ENSINO DE ALGUNS CONCEITOS DE GRUPOS E SUBGRUPOS POR MEIO DO CUBO MÁGICO

Rafael Figura Novato da Luz
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR
rafaelnovato10@hotmail.com

Leandro Charava
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR
Charava69@gmail.com

Matheus Lima Ribeiro
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR
matheuslimaribeiro@alunos.utfpr.edu.br

Wilian Francisco de Araujo
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR
Waraujo@utfpr.edu.br

Resumo

O minicurso, planejado para ser realizado em duas horas e meia, tem como objetivo mostrar aos participantes como conectar os conceitos fundamentais de álgebra com as propriedades do Cubo Mágico. Utilizando uma metodologia prática, os participantes serão introduzidos às noções de Grupos, Subgrupos e Subgrupos Cíclicos por meio de atividades que envolvam a manipulação e resolução do cubo mágico. Neste texto, são apresentados os pressupostos teóricos utilizados para realização do minicurso, bem como as etapas que serão realizadas. Ao final, espera-se que os participantes sejam capazes de aplicar esses conceitos para solucionar o cubo mágico e entender a matemática subjacente aos algoritmos de resolução. A abordagem proposta busca tornar o aprendizado da álgebra mais acessível e envolvente, incentivando a explorar a beleza e a utilidade da matemática em problemas concretos.

Palavras-chave: Álgebra. Cubo de Rubik. Ensino.

Introdução

A matemática, com sua vasta gama de conceitos abstratos, muitas vezes apresenta desafios significativos no ensino para alunos de diversas idades. Entre esses conceitos, a álgebra se destaca por sua complexidade e pela dificuldade de encontrar aplicações práticas diretas em problemas cotidianos. No entanto, uma abordagem interdisciplinar pode tornar esses conceitos mais acessíveis e envolventes.

Grimm (2016) demonstra em sua dissertação de mestrado, que o popular quebra-cabeça tridimensional amplamente conhecido e apreciado, cubo mágico, apresenta-se como uma novidade para ilustrar e aplicar conceitos algébricos de maneira prática. A resolução do cubo mágico envolve uma série de movimentos e sequências que podem ser escritos, comparados e analisados utilizando a teoria dos grupos. Neste contexto, na busca de tornar o aprendizado mais tangível e interessante, o minicurso proposto tem como objetivo conectar conceitos fundamentais de álgebra com as propriedades do cubo de Rubik, a partir de sua manipulação e interação prática, de modo a alterna-lo com a teoria, proporcionando aos participantes uma nova forma de visualizar e compreender os conceitos iniciais da álgebra a partir do cubo mágico.

A estrutura do minicurso abrange desde os conceitos básicos de álgebra e a estrutura do cubo mágico, passando pela aplicação prática desses conceitos no cubo, até a resolução completa utilizando algoritmos baseados em álgebra. Cada momento foi planejado para construir o conhecimento de forma gradual e integrada, culminando na capacidade de resolver o cubo mágico e entender a matemática subjacente aos algoritmos de resolução.

A importância desse minicurso reside na sua abordagem interdisciplinar, que demonstra a relevância da álgebra em problemas concretos e cotidianos. Ao final do minicurso, espera-se que os participantes não apenas dominem os conceitos algébricos apresentados, mas também desenvolvam um interesse mais profundo pela utilidade da matemática. Além disso, a metodologia empregada pode servir como um modelo pedagógico para o ensino de outros conceitos matemáticos abstratos, promovendo uma educação matemática mais envolvente e eficaz.

A álgebra associada

No minicurso serão discutidos os conceitos de Grupos, Subgrupos e Subgrupos Cíclicos. Nesta seção, são trazidos tais conceitos a fim de familiarizar os participantes, de acordo com os conhecimentos apresentados por Iezzi e Domingues (1970) em seu trabalho “Álgebra Moderna” (Iezzi; Domingues, 1970, p. 138).

Para o conceito de grupos, temos que, seja G um conjunto não vazio com uma operação $*$: $G \times G \to G$. Dizemos que $(G,*)$ é um grupo se satisfazem as seguintes propriedades:

1. Associativa: $a * (b * c) = (a * b) * c, \forall a, b, c \in G$;
2. Elemento Neutro: $\exists e \in G \; tal \; que \; a * e = e * a = a, \forall a \in G$;
3. Elemento Inversível: $\forall a \in G, \exists a' \in G \; tal \; que \; a * a' = a' * a = e$.

