SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS E DESENVOLVIMENTO DE TAREFAS NAS AULAS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Nélvia Santana Ramos
Colégio ECEL - ECEL
nelvia_ramos@hotmail.com

Maycon Odailson dos Santos da Fonseca
Secretaria de Estado de Educação, Esporte e Lazer - SEDUC/MT
maycon.odailson@gmail.com

André Luis Trevisan
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR
andreluistrevisan@gmail.com

Resumo: O presente trabalho relata o processo de elaboração e implementação de uma tarefa matemática em uma turma de engenharia na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. Insere-se no contexto de um ambiente de ensino e de aprendizagem em que os estudantes assumem um papel ativo no trabalho com tarefas matemáticas que possibilitem explorar intuitivamente conceitos, para que, a partir de discussões realizadas em conjunto com o docente, possam ser sistematizados e formalizados. A tarefa aqui apresentada foi elaborada no intuito de possibilitar a exploração de ideias que circunscrevem o conceito de convergência de uma sequência numérica. Buscamos, no relato de como a tarefa foi implementada, ilustrar o modo como esse trabalho possibilitou a sistematização de conceitos e a elaboração da definição formal de convergência.
Palavras-chave: Ensino de Matemática. Ensino de Cálculo Diferencial e Integral. Tarefas matemáticas. Sequências Numéricas.

INTRODUÇÃO

A aprendizagem da Matemática, para muitos estudantes, se mostra um processo "árduo", fazendo que limitem suas ações a apenas reproduzir processos em vez de aplicar conceitos. Não é diferente no caso do Cálculo Diferencial e Integral (CDI), diversas são as dificuldades dos estudantes nessa disciplina uma vez que serem "expostos" a conceitos, demonstrações e aplicações não é garantia de que estejam aprendendo ou se sentindo motivados/interessados pela disciplina. Em uma espécie de "crítica ácida", Rasmussen, Marrongelle e Borba (2014, p.508) apontam que "muito já se sabe sobre as dificuldades apresentadas por estudantes na disciplina de Cálculo" e, diante disso, questionam: "em que direção precisamos ir?".

Nessa direção, nossa proposta de trabalho na disciplina de Matemática (em especial, de CDI) envolve a organização de ambientes de ensino e de aprendizagem de Matemática pautado em episódios de resolução de tarefas (COUTO; FONSECA; TREVISAN, 2017; COUTO; TREVISAN, 2017; TREVISAN; MENDES, 2018). Quando nos referimos à organização desses ambientes, assumimos que ele leve em conta nossas condições reais de ensino. Assim, estamos considerando ambiente como todo o contexto que circunscreve nosso trabalho (os estudantes e suas expectativas, os materiais didáticos, o espaço físico e a infraestrutura, o professor e suas concepções) e suas condições reais.

Embora tenhamos uma sala de aula heterogênea (tanto em termos do conhecimento do nosso estudante, quanto das suas expectativas frente à disciplina de CDI) e um plano de ensino bastante extenso a cumprir - condições com as quais, em geral, todo professor se depara - intentamos que nossos estudantes tenham participação ativa no desenvolvimento do trabalho pedagógico, envolvam-se com as tarefas propostas e elaborem conhecimento matemático inerente ao curso.

Apresentamos na Figura 1 um esquema que ilustra o modo como estamos pensando a organização de nosso ambiente de ensino e de aprendizagem de Matemática, cujos detalhes são apresentados no trabalho de Ramos (2017). Nele, buscamos que os estudantes possam trabalhar com tarefas matemáticas que possibilitem a eles explorar intuitivamente novos conceitos que, por meio de discussões matemáticas em conjunto com o docente, possam ser sistematizados e formalizados. Ponte (2017) argumenta que, em oposição a um modelo de aula que pressupõe a exposição de conceitos e uma prática que conduz à memorização acrítica e mecanização, tanto a investigação em Educação Matemática quanto a prática profissional apontam os momentos de discussões matemáticas como essenciais para a compreensão dos estudantes.

