dados sobre determinada população até projeções e estimativas sobre a sua variação. Os primeiros estudiosos a formalizarem teorias e estudos foram Thomas Robert Malthus (1766-1834), matemático e economista, e Pierre François Verhulst (1804 – 1849),

matemático. Utilizando as equações diferenciais eles construíram modelos matemáticos para o crescimento populacional.

Impulsionado pelas teorias que já circundavam o crescimento exponencial aplicado às estatísticas populacionais, Malthus, considerado o pai da Demografia, iniciou em 1798 os primeiros estudos sobre a dinâmica das populações, ao notar que entre os anos de 1785 e 1790, a população havia dobrado por conta do aumento da produção de alimentos e também pela melhoria e aperfeiçoamento ao combate de doenças e saneamento básico nas grandes cidades, graças à Revolução Industrial. Esses fatores contribuíram significativamente para que ocorresse uma diminuição da taxa de mortalidade e um aumento na taxa de natalidade.

Sendo $P = P(t)$ a população de um país em um instante t , “[...] a Lei de Malthus estabelece que os nascimentos e as mortes são proporcionais ao tamanho da população e ao tamanho do intervalo [...] (BASSANEZI; FERREIRA JR, 1988, p. 48). Considerando essa lei e sendo α e β as taxas de natalidade e mortalidade, respectivamente, chegamos na seguinte equação diferencial:

$$\frac{dP}{dt} = (\alpha - \beta)P \quad (1)$$

Lembrando o significado de uma derivada, a equação acima representa que “a taxa de variação de uma população é proporcional à população em cada instante (BASSANEZI; FERREIRA JR, 1988, p. 49).

A equação (1) pode ser resolvida utilizando a técnica de separação de variáveis. Se P_0 é a população inicial, isto é, a população quando o instante for $t = 0$, e se chamarmos de λ a constante dada por $(\alpha - \beta)$, obtemos a solução geral:

$$P(t) = P_0 e^{\lambda t}, \quad P(0) = P_0 \quad (2)$$

Essa solução tem comportamentos distintos, dependendo do valor da constante λ .

Se $\alpha = \beta$, ou seja, as taxas de natalidade e mortalidade são iguais, não há variação na população, mantendo-se constante. Se $\alpha > \beta$, a taxa de natalidade é maior que a de mortalidade e a população cresce exponencialmente. Por fim, se $\alpha < \beta$, a taxa de mortalidade é maior que a taxa de natalidade, acarretando o declínio da população, tendendo a extinção, à medida que o tempo t varia.

Entretanto, segundo Bassanezi e Ferreira Jr. (1988), as teorias malthusianas somente se aplicavam para populações em países subdesenvolvidos e em curtos períodos de tempo, quando as taxas de mortalidade e natalidade eram numericamente próximas. Por conta disso, para estudar os efeitos da superpopulação e até mesmo o crescimento de grandes quantidades populacionais, o modelo se mostrava ineficiente.

Com base nisto, em 1837, Verhulst propôs seu modelo populacional, publicando a conhecida equação logística, segundo a qual, a população de uma certa espécie, vivendo em um determinado meio, atinge um limite de saturação, isto é, o limite populacional, indicado por $P_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$, representando o quanto uma população consegue crescer mediante a demografia e os recursos naturais disponíveis. A equação “[...] considera ainda que a variação de população esteja sujeita a um fator de proporcionalidade inibidor. Ou seja, é preciso que a equação incorpore a queda de crescimento, à medida que a população cresce” (BASSANEZI, FERREIRA JR., 1988, p. 49). Isto posto, a equação é

$$\frac{dP}{dt} = P \cdot f(P) \text{ com } f(P) = \lambda \left(\frac{P_{\infty} - P}{P_{\infty}} \right) \text{ e } \lambda > 0.$$

Assim, a equação de Verhulst é

$$\frac{dP}{dt} = \lambda P \left(1 - \frac{P}{P_{\infty}} \right) \quad (3)$$

O diferencial do modelo de Verhulst em relação ao modelo de Malthus é a taxa de crescimento, que decresce linearmente com a população, e tende a zero quando $t \rightarrow \infty$.

