O ERRO COMO ELEMENTO DESENCADEADOR DE OPORTUNIDADE DE APRENDIZAGEM

Daniela Harmuch
Universidade Estadual de Londrina - UEL
dharmuch@yahoo.com.bri

Regina Luzia Corio de Buriasco
Universidade Estadual de Londrina - UEL
reginaburiasco@gmail.com

Marcele Tavares Mendes
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR
marceletavares@utfpr.edu.br

Resumo: Por meio de um relato de experiência apresentamos uma discussão a respeito do potencial do erro como elemento que possa estimular, encorajar, provocar, subsidiar e gerar oportunidades de aprendizagem. O relato é do desenvolvimento de uma tarefa que suscita a utilização de ideias e conceitos a respeito propriedades de potência por alunos de uma turma de um 9º ano de um Colégio Estadual da cidade de Londrina no Paraná no primeiro trimestre de 2019. Aspectos da abordagem da Educação Matemática Realística e do erro como elemento desencadeador de oportunidades de aprendizagem foram considerados no desenvolvimento da aula e da discussão aqui realizada. Percebemos com a experiência um refletir nas ações matemáticas. Nela foi permitido: que os próprios alunos identificassem, entre si, os erros e partilhassem seus pensamentos; que o aluno matematizasse, estabelecendo relações; um ambiente em que o aluno pudesse se arriscar em suas respostas; intervenções e escolhas da tarefa proporcionando um repensar.

Palavras-chave: Propriedades de potência. Educação Matemática Realística.

INTRODUÇÃO

Contrapondo pressupostos da matemática como uma ciência acabada e organizada logicamente, Freudenthal (1905-1990), pesquisador e idealizador da Educação Matemática Realística – RME[1], considera a matemática uma atividade humana como outras atividades, tais como a palavra, a escrita e o desenho, e a situa "entre as primeiras atividades cognitivas conhecidas e a primeira disciplina a ser ensinada, mas que evoluiu e transformou-se sob a influência das modificações sociais, bem como a sua filosofia e a maneira de ser ensinada" (FREUDENTHAL, 1979, p. 321).

Para o autor, a matemática como atividade humana é

[11]Utilizamos a sigla RME da expressão em inglês "Realistic Mathematics Education"

> [...] uma atividade de resolver problemas, de procurar problemas, e também uma atividade de organização de um assunto. Esta pode ser uma questão da realidade, a qual tem de ser organizada de acordo com padrões matemáticos se tiver de ser resolvida. Também pode ser uma questão matemática, resultados novos ou velhos de produção própria ou de outros, que têm de ser organizados de acordo com novas ideias, para ser melhor entendida, em um contexto mais amplo ou por uma abordagem axiomática (FREUDENTHAL, 1971, pág. 414).

Ainda, a matemática deve estar conectada à realidade, ser pertinente à sociedade, aos estudantes aos quais deve ser dada a oportunidade “guiada” para “re-inventá-la” (FREUDENTHAL, 1979, 1983, 1991, TREFFERS, 1987; DE LANGE, 1987; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996; GRAVEMEIJER, 2005).

Por reinvenção-guiada, Freudenthal (1973, p. 120 *apud* MENDES, 2014, p.25) denomina a estratégia de ensino construída a partir da análise e da interpretação da matemática como uma atividade humana. Ainda destaca que nessa estratégia o aluno deve inventar algo que é novo para ele, mas bem conhecido para o professor (FREUDENTHAL, 1991, p. 48). O foco do ensino passa da matemática (produto de um processo de matematização) para o processo de matematizar, de organizar a realidade usando ideias e conceitos matemáticos.

Dessa forma, o professor, nessa abordagem, não é mais um detentor e transmissor de conhecimento, mas um guia que tem a responsabilidade de criar oportunidades e auxiliar o aluno no desenvolvimento do letramento matemático.

Esse letramento é fortemente influenciado pelo contexto escolar, pela atitude do professor e pelo papel do aluno no processo. De modo particular, a Educação Matemática Realística desenvolveu uma abordagem para o ensino e a aprendizagem da matemática baseada na resolução de problemas realísticos e significativos.