Se além disso, $(G,*)$ satisfaz $a * b = b * a, \forall a, b \in G$, dizemos que $(G,*)$ é um grupo comutativo (ou abeliano).

Exemplos:

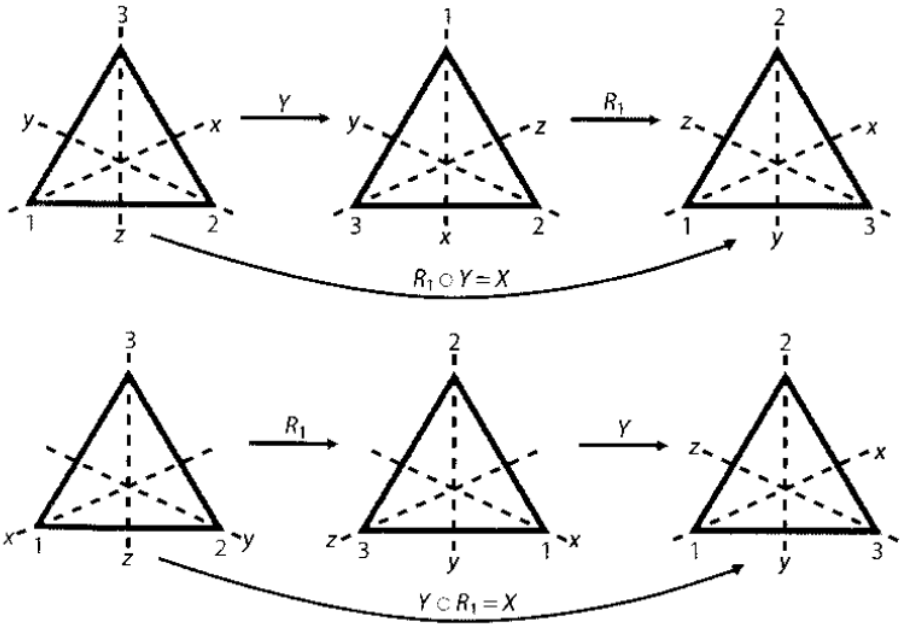

Figura 1 - Movimentos Regulares do Triângulo
Fonte: Iezzi e Domingues (1970, p. 149)

No contexto do Cubo de Rubik, o conjunto de todas as possíveis configurações do cubo, junto com a operação de realizar uma sequência de movimentos, forma um grupo. Cada configuração do cubo é um elemento do grupo, e a operação de grupo é a aplicação sequencial de movimentos.

Para o conceito de subgrupos, temos que, seja $(G,*)$ um grupo. Dizemos que um subconjunto não vazio H ⊂ G é um subgrupo de G se:

1. Se $a, b \in H$, então $a * b \in H$ (H é fechado para a operação $*$);
2. $(H,*)$ também é um grupo.

Exemplo:

Usando o Cubo de Rubik como exemplo, podemos considerar o método de Thistlethwaite, que divide os movimentos do cubo em subgrupos com restrições progressivamente mais fortes nos movimentos permitidos, facilitando a resolução do cubo. Cada conjunto de movimentos restrito forma um subgrupo do grupo de todos os movimentos possíveis do cubo.

Por fim, um subgrupo cíclico (Iezzi; Domingues, 1970, p. 178) é um tipo especial de subgrupo que pode ser gerado por um único elemento. Isto significa que todos os elementos do subgrupo podem ser escritos como potências (ou iterações) de um único elemento g de G. O subgrupo cíclico gerado por g é denotado por $\langle g \rangle$ e é definido como:

$$\langle g \rangle = \{g^n \mid n \in Z\}$$

Exemplo:

Em termos práticos, no Cubo de Rubik, se escolhermos uma sequência de movimentos específica e aplicarmos essa sequência repetidamente, a coleção de todas as configurações que podemos alcançar desta maneira forma um subgrupo cíclico. Cada configuração é alcançada através de um número inteiro de aplicações (positivas ou negativas) da sequência de movimentos escolhida.

O cubo de rubik

O Cubo de Rubik (3x3x3), também conhecido como Cubo Mágico, foi criado pelo professor e arquiteto húngaro Ernő Rubik em 1974 com o objetivo de explorar conceitos de geometria espacial com seus alunos (Araújo, 2016). Inicialmente, Rubik tentou fixar as peças do cubo utilizando elásticos, mas descobriu que eles se rompiam durante a manipulação das peças. Para solucionar esse problema, ele decidiu esculpir cada peça individualmente, garantindo tanto a integridade estrutural do cubo quando todas as peças estiverem encaixadas quanto a movimentação independente de cada face. Para diferenciar as peças, Rubik aplicou adesivos coloridos sobre elas.