Resolvendo a equação diferencial (2) pelo método de separação de variáveis, obtemos a solução geral

$$P(t) = \frac{P_{\infty}}{\left[\frac{P_{\infty} - 1}{P_0} \right] e^{-\lambda t} + 1} \quad (4)$$

Para analisar os dois modelos utilizamos dados do crescimento populacional mundial a partir do ano de 1950, apresentados na Tabela 1, disponíveis no documento “Perspectivas Mundiais da População 2019: Destaques”¹, publicado pela Divisão de População do Departamento da Organização das Nações Unidas (ONU), de Assuntos Econômicos e Sociais que oferece um abrangente panorama global de padrões e perspectivas demográficos.

Tabela 1 – População Mundial, segundo a ONU

Ano	Mundo (mil)
1950	2 536 431
1955	2 773 020
1960	3 034 950
1965	3 339 584
1970	3 700 437
1975	4 079 481
1980	4 458 004
1985	4 870 922
1990	5 327 231
1995	5 744 213

¹ Disponível em: <<https://population.un.org/wpp/>>. Acesso em: 23 jun. 2019

2000	6 143 494
2005	6 541 907
2010	6 956 824
2015	7 379 797
2020	7 794 799

Fonte: <<https://population.un.org/wpp/Download/Standard/Population/>>. Acesso em: 22 jun. 2019.

O estudo considerou que a população mundial deve crescer em 2 bilhões de pessoas nos próximos 30 anos, passando dos atuais 7,7 bilhões de indivíduos para 9,7 bilhões em 2050, devendo ficar próxima de 11 bilhões de habitantes no final do século XXI. As previsões para os anos de 2050 e 2100 foram consideradas como o limite populacional (P_∞).

Os dados fornecidos na Tabela 1 foram utilizados nas soluções das equações (1) e (3), considerando nos dois casos $P_0 = 2.536.431.000$ e $t_0 = 1950$.

Para o modelo de Malthus, a constante de proporcionalidade λ foi obtida considerando, em (2), $P_0 = P(0) = 2.536.431.000$, $P(5) = 2.773.020.000$ e $t = 5$. Ou seja,

$$2.773.020.000 = P(5) = 2.536.431.000P_0e^{5\lambda}$$

$$\frac{2.773.020.000}{2.536.431.000} = e^{5\lambda}$$

$$\ln(1,09327634) = 5\lambda$$

$$\lambda = 0,0178358$$

Com esses valores obtemos para o modelo de Malthus a solução geral:

$$P(t) = 2.536.431.000e^{0,0178358t}$$

Para o modelo de Verhulst foram considerados dois casos, $P_\infty = 9,7 \cdot 10^9$, referente a projeção para o ano de 2050, e $P_\infty = 1,1 \cdot 10^{10}$, para o ano de 2100. A constante de proporcionalidade λ foi obtida, nos dois casos, a partir dos dados da ONU para o ano de 1955.

Assim, no primeiro caso, em que $P_\infty = 9,7 \cdot 10^9$, temos:

$$P(5) = \frac{9,7 \cdot 10^9}{\left[\frac{9,7 \cdot 10^9}{2.536.431.000} - 1\right] e^{-5\lambda} + 1}$$

$$2.773.020.000 = \frac{9,7 \cdot 10^9}{[2,824271191]e^{-\lambda 5} + 1}$$

A partir dessa igualdade, $\lambda = 0,02455269$ e, nesse caso, a solução geral é

$$P(t) = \frac{9,7 \cdot 10^9}{[2,824271191]e^{-0,02455269t} + 1}$$

Para o segundo caso tomamos $P_\infty = 1,1 \cdot 10^{10}$ e trabalhamos novamente com o valor fornecido pela ONU para a população de 1955. Assim,

$$P(5) = \frac{1,1 \cdot 10^{10}}{\left[\frac{1,1 \cdot 10^{10}}{2.536.431.000} - 1 \right] e^{-5\lambda} + 1}$$

$$2.773.020.000 = \frac{1,1 \cdot 10^{10}}{[3,336802381]e^{-5\lambda} + 1}$$

Desenvolvendo a expressão acima obtemos $\lambda = 0,025368829$, de modo que no segundo caso a solução geral da equação (3) é

$$P(t) = \frac{1,1 \cdot 10^{10}}{[3,336802381]e^{-0,025368829t} + 1}$$

Utilizando o Microsoft Excel² calculamos os valores de $P(t)$ para o modelo de Malthus e os dois casos do modelo de Verhulst e comparamos com os dados reais, apresentados na Tabela 1.