Van den Heuvel-Panhuizen (2000) apresenta uma lista com seis princípios da RME, quais sejam: o princípio da *realidade*, que se refere, em síntese, à interpretação da matemática como atividade humana, em que as produções dos estudantes são utilizadas para a construção de conceitos; o dos *níveis*, segundo o qual os alunos passam por vários níveis de compreensão; o da *interatividade***,** em que os alunos devem ter oportunidades para compartilhar suas estratégias e invenções uns com os outros e com o professor (atividade social); o do *entrelaçamento*, em que os alunos devem desenvolver uma visão integrada da matemática; o da *atividade*, em que, de forma geral, as produções dos estudantes são utilizadas para a construção de conceitos; e o da *orientação*, em que os estudantes devem contar com uma oportunidade “guiada” para “reinventar” a matemática. Esses princípios não devem ser vistos separadamente, mas relacionados.

O CONTEXTO DO RELATO

Borasi (1996), em uma síntese de seus estudos, defende o erro como trampolim para a aprendizagem, assim como para investigação no ensino de matemática, a fim de que o potencial dos erros seja tomado como fonte de indagações. Essa autora sugere abandonar a ênfase atual na aquisição de fatos e técnicas matemáticas específicas em prol de tentar capacitar os alunos a desenvolverem habilidades matemáticas mais importantes, como a capacidade de representar e resolver uma variedade de problemas relacionados à matemática, à razão e à comunicação. Sugere que os professores de matemática abandonem essa visão do ensino de matemática como transmissão direta do conhecimento estabelecido e passem a desenvolver ambientes de aprendizagem em suas classes que

> • incentivem os alunos a explorar;
> • ajudem os alunos a verbalizar suas ideias matemáticas;
> • mostrem aos alunos que muitas questões matemáticas têm mais de uma resposta correta;
> • ensinem aos alunos, através da experiência, a importância de um raciocínio cuidadoso e de uma compreensão disciplinada;
> • forneçam evidências de que a matemática é viva e excitante e
> • criem em todos os alunos a confiança de que eles podem aprender matemática[2].

Para Esteban (2002) o erro pode ser tomado,

> [...] como momento do processo de construção de conhecimentos que dá pistas sobre o modo como cada um está organizando seu pensamento, a forma como está articulando seus diversos saberes, as diversas lógicas que atravessam a dinâmica ensino/aprendizagem, as muitas possibilidades de interpretação dos fatos, a existência de vários percursos coletivos, a tensão individual/coletivo. Deixa de representar a ausência de conhecimentos, a deficiência, a impossibilidade, a falta. (ESTEBAN, 2002 p.21)

Cury (2007) analisa as soluções apresentadas pelos estudantes sob um enfoque da metodologia de pesquisa e de ensino:

> Quando um erro é usado como fonte de novas descobertas, está sendo considerada a possibilidade de que este erro se transforme em um problema para que os alunos (e o professor) se debrucem sobre ele e tentem inventar soluções que promovam o aprendizado (CURY 2007 p.79-80).

Com esse olhar professor e aluno têm a oportunidade de transformar o erro em uma tarefa de investigação sobre a qual se debruçam para encontrar sua causa e aprender com isso

[2] NRC, 1991a, p. 7 *apud* Borasi 1996, p.2

(CURY, 2007). É a partir desse olhar a produção do aluno tomada como mais uma oportunidade de aprendizagem que, neste trabalho, busca-se discutir o desenvolvimento de uma tarefa investigativa, a utilização de ideias e conceitos relacionados à potenciação.

Os pressupostos de ensino e de aprendizagem de Matemática nos quais essa experiência foi desenvolvida fundamentam-se na abordagem de ensino Educação Matemática Realística – RME, cujo desenvolvimento contrapõe pressupostos de matemática como uma ciência acabada, a-histórica. A matemática como atividade humana é um dos aspectos da abordagem do Ensino Educação Matemática Realística. No Quadro 1, são apresentados outros aspectos que a RME considera.

