



## DISCUSSÕES MATEMÁTICAS PRODUTIVAS POR MEIO DE UMA TAREFA ENVOLVENDO OS NÚMEROS RACIONAIS

Henrique Rizek Elias  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR  
henriqueelias@utfpr.edu.br

**Resumo:** O objetivo do minicurso é trabalhar com uma tarefa matemática de exigência de nível elevado envolvendo números racionais e proporcionar aos participantes um ambiente propício para a realização de discussões matemáticas produtivas em sala de aula. O público-alvo são futuros professores e professores que ensinam matemática (professores dos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio). A proposta é que os participantes trabalhem, tanto na prática como na teoria, aspectos centrais da estratégia de ensino-aprendizagem exploratório, como a escolha apropriada de uma tarefa e as práticas para orquestrar discussões matemáticas produtivas em sala de aula. Dessa maneira, este minicurso visa proporcionar aos participantes uma alternativa ao ensino tradicional que parece predominar no ensino de Matemática nas escolas.

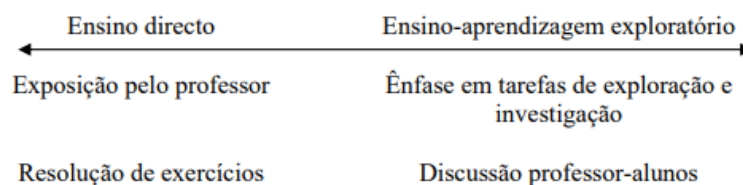
**Palavras-chave:** Discussões matemáticas produtivas. Ensino-aprendizagem exploratório. Tarefas matemáticas.

### INTRODUÇÃO

Conforme apresenta Ponte (2005), é possível distinguir duas estratégias básicas no ensino da Matemática: o ensino tradicional – chamado por Ponte (2005) de *ensino directo* – e o ensino-aprendizagem exploratório. Na primeira, o papel do professor é central, pois é ele quem apresenta o conteúdo seguido de exemplos. Nesse contexto, entende-se que o aluno aprende ouvindo o que lhe é dito e realizando exercícios, cujo objetivo é treinar os conceitos e técnicas apresentados e exemplificados pelo professor (PONTE, 2005).

Na segunda estratégia, chamada por Ponte (2005) de ensino-aprendizagem exploratório, “a característica principal é que o professor não procura explicar tudo, mas deixa uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem” (p. 13). É por esse motivo que o autor sugere o nome usando hífen, pois a ênfase desloca-se da atividade “ensino”, com foco no professor, para a atividade mais complexa “ensino-aprendizagem”, com a efetiva participação do aluno.

A Figura 1 ilustra uma comparação entre os aspectos centrais em cada uma das duas estratégias.



**Figura 1** – Estratégias de ensino de acordo com o papel do professor e dos alunos e a ênfase das tarefas.

Fonte: Ponte (2005)

Como pode ser observado na Figura 1, duas características são essenciais para a estratégia ensino-aprendizagem exploratório: as tarefas investigativas e as discussões em sala de aula. Nesse sentido, nossa intenção com o minicurso que estamos propondo, cujo público-alvo são licenciandos e professores que ensinam matemática, é trabalhar com uma tarefa matemática como um caminho para realizar discussões matemáticas produtivas (STEIN et al., 2008) em sala de aula. Esperamos, com isso, promover compreensões a respeito do ensino-aprendizagem exploratório como uma alternativa ao ensino tradicional que parece predominar no ensino de Matemática nas escolas.

## FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

De acordo com Ponte e Quaresma (2015), no ensino por meio de uma abordagem exploratória,

[...] os alunos assumem um papel ativo na interpretação das questões propostas e na construção das suas próprias estratégias de resolução, usando com flexibilidade diversas representações matemáticas. Não dispo de um método imediato de resolução das questões a resolver, os alunos são chamados a mobilizar o seu conhecimento, construindo e aprofundando a sua compreensão de conceitos, representações, procedimentos e outras ideias matemáticas. São também encorajados a apresentar e justificar as suas ideias aos colegas, desenvolvendo a sua capacidade de comunicação e de argumentação. (p. 132).

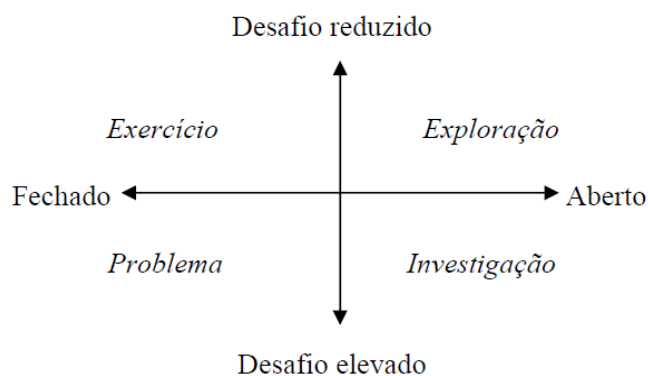
Ainda para os autores, essa abordagem é marcada pela natureza das tarefas propostas aos alunos, pelas dinâmicas de sala de aula e pela comunicação que se estabelece entre professor e alunos.