Os resultados obtidos e os erros percentuais correspondentes para o modelo de Malthus são apresentados na Tabela 2, a seguir.

Tabela 2 – Resultados obtidos a partir do modelo de Malthus

Ano	Mundo (mil)	Valor encontrado	Erro (%)
1950	2 536 431	2 536 431 000	0
1955	2 773 020	2 773 019 988	-0,0000004
1960	3 034 950	3 031 677 131	-0,1078393
1965	3 339 584	3 314 460 863	-0,7522834
1970	3 700 437	3 623 621 626	-2,0758460
1975	4 079 481	3 961 619 771	-2,8891231
1980	4 458 004	4 331 145 145	-2,8456425
1985	4 870 922	4 735 138 492	-2,7876346
1990	5 327 231	5 176 814 858	-2,8235333
1995	5 744 213	5 659 689 176	-1,4714605
2000	6 143 494	6 187 604 241	0,7179993
2005	6 541 907	6 764 761 289	3,4065646
2010	6 956 824	7 395 753 431	6,3093364
2015	7 379 797	8 085 602 208	9,5640193
2020	7 794 799	8 839 797 550	13,4063566

Fonte: os autores

² O Microsoft Excel é a versão oficial do popular editor de planilhas da Microsoft. O programa possui uma interface intuitiva e capacitadas ferramentas de cálculo e de construção de gráficos Excel. Informações disponíveis em: <<https://www.techtodo.com.br/tudo-sobre/microsoft-excel-para-ipad.html>>. Acesso em: 28 jun. 2019.

Nas Tabelas 3 e 4, respectivamente, estão os valores encontrados para o modelo de Verhulst, casos 1 e 2, considerando respectivamente, $P_{\infty} = P(2050) = 9,7 \cdot 10^9$ e $P_{\infty} = P(2100) = 1,1 \cdot 10^{10}$.

Tabela 3 – Resultados obtidos a partir do modelo de Verhulst considerando

$$P_{\infty} = P(2050) = 9,7 \cdot 10^9$$

Ano	Mundo (mil)	Valor encontrado	Erro (%)
1950	2 536 431	2 536 431 000	0
1955	2 773 020	2 773 020 113	0,0000041
1960	3 034 950	3 022 366 664	-0,4146143
1965	3 339 584	3 283 506 245	-1,6791838
1970	3 700 437	3 555 196 238	-3,9249624
1975	4 079 481	3 835 927 443	-5,9702094
1980	4 458 004	4 123 948 940	-7,4933773
1985	4 870 922	4 417 305 978	-9,3127343
1990	5 327 231	4 713 889 591	-11,5133248
1995	5 744 213	5 011 495 481	-12,7557512
2000	6 143 494	5 307 888 824	-13,6014648
2005	6 541 907	5 600 870 988	-14,3847354
2010	6 956 824	5 888 343 979	-15,3587330
2015	7 379 797	6 168 368 660	-16,4154697
2020	7 794 799	6 439 213 441	-17,3908982

Fonte: os autores

Tabela 4 – Resultados obtidos a partir do modelo de Verhulst considerando a

$$P_{\infty} = P(2100) = 1,1 \cdot 10^{10}$$

Ano	Mundo (mil)	Valor encontrado	Erro (%)
1950	2 536 431	2 536 431 000	0
1955	2 773 020	2 773 019 994	-0,0000002
1960	3 034 950	3 044 255 497	0,3066112
1965	3 339 584	3 331 278 542	-0,2486974
1970	3 700 437	3 633 005 423	-1,8222598
1975	4 079 481	3 947 991 653	-3,2231881
1980	4 458 004	4 274 442 085	-4,1175808
1985	4 870 922	2 773 019 994	-5,3518196
1990	5 327 231	4 952 988 624	-7,0250826
1995	5 744 213	5 300 083 746	-7,7317685
2000	6 143 494	5 648 780 725	-8,0526371
2005	6 541 907	5 996 284 877	-8,3404139
2010	6 956 824	6 339 839 530	-8,8687664
2015	7 379 797	6 676 812 483	-9,5257975
2020	7 794 799	7 004 774 244	-10,1352807