RME	**Síntese**
Atividade humana	A matemática não é vista como algo de natureza divina ou como um assunto a ser transmitido, e sim como uma atividade de natureza humana, um constructo derivado da ação humana.
Matematização da realidade	Compreendida como um processo de organização, esquematização e processamento matemático ao trabalho do aluno enquanto sujeito que elabora sua própria matemática
Reinvenção-guiada	É a possibilidade que o estudante se torne autor do seu conhecimento matemático.
Realidade como fonte da matemática	Oportunidades de os estudantes desenvolverem o conhecimento matemático fundamentado em experiências do dia a dia.
Articulação da matemática com outros domínios	Significa que os domínios do conhecimento matemático como número, geometria, medidas, e tratamento da informação não são considerados como capítulos isolados no currículo, mas como fortemente integrados, assim como nas demais ciências.
Contextos ricos de significado	São situações pelas quais podem emergir a matemática, por meio do processo de matematização.
Elaboração de representações mentais	Dizem respeito a representar relações, provar regularidades, refinar e ajustar modelos, usar diferentes modelos, generalizar.
Compreensão de mecanismos	Compreensão ao invés de mera reprodução de mecanismos.
Abordagens múltiplas em relação a conceitos novos	É preciso dar aos alunos diferentes oportunidades para experienciar a matemática como uma "atividade humana"

Quadro 1 – Aspectos para o ensino da matemática na RME
Fonte: autoras – baseado em Freudenthal (1979, p. 323)

DESENVOLVIMENTO

A aplicação da tarefa que gerou este relato ocorreu em um colégio da Rede Estadual de Londrina - PR, no primeiro trimestre de 2019, com três turmas distintas de 9º ano do Ensino Fundamental II, com o tempo de 3 aulas na qual cada aula com 50 minutos. Nesse período, iniciava-se um estudo de potências e suas propriedades. As salas de aulas estavam assim compostas: 36 alunos no 9MB[3], 38 alunos no 9MC e 39 alunos no 9MD. A primeira autora foi a professora regente.

A tarefa consistia em explorar situações que envolviam potências. No enunciado havia propriedades equivocadas e propriedades coerentes. Foi apresentada a Tarefa (Quadro2), escrita na lousa e solicitado que formassem grupos de no máximo 4 alunos de tal forma que cada aluno produzisse a sua resolução e reposta para depois trocar e compartilhar ideias e descobertas em seu pequeno grupo.

Qual propriedade de potência você considera coerente? Investigue o porquê. a) $a^m.a^n = a^{m+n}$ b) $a^m.a^n = a^{m.n}$ c) $a^m \div a^n = a^{m \div n}$ d) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ e) $(a^m)^n = a^{m^n}$ f) $(a^m)^n = a^{m.n}$ g) $(a.b)^m = a^m.b^m$ h) $(a \div b)^m = a^m \div b^m$	Que descobertas podemos fazer com o esquema a seguir? $a^4 =?$ $a^3 =?$ $a^2 =?$ $a^1 =?$ $a^0 =?$ $a^{-1} =?$ $a^{-2} =?$ $a^{-3} =?$

Quadro 2 – Tarefa apresentada na lousa
Fonte: as autoras

Aos pequenos grupos foi oportunizado o tempo de 50 minutos para a produção escrita e a discussão da forma de pensar. Ao final da dinâmica, em roda de discussão com todos os alunos da turma, discutiu-se as soluções apresentadas.

Ao elaborar a tarefa, foram considerados os objetivos do plano de trabalho docente, que consistiam em compreender o conceito de potência de expoente inteiro, com a base sendo um número real; saber aplicar as propriedades decorrentes da definição e efetuar operações de multiplicação e divisão com potências de mesma base, potências de um produto ou de um quociente e potência de outras potências; saber investigar padrões, regularidades e modelos nas situações-problema apresentadas em discussões. Também foram considerados objetivos como: desenvolver a capacidade de aceitação da opinião de todos e/ou contra- argumentação;

[3] As siglas, 9º MB, 9º MC e 9º MD, partem da organização da Escola para diferenciar as três turmas.

desenvolver o respeito, a cooperação e a colaboração entre todos; desenvolver do hábito de pensar, aprender e construir matemática.