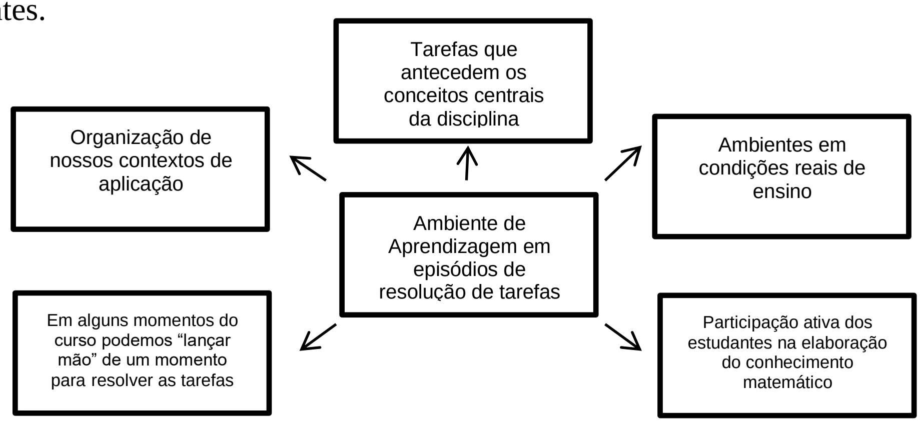


Figura 1 - Elementos do ambiente de ensino e de aprendizagem
Fonte: Ramos (2017, p.33).

As tarefas nesse contexto devem ser pensadas a fim de desencadear discussões que levam à elaboração de conceitos. O termo tarefas é tomado no sentido de Ponte (2014, p. 14), como "elementos organizadores de quem aprende, sendo em sua maioria propostas por professores e, uma vez propostas, devem ser interpretadas pelos alunos podendo originar atividades diversas". O autor ressalta que a noção de tarefa não apresenta muito interesse quando baseada na exposição magistral do professor e que, em contrapartida, a valorização do papel ativo do aluno na aprendizagem é fundamentada nessa noção, sendo as tarefas o elemento organizador da atividade de quem aprende.

Nessa perspectiva, Ferreira, Ciani e Oliveira (2014, p.121-122) apontam que as tarefas "podem propiciar, mais fortemente, aos estudantes produzir conhecimentos a partir de situações já conhecidas, familiares, imagináveis, com as quais possam produzir significado e, consequentemente, aprender matemática".

No caso da disciplina de CDI, respaldamo-nos nas ideias de Weigand (2014) que sugere o estudo de sequências como precursor do ensino de limites, derivada e integral, viabilizando que um novo conteúdo possa ser explorado partindo do intuitivo, sem que o professor precise apresentar uma definição formal primeiramente, deixando a sistematização para um segundo momento. Consideramos, na organização de nosso ambiente, que explicações de novos conceitos não precedam as tarefas, possibilitando aos estudantes elaborar livremente suas estratégias para a resolução, mobilizando diferentes conhecimentos e representações. Assumimos também, em nosso ambiente, uma estrutura curricular "não usual" para a disciplina de CDI, com conteúdos presentes na ementa da disciplina organizados em formato de espiral, associado à metodologia de trabalho com episódios de resolução de tarefas (TREVISAN; MENDES, 2017).

O estudo de sequências numéricas é nosso "ponto de partida" na disciplina de CDI, pois possibilita que o trabalho com tarefas, não precedidas da apresentação formal de definições, permite que os estudantes, ao trabalharem em grupos heterogêneos, "lancem mão" de conceitos com os quais tiveram contato na Educação Básica.

Roh (2008) ressalta que muitos conceitos matemáticos dependem da noção de limite e os equívocos apresentados pelos estudantes, ao não conceberem processos infinitos, somente finitos, na resolução de tarefas que envolvam tal conceito, acarreta na falta de compreensão do processo e linguagem de infinito. Isso gera uma confusão quanto ao limite de uma sequência ou função, apenas como processos de aproximação, não levando em conta, por exemplo, o comportamento de uma sequência constante, a qual não modifica a sua aproximação em seu domínio.

Entendemos que o estudo de sequências numéricas e sua convergência requerem que conceitos matemáticos e ideias inerentes a estes conceitos, que circunscrevem seu estudo, sejam desenvolvidos para a elaboração de uma definição formal, tais como: (i) diferença entre os termos da sequência; (ii) monotonicidade; (iii) comportamento em longo prazo; (iv) limite poder ser ou não atingido; (v) subsequências; (vi) proposição a partir do n_0; (vii) unicidade de limite. Tais ideias e conceitos foram trabalhados em episódios anteriores por nossas tarefas.

Apresentamos no presente trabalho o relato do processo de elaboração e adaptação de uma tarefa aplicada nas aulas de CDI, na qual a primeira autora era a professora responsável pela turma. O estudo e desenvolvimento de tarefas matemáticas envolvendo sequências numéricas foram realizados pelos autores deste artigo, em conjunto com participantes de um grupo de estudos vinculado a um Programa de Mestrado em Ensino de Matemática.