Fonte: os autores

Com os dados calculados, utilizamos novamente o Microsoft Excel para compara-los graficamente.

A Figura 1 apresenta a comparação gráfica entre os valores reais e aqueles encontrados utilizando o modelo de Malthus. É possível observar que no período de 1950 a 2000 os dados obtidos são muito próximos dos reais. A diferença aumenta a partir de 2005, chegando a um erro de aproximadamente 13,4% em 2020.

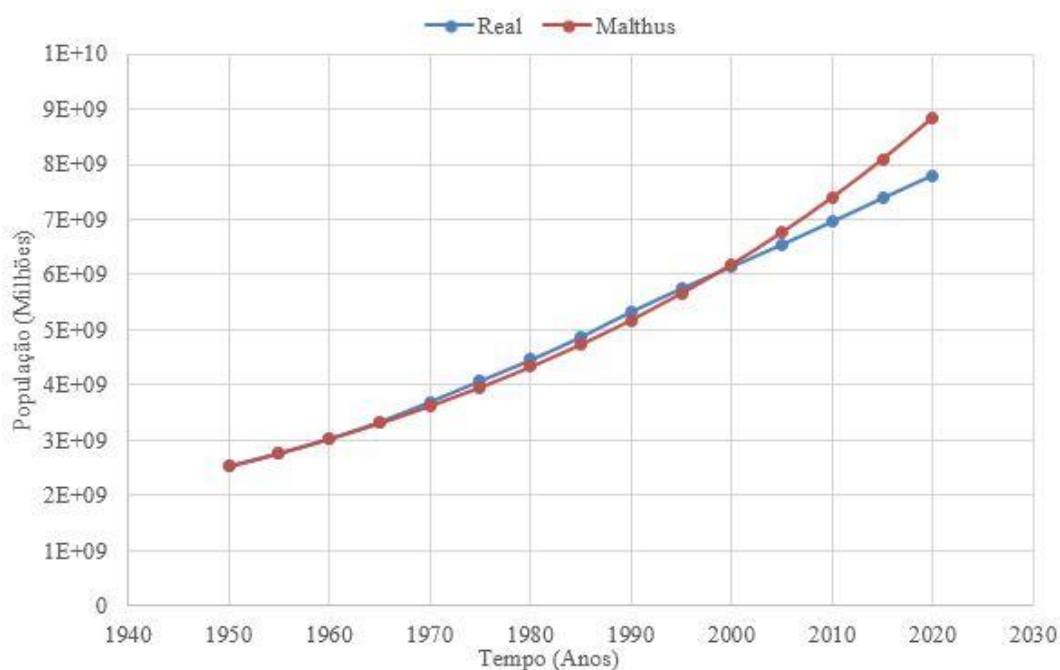


Figura 1 – Comparação entre os valores reais e os obtidos através do modelo de Malthus
Fonte: os autores

Os dados obtidos confirmam o que aponta a literatura, “[...] o modelo malthusiano falha pelo fato de prever crescimentos populacionais cada vez maiores, o que não representa a realidade” (BASSANEZI; FERREIRA JR., 1988, p. 49).

A comparação entre os dados reais e aqueles obtidos nos dois casos do modelo de Verhulst está nas Figuras 2 e 3, que também foram elaboradas utilizando o Microsoft Excel.