Após apresentar a tarefa, a professora observou o trabalho dos grupos e fez intervenções por meio de questionamentos não para apontar respostas corretas ou não, mas para potencializar o processo de aprendizagem. A criação de um ambiente em que os alunos tenham liberdade de se arriscar com as respostas, sem críticas a erros, é incentivada na abordagem RME.

Após o tempo combinado, os alunos organizaram-se para compartilhar e construir estratégias com o grupo todo. Nesse momento, apresentaram soluções distintas, evidenciando que as situações que compunham a tarefa eram flexíveis e realísticas para os sujeitos que as resolveram, pois lhes permitiam resolver por diferentes estratégias e em diferentes níveis de compreensão.

O recorte do diálogo a seguir, evidencia aspectos como: um ambiente em que os alunos tenham liberdade de se arriscar ao investigar tarefas; interatividade entre colega e professor; as intervenções da professora buscando potencializar o processo de aprendizagem; uma tarefa com flexibilidade de respostas com diferentes soluções e realístico para os alunos envolvidos.

> Sujeito 36: “Mostra como você fez esse.” (Referindo-se à investigação dessa propriedade: $a^m.a^n = a^{m+n}$ no pequeno grupo)
>
> Sujeito 12: “Coloquei no lugar do ‘a’ o 2 que é mais “facinho”. Eu coloquei esses números no ‘m’ e ‘n’.” (apontando para o m=2 e n=3)
>
> Sujeito 36: “Eu fiz quase igual. (Apontando para o m=1 e n=2). Sei lá eu acho que deu.”
>
> P[4]: “É, parece que deu. Mas será que dá certo com qualquer número? Sei lá, com um número negativo, por exemplo.”
>
> Sujeito 12: “Vou ver se dá, mas não sei fazer quando tem negativo. Vou ver aqui! Vai cara”.
>
> P: “Tá, antes de apresentarem o que o grupo pensa, analisem bem, investiguem, testem. Descubram como faz quando é negativo, já volto para ver o que descobriram.”

Destaca-se, nessa dinâmica, o fato de a própria tarefa conter, propositalmente, erros, por exemplo, $a^m.a^n = a^{m.n}$. Essa situação poderia causar desconforto para um professor tradicional, contudo é uma das possibilidades de investigação. Borasi (1996) fez um experimento geométrico de investigação em que o início da proposição era equivocado e, com investigação e exploração, seus alunos encontraram o equívoco. Segundo a autora, erros podem ser usados para investigar a natureza de noções fundamentais da Matemática.

[4] **P:** professora pesquisadora.

A seguir destacam-se das produções escritas dos alunos na roda de discussão os equívocos mais frequentes da tarefa, a condução do diálogo e uma breve análise do encaminhamento dado.