APRESENTAÇÃO DA TAREFA

A tarefa discutida neste artigo foi trabalhada pelos estudantes de um curso de Engenharia de uma Universidade Federal que, no decorrer de seu curso de CDI 1, tiveram a oportunidade de explorar conceitos centrais do curso a partir do trabalho com episódios de resolução de tarefas, em especial o estudo de sequências numéricas e sua convergência como desencadeador do conceito de limite de uma função (apresentado na pesquisa de Ramos (2017)), bem como o quociente de diferenças para a sistematização do estudo de derivadas, apresentado na pesquisa de Fonseca (2017), além do trabalho com tarefas envolvendo o conceito de integral (TREVISAN; GOES, 2016; TREVISAN; GOES, 2017).

O plano de ensino foi organizado de modo a possibilitar o trabalho com pressupostos de nosso ambiente de ensino e de aprendizagem (TREVISAN; MENDES, 2017). Iniciamos o curso com o estudo de sequências numéricas, com tarefas que possibilitaram o desenvolvimento de conceitos, partindo de explorações intuitivas, rumo à sistematização e elaboração de definições formais, a partir de discussões coletivas entre estudantes e docente.

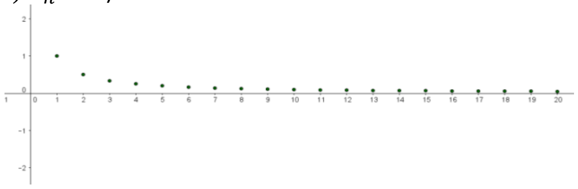
A tarefa selecionada para este artigo foi adaptada da pesquisa de Roh (2008), e teve como objetivo que os estudantes estabelecessem uma relação entre o n_0 e ε (dependência mútua) e a arbitrariedade do ε, elementos necessários à elaboração de uma definição formal do conceito de convergência de uma sequência numérica Apresentamos no Quadro 1 a tarefa proposta.

1.Você está recebendo algumas "tiras" de largura constante, com uma linha ao centro para marcar um suposto "limite", no caso da sequência ser convergente.

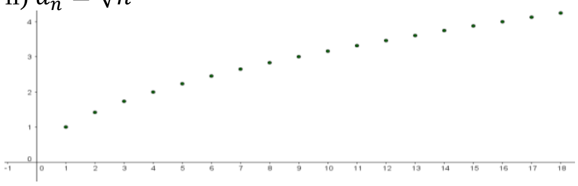
a) Para cada sequência a seguir, e para cada tira que receber, analise como se distribuem os pontos do gráfico da sequência, em relação à tira (se estão dentro ou fora).

b) O que significa dizer que uma sequência é convergente, em termos do comportamento observado no item anterior?

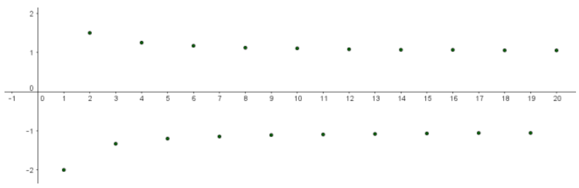
i) $a_n = 1/n$



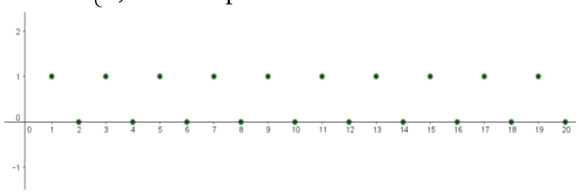
ii) $a_n = \sqrt{n}$



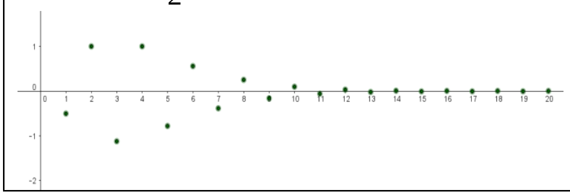
iii) $a_n = (-1)^n (1 + 1/n)$



iv) $a_n = \begin{cases} 1, \text{se n é par} \\ 0, \text{se n é ímpar} \end{cases}$



v) $a_n = (-1)^n \dfrac{n^2}{2^n}$



2. Considere a sequência $a_n = 1/n$.

a) Tomando uma tira de semi-largura 0,25, a partir de qual termo da sequência podemos garantir que todos os termos subsequentes fiquem dentro da tira?

b) Tomando uma tira de semi-largura 0,10, a partir de qual termo da sequência podemos garantir que todos os termos subsequentes fiquem dentro da tira?

c) Tomando uma tira de semi-largura 0,01, a partir de qual termo da sequência podemos garantir que todos os termos subsequentes fiquem dentro da tira?