Diversos pesquisadores (STEIN, et al. 2008; STEIN; SMITH, 2009; PONTE, 2005; PONTE; QUARESMA, 2015) têm sugerido a possibilidade de se trabalhar com tarefas desafiantes para se criar um ambiente de sala de aula incentivador. Para Stein e Smith (2009), “as tarefas usadas na sala de aula constituem a base para a aprendizagem dos alunos” (p. 22).

De acordo com as autoras, tarefas que pedem aos alunos a execução de um procedimento memorizado, pouco desafiantes, desenvolvem uma determinada forma de pensar; tarefas que exigem dos alunos um pensamento mais elaborado, por meio de conceitos e de conexões entre eles, permitem desenvolver outra forma de pensar. Para as autoras, o primeiro tipo de tarefa é chamado de tarefas de exigências de nível reduzido, enquanto o segundo é chamado de tarefas de exigências de nível elevado. O trabalho com diferentes tipos de tarefas conduz os alunos ao desenvolvimento de ideias a respeito da natureza da Matemática (STEIN; SMITH, 2009), levando-os a refletir a respeito de sua própria compreensão sobre a Matemática.

Na mesma direção, Ponte (2005) apresenta um quadro organizador de sua perspectiva para os diferentes tipos de tarefas. Para esse autor, há duas dimensões fundamentais das tarefas: (i) o grau de desafio matemático e (ii) o grau de estrutura. A primeira, grau de desafio matemático, está relacionada à percepção da dificuldade de uma questão, característica bastante comum para graduar as questões propostas aos estudantes, tanto na sala de aula como em momentos especiais de avaliação (PONTE, 2005). Esse grau de desafio matemático varia entre os polos de desafio “reduzido” e “elevado”. A segunda dimensão fundamental, o grau de estrutura, varia entre os polos “aberto” e “fechado”. Nesse caso, “Uma tarefa fechada é aquela onde é claramente dito o que é dado e o que é pedido e uma tarefa aberta é a que comporta um grau de indeterminação significativo no que é dado, no que é pedido, ou em ambas as coisas” (PONTE, 2005, p. 7-8).

Quando se cruzam essas duas dimensões, obtêm-se quatro quadrantes que representam quatro tipos de tarefas, como apresentado na Figura 2.



**Figura 2** – Tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e de abertura.  
Fonte: Ponte (2005, p. 8)

Ponte (2005, 2014) explicam essa figura, da seguinte forma:

- um *exercício* é uma tarefa fechada e de desafio reduzido (segundo quadrante);

- um *problema* é uma tarefa também fechada, mas com desafio elevado (terceiro quadrante);
- uma *investigação* é uma tarefa aberta com desafio elevado (quarto quadrante);
- uma *exploração* é uma tarefa aberta e acessível à maioria dos alunos (primeiro quadrante).

A linha que separa essas tarefas não é tão nítida, uma vez que sua caracterização depende do estudante que está envolvido na tarefa. Por exemplo, a diferença entre tarefas de exploração e de investigação está no grau de desafio, portanto, se o estudante souber lidar com a situação de imediato, sem grandes planejamentos, a tarefa é do tipo exploração. Caso contrário, se, para aquele estudante específico, a tarefa se apresentar como um desafio elevado, que demanda um empenho maior, melhor chamar de tarefa de investigação.

Portanto, na perspectiva de Ponte (2005, 2014), faz-se necessário que o professor busque propor uma variedade delas, para que consiga propiciar diferentes reações em seus estudantes. Concordando com Stein e Smith (2009), mais do que tarefas isoladas, o professor deve preparar sequências de tarefas devidamente organizadas, de modo que os estudantes possam atingir os objetivos de aprendizagem previstos (PONTE, 2014). É fundamental escolher tarefas apropriadas, que possam servir de base para que os alunos se envolvam em atividade matemática rica e multifacetada.

Além disso, é preciso estar ciente que somente a elaboração ou seleção cuidadosa e a proposição de uma tarefa não garantem as atividades dos estudantes. Como aponta Ponte (2014), uma tarefa pode ter ou não potencialidades para mobilizar conceitos e processos matemáticos, originando atividades diversas. Outros aspectos influenciam, como “o modo como for proposta, a forma de organização do trabalho dos alunos, o ambiente de aprendizagem, e a sua própria capacidade e experiência anterior” (PONTE, 2014, p. 16). Isso significa que, para uma tarefa dar lugar a atividades diversas, não basta sua proposição; as situações de ensino criadas pelo professor e o compromisso dos próprios estudantes também compõem esse processo.