Equívoco	**Diálogo analisado**[5]	**Análise:**
$3^2 = 6$	Diálogo retirado de um dos pequenos grupos: *Sujeito 1*: Cara! Tem alguma coisa estranha! *Sujeito 2*: Eu não sei nem começar! *Sujeito 1*: Meu! Cara! Se a professora quisesse que fosse 3x2, ela teria escrito 3x2 e não desse jeito. (Apontando para o 3^2)! *Sujeito 2*: Verdade (batendo na cabeça), é 9 e não 6.	Esse diálogo reflete a importância da troca entre alunos, que é uma das características da RME, a *interatividade*. O erro dessa situação pode levar o aluno a estabelecer relações com potência em outras situações.
$a^1=1$	Diálogo retirado da discussão em grande grupo: P: Todos concordam? Quem pode defender o que pensa? Há pessoas que disseram que $2^1=2$ e $2^1=1$, e agora? *Sujeito 3*: Não gente, é dois mesmo (negando sua primeira hipótese), porque você vai multiplicar o dois uma vez...é que só tem um dois. P: Que vocês acham? Alguém discorda? Quem concorda? Por quê?	Destaca-se a conduta da professora, que usou um dos princípios da RME, a *orientação*, em que uma das atitudes a professora é a intervenção, guiando (reinvenção guiada) e oportunizando uma escolha consciente. A atitude de não apontar o erro e o acertos é procedimento desejável na perspectiva do erro como oportunidade para aprendizagem.
$x^0 = 0$	Diálogo retirado da discussão em grande grupo. Ao perceber que os alunos não fizeram a descoberta esperada, a professora (ver esquema do Quadro2, coluna da direita) fez na lousa o esquema com o número escolhido pela turma, no caso, o dois. $2^4 = 16$ $2^3 = 8$ $2^2 = 4$ $2^1 = 2$ $2^0 = ?$ P: Estão de parabéns, descobriram muitas relações. Mas por que $2^0=1$? De onde vocês tiraram essa conclusão? *Sujeito 4***:** Eu sei que é 1, mas não sei o porquê! P: Não vou dizer! Terão que pensar um porquê! *Sujeito 5*: Ué, todo número elevado a zero é um. Todo mundo sabe! P: Não tenho tal certeza, mas a minha pergunta não é saber a resposta e sim o porquê de todo número elevado ser um! (Percebendo que os alunos não estabeleciam relações, formou-se um ambiente em que o silêncio imperou). P: Ok! Gostaria que parassem de aceitar respostas prontas sem questionar. Também gostaria que olhassem não só para o número $2^o=1$, mas para todos os demais números dessa sequência. Olhem as relações com os demais	Nessa passagem, o planejamento da aula teve que ser modificado imediatamente, porque os alunos não foram pelo caminho esperado. A intervenção, porém, foi uma oportunidade de saber o porquê e de provocar descobertas de exploração e relações. Outro aspecto desejável na abordagem do erro é a valorização do constructo e não do produto final, ou seja, a professora questionou por que um número elevado a zero é 1, levando os alunos a refletir e a pesquisar (*princípio da atividade*). Um ambiente de sala de aula em que os alunos possam se comunicar uns com os outros (*princípio da interatividade*) e possam se arriscar com as respostas dadas sem serem julgados se erraram ou não (*princípios de níveis)* é esperado na RME.

[5] Embora outros equívocos tenham acontecido, optamos pelos que nos chamou atenção.

ISSN 2595-5578

	números! Podem reunir-se com os colegas do lado mesmo para investigar. Depois de um tempo, uma dupla veio até a professora. *Sujeito* 6 e S*ujeito 7*: Professora, veja se está certo. P: Você sabe que não vou dizer, já combinamos. *Sujeito 6:* Não, professora, só olha. Daqui para aqui está dividindo por dois e aqui também e aqui também. Daí então é 1. P: Quer comunicar a sala e ver o que acham? [...] A turma concordou com a explicação que o *Sujeito 6* que fez na lousa.	
$2^{-1}= -2$	Diálogo retirado da discussão em grande grupo, na mesma sala da discussão anterior (curiosidade: nenhum aluno das três turmas pensou na fração correspondente). P: Ainda concordam que $2^{-1}= -2$? Silêncio. P: Ok, então vão ter que me explicar o porquê. *Sujeito 8:* Ahhh, professora, eu acho que não é mais não. P: O que fez você mudar de opinião? *Sujeito 8*: Ah, sei lá, acho que se for daquele jeito (apontando para a situação anterior) tem que dividir por dois também. Mas daí fica esquisito. P: Por quê? *Sujeito 8*: Ahh, sei lá, professora, ia ser um dividido por dois, aí ia ficar esquisito, sei lá! P: Mas pode ter fração, não pode? Que que a turma acha? (tempo para investigação)	Novamente valorizou-se o constructo e não o produto final. O lidar com o erro foi uma oportunidade para esse diálogo e para o estabelecimento de relações – matematizar - que é também um dos princípios da RME *(princípio da atividade).* O potencial desse erro foi tomado como fonte de indagações e de novas descobertas. O erro nesta circunstância abriu a oportunidade de uma nova tarefa, uma investigação, para os alunos se debrucem sobre ele e tentarem inventar ou descobrir por sí próprios, soluções que promovam o aprendizado.