3. Refaça a questão anterior para as sequências $a_n = 10/n$ **e** $a_n = 1 + 3/n^2$.

Quadro 1 - Tarefa proposta.
Fonte: Ramos (2017, p. 79).

Nossa tarefa objetivou trazer elementos que permitissem realizar uma sistematização de conceitos anteriores, e aproximar os conceitos provisórios de convergência de uma sequência numérica de sua definição formal. Em sua realização contamos com 45 estudantes que foram divididos em 15 grupos.

Em sua aplicação foi destinado um tempo para que os grupos analisassem as sequências e indicassem a partir de qual termo os subsequentes ficariam dentro das “tiras”. O desenvolvimento da tarefa objetivou desencadear discussões coletivas sobre a unicidade de limite, visto que, ao trabalhar com tiras transparentes de espessuras diferentes não englobava dois limites. Apresentamos na Figura 2 uma representação dos grupos trabalhando com a tarefa.

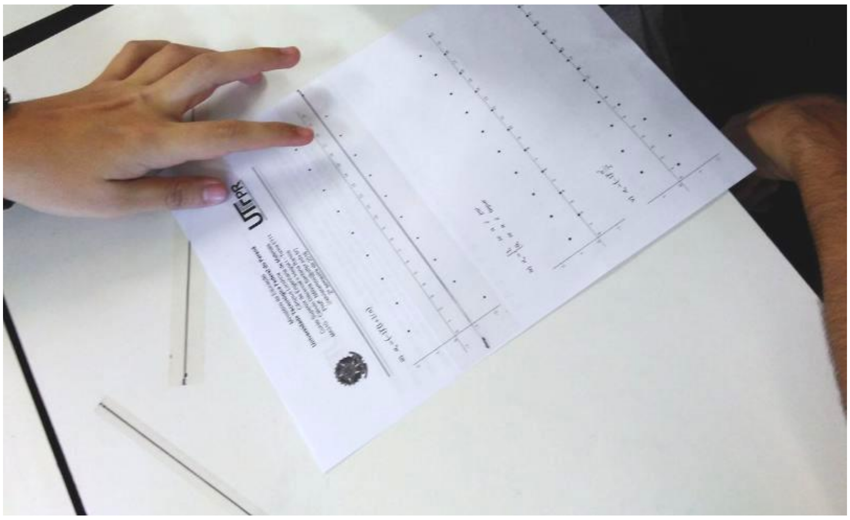


Figura 2 - Um dos grupos trabalhando com a tarefa
Fonte: Ramos (2017, p. 80).

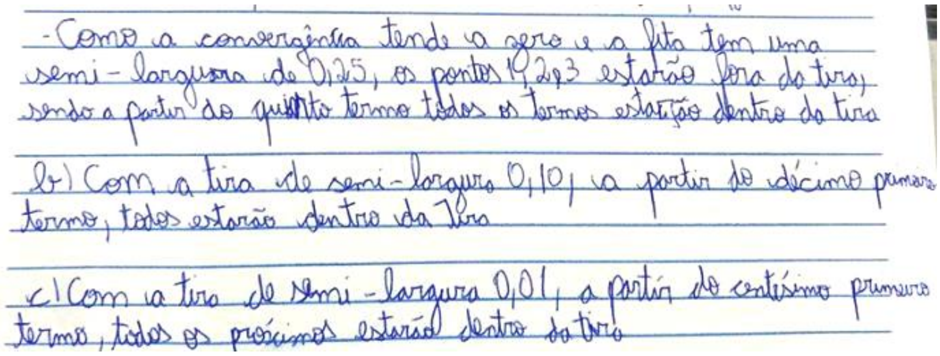
Os grupos exploraram e analisaram todos os itens que compunham a tarefa, depois de um tempo destinado a sua exploração e levantamento de estratégias para sua resolução, a notação que garante a convergência de uma sequência numérica fora sistematizada.