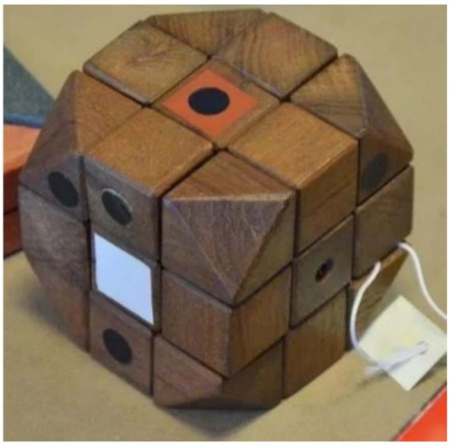

Figura 2 - Cubo de Ernő Rubik
Fonte: Senem (2017)

Assim, com o cubo concluído, o professor percebeu que, além de uma ferramenta de ensino, havia criado um quebra-cabeça que começaria a ser comercializado em 1980 e rapidamente se popularizou. Hoje, o Cubo de Rubik é amplamente reconhecido como um cubo composto por 26 cubículos menores, sendo que cada uma das faces, quando montadas, apresenta uma cor diferente: azul, verde, vermelho, laranja, branco e amarelo.

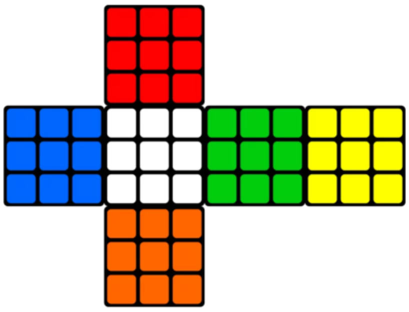

Figura 3 - Cubo Mágico Planificado
Fonte: Blog Oncube

Existem diversos algoritmos para resolver o Cubo de Rubik. Para descrevê-los, foram desenvolvidas notações sobre os movimentos que o cubo realiza.

Segundo o padrão mundial, com a face branca para baixo e a face amarela para cima, então, tomando a face azul para frente, como mostrado na Figura 4, chama-se: Front, denotado F, o giro da face da frente no sentido horário; Inverso do front, denotado F^{-1}, o giro da face da frente no sentido anti-horário; Right, denotado R, o giro da face lateral direita no sentido horário; Inverso do right, denotado R^{-1}, o giro da face lateral direita no sentido anti-horário; Left, denotado L, o giro da face lateral esquerda no sentido horário; Inverso do left, denotado L^{-1}, o giro da face lateral esquerda no sentido anti-horário; Down, denotado D, o giro da face inferior no sentido horário; Inverso do down, denotado D^{-1}, o giro da face inferior no sentido anti-horário; Back, denotado B, o giro da face de trás no sentido horário; Inverso do back, denotado B^{-1}, o giro da face de trás no sentido anti-horário; Up, denotado U, o giro da face de cima no sentido horário; Inverso do up, denotado U^{-1}, o giro da face de cima no sentido anti-horário.

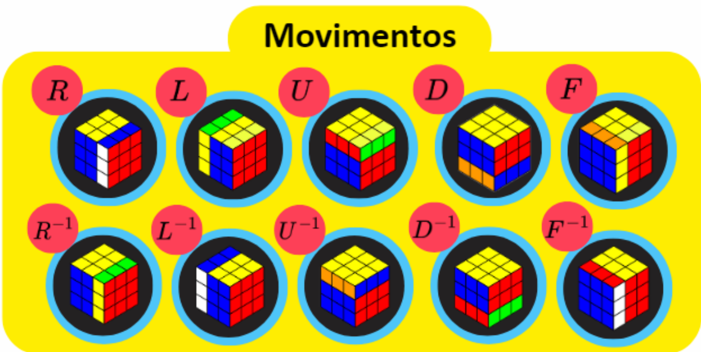

Figura 4 - Movimentos do Cubo Mágico
Fonte: da pesquisa

Embora muitos métodos de resolução do Cubo de Rubik tenham sido desenvolvidos, como o método das camadas e o método de Fridrich, que se baseiam em etapas para resolver o cubo sem desfazer o progresso das etapas anteriores, esses métodos exigem que muitos movimentos sejam aplicados no cubo até que ele esteja completamente resolvido. Portanto, não demorou para que os matemáticos começassem a buscar o menor número de movimentos necessários para resolver qualquer posição do cubo e um algoritmo que resolvesse todos os cubos sem ultrapassar esse número.