Quadro 3 – Produções e análises do encaminhamento dado
Fonte: as autoras

Ao proporcionar indagações, incentivá-los a exploração, verbalizações e trocas de ideias entre os pares e professor, liberdade de arriscar-se em suas respostas, sejam certas ou equivocadas, parecem plausíveis e possível inferir, com o diálogo do Quadro 3, que o erro aliado a abordagem da RME foi um elemento desencadeador de oportunidade de aprendizagem.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As manifestações dos erros dessa experiência não foram tratadas como algo inconcebível, ao contrário, foram discutidas e utilizadas como uma oportunidade de aprendizagem. Destacamos aqui a valorização do procedimento, do processo, para chegar a uma resposta, não apenas ao resultado. Os porquês de determinadas situações estavam presentes, provocando refletir nas ações matemáticas, como, por exemplo, o porquê de um número elevado a zero ser 1. Essa conduta é uma das características desejadas na RME. O princípio da *interatividade*, por exemplo, permitiu que os próprios alunos identificassem, entre si, os erros e partilhassem seus pensamentos. A interação aluno e professor também proporcionou a participação do aluno de forma ativa. O princípio da *atividade* proporcionou que o aluno matematizasse, estabelecesse relações. O *princípio de níveis*, ao respeitar o patamar de aprendizagem, sem julgar o aluno pelos erros, criou um ambiente em que o aluno pudesse se arriscar em suas respostas. O princípio da *orientação*, também contribuiu para a aprendizagem, desde a escolha da tarefa, que oportunizou explorar e não oferecer respostas prontas e acabadas, até as intervenções da professora, que provocavam o repensar.

As abordagens empregadas aqui demandarem um tempo maior, quando comparado a uma abordagem tradicional, dizer "está errado e o certo é assim" são processos rápidos, porem podem privar o pensar/repensar. É preciso indagarmos quanto essa forma "rápida" pode contribuir para desenvolver aprendizagem. O erro aliado a abordagem da RME, inferimos que foi um elemento desencadeador de oportunidade de aprendizagem.

REFERÊNCIAS

BORASI, R. **Reconceiving mathematics instruction**: a focus on errors. Norwood, N.J.: Ablex Publishing Corporation, 1996.

CURY, H. N. ***Análise de erros:*** o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2007.

DE LANGE, J. **Mathematics, Insight and Meaning.** Utrecht: OW &OC, 1987

FREUDENTHAL, H. Geometry between the devil and the deep sea. **Educational Studies in Mathematics**, v. 3, n. 3-4, p. 413-435, 1971.

FREUDENTHAL, H. **Mathematics as an Educational Task**. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1973.

FREUDENTHAL, H. **Matemática nova ou educação nova?** Perspectivas, Portugal, v. 9, n.3, p. 317-328, 1979.

FREUDENTHAL, H. **Didactical phenomenology of mathematical structures**. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1983.

FREUDENTHAL, H. **Revisiting Mathematics Education.** Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.

ESTEBAN, M. T. **O que sabe quem erra?** Reflexões sobre avaliação e fracasso escolar. 3ª Ed.. Rio de Janeiro: DP&A, 2002.

GRAVEMEIJER, K. P. E. **O que torna a Matemática tão difícil e o que podemos fazer para o alterar?** Educação matemática: caminhos e encruzilhadas. Lisboa: APM, p. 83-101, 2005.

MENDES, M. T. **Utilização da Prova em fases como recurso para aprendizagem em aulas de Cálculo**. 2014. 275f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

TREFFERS, A. Three dimensions: a model of goal and theory description in mathematics instruction – **the wiskobas project**. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1987.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. V. D. Assessment and Realistic Mathematics Education. Utrecht: CD-ß Press/**Freudenthal Institute**, Utrecht University, 1996.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. V. D. Mathematics education in the Netherlands: a guided tour. In: **Freudenthal Institute.** Utrecht: Utrecht University, 2000. CD-ROM.