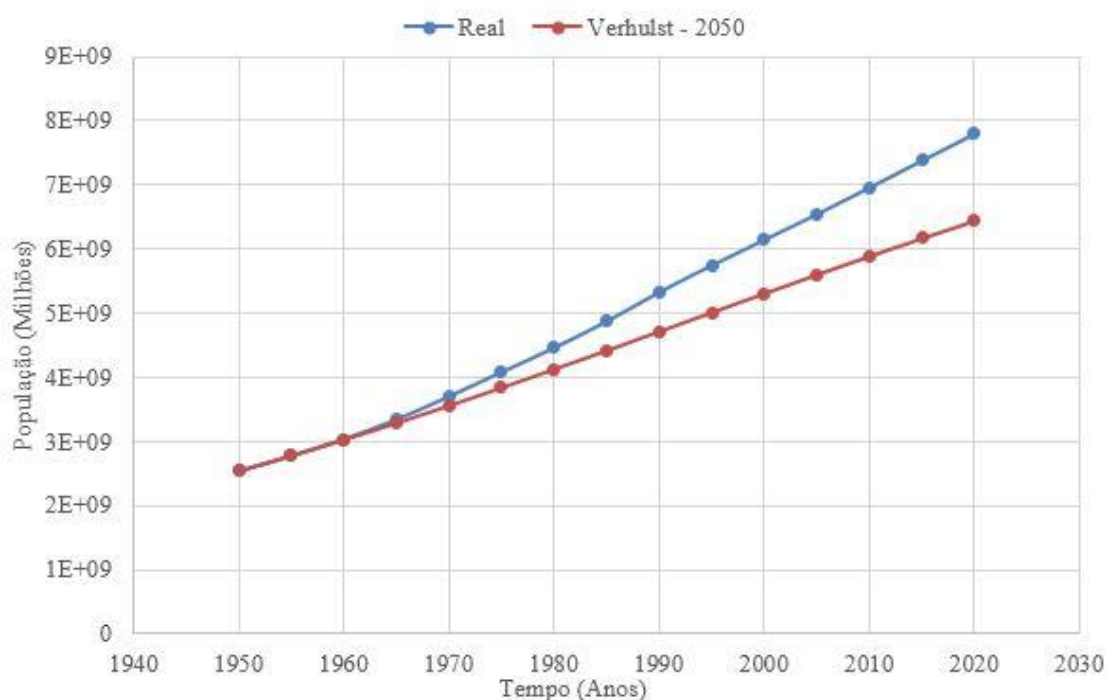


Figura 2 – Comparação entre os valores reais e os obtidos através do modelo de Verhulst, considerando $P_{\infty} = P(2050)$
Fonte: os autores