O minicurso

A estrutura do minicurso proposto é projetado em etapas sequenciais, com duração total de 2 horas e 30 minutos, sendo elas:

1. Introdução ao Cubo Mágico;
2. Contextualização histórica;
3. Exploração de movimentos e nomenclaturas do cubo;
4. Análise e demonstração de propriedades algébricas no cubo mágico;
5. Discussão e Sistematização.

Inicialmente, *etapa 1*, os participantes serão recepcionados e organizados no espaço, e logo após serão disponibilizados o material impresso e o Cubo Mágico a cada um, com orientações a explorar uma visão geral e se familiarizar com as características do objeto de estudo, como suas formas, cores, faces, cantos, número de peças e movimentações.

Na etapa seguinte, *etapa 2*, será explorada a história da criação do Cubo de Rubik, pelo professor húngaro Ernő Rubik expondo seu contexto histórico de evolução, destacando os desafios e inspirações que levaram ao nascimento do popular cubo mágico e os marcos importantes na história que provocaram o crescimento de sua popularidade.

Na *etapa 3*, serão discutidos os elementos, faces e nomenclaturas do cubo, assim como a descrição das letras e símbolos que representam os movimentos específicos de acordo com o trabalho da professora Chen (2004, p.10), a fim de padronizar uma base comum em relação aos registros, e auxiliar na compreensão orientações que ocorrerão nas etapas seguintes de forma mais precisa as manipulações e estratégias.

A análise e demonstração de propriedades algébricas, *etapa 4*, constitui o núcleo central do minicurso, com o auxílio do material impresso, a partir de atividades investigativas-manipulativas que exploram o Cubo Mágico, chegaremos a demonstração dos conceitos de Grupos e suas propriedades (Associativa, Elemento Neutro, Elemento Inverso, Não Comutativo) e Subgrupos Cíclicos.

Na *etapa 5*, finalizadas as atividades, será realizada uma discussão e sistematização dos conceitos de Álgebra utilizados, bem como as possibilidades de ensino dos mesmos com o uso do Cubo Mágico.

Infraestrutura necessária para a realização do minicurso

Para realização do minicurso serão necessários: Cubos Mágicos a todos os participantes (providenciado pelos autores 20 Cubos Mágicos), datashow para os slides; quadro para eventuais explicações, material impresso (que será enviado à equipe organizadora posteriormente) com as instruções, o roteiro de realização e as atividades a serem desenvolvidas.

Conclusão

O minicurso objetiva articular os conceitos fundamentais de grupos e subgrupos com as propriedades do Cubo Mágico por meio de atividades. Para isso, atividades investigativas-manipulativas foram pensadas para que os participantes pudessem desenvolver e aplicar os conceitos de álgebra aliados aos movimentos do Cubo Mágico.

A importância deste minicurso reside na sua abordagem prática, que mostra a aplicação dos conceitos de álgebra em um material manipulativo. Ao término do curso, é esperado que os participantes não apenas compreendam os conceitos algébricos apresentados, mas também cultivem um interesse mais profundo na aplicabilidade deles.

Adicionalmente, a metodologia utilizada pode servir como um exemplo pedagógico para o ensino de outros conceitos matemáticos abstratos, fomentando uma abordagem educacional matemática mais cativante e eficiente.

Referências

ARAÚJO, M. G. **O uso do cubo mágico como estratégia de ensino de permutações e funções**. 2016. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte. Rio Grande do Norte, 2016.

CHEN, J. J. **Group theory and the Rubik's cube**. 2004.

Blog ONcube. Como Resolver o Cubo Mágico Método Básico - Camadas. Disponível em: https://www.blog.oncube.com.br/tutoriais/tutorial-3x3x3/como-resolver-o-cubo-magico-metodobasico-camadas-intro/. Acesso em: 6 jun. 2024.

GRIMM, L. G. H. M. **Cubo mágico:** Propriedades e resoluções envolvendo Álgebra e Teoria dos Grupos. 2016. Dissertação de mestrado. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2016.

IEZZI, G; DOMINGUES, H. **Álgebra moderna**. 4 ed. São Paulo: Atual, 2003.

SENEM, D. **O Cubo Mágico e o Aprendizado na Física**. 2017. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em física) - Universidade Estadual do Centro Oeste. Guarapuava, 2017.