Nesse ponto, chamamos a atenção para o segundo aspecto essencial para a estratégia do ensino-aprendizagem exploratório, conforme apresentado na Figura 1: a discussão professor-aluno. Nesse aspecto, embasamo-nos no que Stein et al. (2008) chamam de orquestrando discussões matemáticas produtivas em sala de aula. As autoras elencam cinco práticas para orquestrar discussões matemáticas produtivas em torno de tarefas cognitivamente exigentes que podem ser adotadas pelos professores: *antecipar*, *monitorar*,

*selecionar, sequenciar e conectar* as respostas dos alunos. A seguir, apresentamos brevemente cada uma dessas cinco práticas conforme apresentadas por Stein et al. (2008).

A prática de *antecipar* as respostas dos alunos vai além do que simplesmente avaliar se uma tarefa estará no nível adequado de dificuldade ou de interesse suficiente aos alunos, não se limitando a inferir se eles provavelmente obterão a resposta correta ou não. Antecipar as respostas dos alunos envolve a capacidade de prever como eles podem interpretar matematicamente um problema, prever o conjunto de estratégias (corretas e incorretas) que podem ser usadas para abordá-lo e analisar de que maneira essas estratégias e interpretações podem estar relacionadas aos conceitos, representações, procedimentos e práticas matemáticas que o professor gostaria que seus alunos aprendessem.

A prática de *monitorar* as respostas dos alunos envolve prestar atenção no pensamento matemático mobilizado por eles enquanto trabalham com a tarefa proposta. Isso é feito circulando pela sala de aula enquanto os alunos trabalham. Mas, não se trata apenas de observar quais alunos estão realmente envolvidos com a tarefa ou quais estão frustrados, o professor deve participar ativamente da matemática envolvida nas discussões entre os alunos, avaliando a validade dos argumentos utilizados e instigando a discussão. O objetivo dessa prática é identificar a potencial aprendizagem matemática e as estratégias ou representações particulares utilizadas pelos alunos, refinando, assim, as respostas que serão compartilhadas na discussão com a sala toda.

Depois de ter monitorado as respostas dos alunos, o professor pode *selecionar* determinados alunos para compartilhar suas ideias com o restante da turma. Uma maneira de se fazer isso é convocar alunos específicos (ou grupos de alunos) para apresentarem sua resolução à medida que a discussão prossegue. Outra maneira é quando o professor convida voluntários, mas depois seleciona um aluno em particular, um aluno que o professor reconheça possuir uma ideia particularmente útil para compartilhar com a turma toda. Em todos esses métodos de seleção, o professor permanece no controle de quais alunos apresentarão suas estratégias e, portanto, qual será provavelmente o conteúdo matemático da discussão. Com os alunos selecionados para apresentar, o professor pode *sequenciar* as apresentações para a turma toda. Ao fazer escolhas intencionais sobre a ordem das diferentes resoluções a serem compartilhadas, o professor aumenta as chances de suas metas matemáticas serem alcançadas.

Por fim, a última prática refere-se à ação de *conectar* as ideias matemáticas presentes nas estratégias e representações que os alunos da turma apresentaram. Isso pode ajudá-los a julgar que estratégia é mais eficaz e qual é a de mais fácil compreensão. Isso também pode

ajudar os alunos a verem como uma mesma ideia pode ser incorporada em duas estratégias que, à primeira vista, parecem bastante diferentes. Então, ao invés de ter discussões matemáticas consistindo em apresentações separadas de diferentes maneiras para resolver um problema em particular, o objetivo é fazer com que as apresentações dos estudantes sejam construídas uma sobre a outra para desenvolver ideias matemáticas.

Acreditando que essas cinco práticas favorecem as discussões coletivas em sala de aula e, conseqüentemente, permite o uso da estratégia ensino-aprendizagem exploratório, buscaremos trabalhar tais práticas ao longo do minicurso aqui proposto.

### **O DESENVOLVIMENTO DO MINICURSO**

O objetivo do minicurso é trabalhar com uma tarefa matemática de exigência de nível elevado e proporcionar um ambiente propício para a realização de discussões matemáticas produtivas em sala de aula. Com isso, ao final do minicurso, esperamos que os participantes construam (ou ampliem, caso já tenham) uma compreensão a respeito do ensino-aprendizagem exploratório como uma alternativa ao ensino tradicional que parece predominar no ensino de Matemática nas escolas.