ALGUNS RESULTADOS OBSERVADOS

Uma definição apresentada pelos grupos no desenvolvimento da tarefa enunciava que “*Uma sequência é convergente se a partir de um* "n" *positivo todos os termos ficam dentro de uma tira de qualquer largura”*. Desse contexto, pudemos destacar algumas produções escritas de outros grupos, das quais trouxemos a da Figura 3. Ressaltamos que tal produção, para chegar a uma definição, precisava ser refinada, pois, a relação entre o n_0 e ε (dependência mútua) e a arbitrariedade do ε, elementos necessários à elaboração de uma definição formal do conceito de convergência de uma sequência numérica, ainda não chegaram a ser explicitados pelos alunos, neste momento. Contudo, apresentaram

ISSN 2595-5578

corretamente a indicação de n_0, um elemento importante na sistematização da definição formal.


- Como a convergência tende a zero e a fita tem uma semi-largura de 0,25, os pontos 1, 2 e 3 estarão fora da tira, sendo a partir do quinto termo todos os termos estarão dentro da tira

b) Com a tira de semi-largura 0,10, a partir do décimo primeiro termo, todos estarão dentro da tira

c) Com a tira de semi-largura 0,01, a partir do centésimo primeiro termo, todos os próximos estarão dentro da tira

Figura 3 - Definição provisória
Fonte: Ramos (2017, p. 81).

O desenvolvimento da tarefa possibilitou aos estudantes a sistematização do conceito de convergência o que, posteriormente, desencadeou uma discussão a respeito do limite de uma função. Sua aplicação fora exitosa, porém seu desenvolvimento possibilitou o que intentamos com sua aplicação. Apresentamos na Figura 4 a fim de exemplificar o tipo de produção desenvolvida pelos grupos.

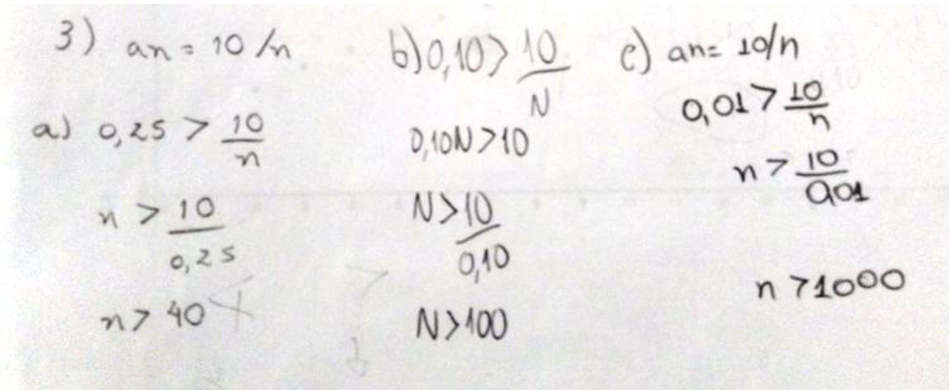


Figura 4 - Indexação do n_0
Fonte: Ramos (2017, p. 81).

Depois de um tempo destinado às discussões entre os grupos e à exploração de todos os itens da tarefa, sempre com o cuidado de se levar em conta as representações/estratégias dos alunos na resolução, a notação formal para a garantia da convergência foi apresentada à turma, tal como segue:

Uma sequência é convergente, ou seja, existe $lim_{n\to\infty} a_n = L$, se, para qualquer tamanho de tira, existe uma posição tal que, para todos os pontos após n_0, todos os pontos fiquem dentro da tira. Expandindo a simbolização de nossa definição, temos: existe $lim_{n\to\infty} a_n = L$, se, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 > 0$ tal que, para todo $n > n_0$, temos $|a_n - L| < \varepsilon$, ou seja, $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$.

Nesse momento, organizamos em conjunto com a turma a definição formal de uma sequência numérica convergente. Para exemplificar o que foi desenvolvido em conjunto, tomamos a sequência $a_n = \frac{10}{n^2}$, e então fizemos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10}{n^2} = 0$$

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{10}{n^2} - 0\right| < \varepsilon$$

$$\frac{10}{n^2} < \varepsilon$$

$$10 < \varepsilon . n^2$$

$$\frac{10}{\varepsilon} < n^2$$

$$\sqrt{\frac{10}{\varepsilon}} < n$$

Assim, concluímos que bastaria tomar $n_0 = \sqrt{\frac{10}{\varepsilon}}$, uma vez que a partir deste n_0, todos os pontos da sequência estariam dentro da tira de largura ε.