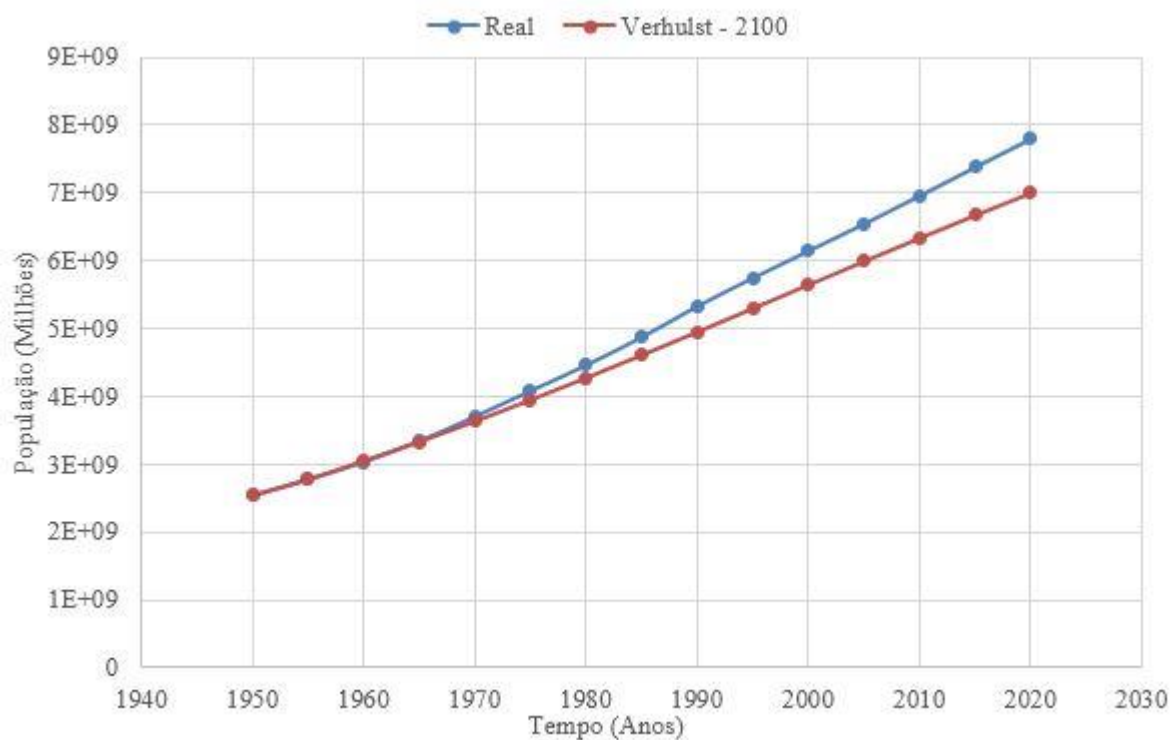


Figura 3 – Comparação entre os valores reais, e os obtidos através do modelo de Verhulst, considerando $P_{\infty} = P(2100)$
Fonte: os autores

É possível observar que a aproximação é melhor no caso 2, em que se considera $P_{\infty} = P(2100)$. Nos primeiros vinte anos os valores são próximos, mas passam então a se distanciar, atingindo 17,39% de erro em 2020. Esses resultados também confirmam o que aponta a literatura,

[...] ao examinarmos o crescimento populacional na terra, temos um comportamento diferente dos modelos que indicam uma população limite. Ocorre que P_{∞} é constante ao longo de determinados períodos da História, aumentando seu valor com o progresso da população. Assim, antes do advento das ferramentas (até aproximadamente 10.000 anos atrás, $P_{\infty} \cong 10^7$, passando a $P_{\infty} \cong 10^8$ com a Revolução Agrícola e a $P_{\infty} \cong 5.10^9$ com a Revolução Industrial (BASSANEZI; FERREIRA JR., 1988, p. 53).

CONCLUSÃO

O estudo em desenvolvimento tem mostrado que a Modelagem Matemática pode e deve ser utilizada no ensino-aprendizagem de Matemática por envolver não apenas conhecimento matemático, mas também de outras áreas, bem como intuição e criatividade. Trata-se de uma estratégia que permite relacionar a realidade a representações (tabelas, figuras e esquemas) que contribuem para o desenvolvimento de:

[...] competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas (BRASIL 2018, p. 266).

REFERÊNCIAS

ALVES, J. E. D. O mundo com 10 bilhões de habitantes em 2053. **EcoDebate**, n. 2618, 28 set. 2016. Disponível em: <<https://www.ecodebate.com.br/2016/09/28/o-mundo-com-10-bilhoes-de-habitantes-em-2053-artigo-de-jose-eustaquio-diniz-alves/>>. Acesso em: 22 jun. 2019.

BASSANEZI, R. C.; FERREIRA, W. C. F. Jr. **Equações diferenciais com aplicações**. São Paulo: Harbra, 1988.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. São Paulo: Contexto, 2003.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Educação é a Base. Brasília: MEC/CONSED/UNDIME, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf> Acesso em: 28 jun. 2019.

BURAK, D. **Modelagem Matemática**: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas: 1992.

BURAK, D.; KLÜBER, T. E. Considerações sobre a modelagem matemática em uma perspectiva de Educação Matemática. **Margens** (UFPA), v. 6, p. 33-50, 2013. Disponível em: <<https://periodicos.ufpa.br/index.php/revistamargens/article/download/2745/2870>>. Acesso em: 15 jun. 2019.

YUNES, J. A dinâmica populacional dos países desenvolvidos e subdesenvolvidos. **Rev. Saúde Pública**, v. 5, n. 1, p. 129-150, jun. 1971. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/rsp/v5n1/15.pdf>>. Acesso em: 23 jun. 2019.