O público-alvo deste minicurso são licenciandos e professores que ensinam matemática (professores dos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio). O minicurso está pensado em dois momentos: (i) no primeiro momento, os participantes trabalharão, em pequenos grupos, com uma tarefa de exigência de nível elevado (tarefa de investigação ou exploração, nos termos de Ponte (2005)). Esse primeiro momento consistirá em experienciar discussões matemáticas produtivas conduzidas pelos proponentes do minicurso; (ii) no segundo momento, após vivenciarem, na prática, uma “aula” inspirada no ensino-aprendizagem exploratório, os aspectos teóricos a respeito de tarefas, discussões matemáticas produtivas e ensino-aprendizagem exploratório serão discutidos com os participantes.

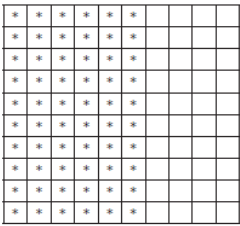
O tema matemático da tarefa a ser desenvolvida no primeiro momento será números racionais, por ser um tema que se conecta com o trabalho docente tanto nos anos iniciais como nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

A tarefa matemática a ser desenvolvida durante o minicurso dependerá do perfil dos participantes (licenciandos em Matemática ou em Pedagogia, licenciados em Matemática ou em Pedagogia), mas, para exemplificar um tipo de tarefa possível, na Figura 3 trazemos uma

tarefa de exigência de nível elevado presente em um dos referenciais teóricos que fundamenta esta proposta de minicurso.

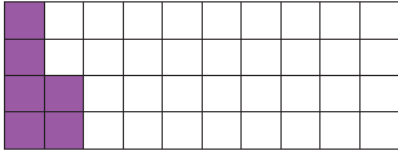
**Procedimentos com conexões**  
Usando uma grelha de 10 x 10, identifica o número decimal e a percentagem equivalente de  $3/5$ .

*Respostas esperadas dos alunos:*

Diagrama	Fracção	Decimal	Percentagem
	$60/100 = 3/5$	$60/100 = 0,60$	$0,60 = 60\%$

**Fazendo matemática**  
Pinta 6 quadrados pequenos num rectângulo de 4 x 10. Usando o rectângulo, explica como determinas: (a) a percentagem da área que foi pintada; (b) a parte da área que foi pintada, em forma decimal, (c) a parte da área que foi pintada na forma de fracção.

*Uma resposta possível dos alunos:*



a) uma coluna será 10%, já que há 10 colunas. Então 4 quadrados é 10%. Em seguida 2 quadrados é metade de uma coluna e metade de 10%, a qual é 5%. Então os 6 quadrados pintados são 10% mais 5%, ou seja 15%.

b) uma coluna será 0,10, já que há 10 colunas. A segunda coluna tem somente 2 quadrados sombreados, então será metade de 0,10, que é 0,05. Então 6 quadrados sombreados correspondem a 0,1 mais 0,05, que é igual a 0,15.

c) 6 quadrados sombreados dos 40 são  $6/40$ , que simplificado dá  $3/20$ .

**Figura 3** - Abordagem de nível elevado para determinar a relação entre diferentes representações de quantidades fraccionárias.

Fonte: Stein e Smith (2009)

Outras possibilidades de tarefas são aquelas apresentadas por Lins e Silva (2008) e que envolvem a ideia de comparação de frações. Por exemplo, (i) “Suponha que na cidade A, 3 de cada 4 casas têm telefone, enquanto que na cidade B, 2 de cada 3 casas têm telefone. Qual delas está mais bem equipada em termos de telefonia?” (p. 28); (ii) “Num jogo de futebol,

Marcos chutou ao gol 8 vezes e fez dois gols, enquanto Geraldo chutou 14 vezes e fez três gols. Qual dos dois jogadores foi mais eficiente?” (p. 27).

## REFERÊNCIAS

LINS, R. C., SILVA, H. da. **Frações**. Brasília: MEC, SEB, SEED, UNESP, 2008, 39 p. (Coleção PRÓ-LETRAMENTO, Fascículo 04).

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In: GTI (Ed.), **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, 2005.

PONTE, J. P. Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In: PONTE, J. P. (Org.), **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática**. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014, p. 13-27.

PONTE, J. P.; QUARESMA, M. As discussões matemáticas na aula exploratória como vertente da prática profissional do professor. **Revista da Faculdade de Educação**, v. 23, n.1, p. 131-150, 2015.

STEIN, M. K.; SMITH, M. S. Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: da investigação à prática. **Educação e Matemática**, n. 105, p. 22-28, nov-dez, 2009.

STEIN, M. K. et al. Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 10, n. 4, p. 313-340, 2008.