De maneira geral, o desenvolver das tarefas propiciou aos estudantes total interação entre grupos e docente. A cada nova descoberta na resolução das tarefas, esse fato se tornava mais notório.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este texto procurou relatar o processo de elaboração e adaptação de uma tarefa aplicada nas aulas de CDI envolvendo sequências numéricas. O desenvolvimento de tarefas a partir do trabalho em grupos, tomando pressupostos de um ambiente de aprendizagem pautado em resolução de tarefas, possibilitou aos estudantes explorar de forma intuitiva conceitos centrais do curso de CDI. O modo como a tarefa foi organizada possibilitou que apresentassem diferentes estratégias para sua resolução, o que desencadeou discussões matemáticas que, sistematizadas pelo professor, levaram à elaboração de definições formais do CDI.

Em especial, a tarefa apresentada possibilitou, posteriormente, uma sistematização do conceito de limite de uma função tomando como ponto de partida o estudo do limite de sequências numéricas.

O realizar de nossa proposta potencializou a participação dos estudantes na elaboração de conceitos matemáticos da disciplina, possibilitando uma participação ativa em todo processo, com definições desenvolvidas em conjunto, com destaque em estratégias de resolução e o processo de desenvolvimento.

Analisando o conjunto como um todo, da organização ao desenvolver da proposta, dentre potencialidades e limitações, trouxe contribuições para o desenvolvimento de conceitos, oportunizou a elaboração e aplicação de estratégias na resolução das tarefas auxiliando a elaboração de definições.

REFERÊNCIAS

COUTO, Alan Franco; FONSECA, M. O. S.; TREVISAN, A. L. Aulas de Cálculo Diferencial e Integral organizadas a partir de episódios de resolução de tarefas: um convite à insubordinação criativa. **REnCiMa - Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 4, p. 50-61, 2017.

COUTO, Alan Franco; TREVISAN, A. L. Cálculo interativo: um ambiente virtual de suporte às aulas de Cálculo Diferencial e Integral. **HIPÁTIA - Revista Brasileira de História, Educação e Matemática**, v. 2, p. 16-25, 2017.

FERREIRA, Pamela Emanueli A; CIANI, A. B; OLIVERIA, R. C. Educação Matemática Realística: uma abordagem para o ensino. In: BURIASCO, R. L. C. de (Org.). **GEPEMA**: espaço e contexto de aprendizagem. 1. ed. Curitiba: CRV, 2014, p. 113-141.

FONSECA, Maycon Odailson dos Santos da. **Propostas de tarefas para um estudo inicial de derivada.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Londrina, 2017.

PONTE, João Pedro da. Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. PONTE, João Pedro da (Org.). **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática**. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014.

PONTE, João Pedro da. Discussões coletivas no ensino aprendizagem em Matemática. In: GTI (Ed.). **A prática dos professores**: planificação e discussão coletiva na sala de aula. Lisboa: APM, 2017, p. 33-56.

RAMOS, Nélvia Santana. **Sequências numéricas como desencadeadoras do conceito de convergências:** episódios de resolução de tarefas. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Tecnológica Federal do Paraná **-** Londrina, 2017.

RASMUSSEN, C; MARRONGELLE, K.; BORBA, M. C. Research on calculus: what do we know and where do we need to go?. **ZDM**. v. 46, p. 507-515, 2014.

ROH, H. K. Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. **Educational Studies in Mathematics**, v. 69, n. 3, p. 217–233, 2008.

TREVISAN, André L.; GOES, H. H. D. O método da exaustão e o cálculo de áreas: proposta de uma tarefa com auxílio do Geogebra. **Educação Matemática em Revista**, v. 52, p. 79-85, 2016.

TREVISAN, André L.; GOES, H. H. D. Sugestão para sua aula: Integral definida na geometria: tarefas para o cálculo de volumes. **BOLETIM GEPEM (ONLINE)**, v. 71, p. 136-140, 2017.

TREVISAN, André L.; MENDES, M. T. Integral antes de derivada? Derivada antes de integral? Limite, no final? Uma proposta para organizar um curso de Cálculo Integral. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 19, p. 353-373, 2017.

TREVISAN; André L.; MENDES, M. T. Ambientes de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral organizados a partir de episódios de resolução de tarefas: uma proposta. **Revista Brasileira de Ensino e Tecnologia**, v. 11, p. 209-227, 2018.

WEIGAND, H. G. A discrete approach to the concept of derivative. **ZDM,** v. 46, p. 603-619, 2014.