



## UM VOO PARA O ENSINO DA GEOMETRIA ESFÉRICA: PRONTOS PARA DECOLAR?!

Daiane Luisa Stahlhofer  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE)  
Daiane.stahlhofer@unioeste.br

### Resumo

Este trabalho descreve a experiência vivida pela autora durante o estágio na graduação em Licenciatura em Matemática ao realizar uma oficina matemática intitulada “Prontos para decolar?!” Relatar-se-á a experiência de ensinar geometria esférica para alunos do Ensino Médio. Para isso, será descrito o contexto em que a oficina foi inserida, sua preparação, sua aplicação e sua posterior avaliação, por parte dos alunos participantes e dos professores regentes. Ao escrever este relato busca-se compartilhar uma experiência marcante e significativa advinda da graduação, que mostra a importância de um ensino que propicia espaço para a investigação e o posicionamento do aluno. Conclui-se afirmando que experiências como esta não devem ficar restritas ao estágio, mas, perpassarem a formação inicial como um todo, contribuindo para que o educador esteja preparado para ser um incentivador de seus alunos, e, oferecendo-lhe condições de vislumbrar possibilidades de atuar de maneira distinta e coerente com abordagens investigativas.

**Palavras-chave:** Oficinas matemáticas. Geometria. Estágio Supervisionado.

### Introdução

Este relato apresenta a experiência vivenciada pela autora no segundo semestre de 2022, ao ministrar uma oficina matemática intitulada “Prontos para decolar?!”, na qual, por meio de uma suposta viagem aérea, deu-se a retomada de alguns conceitos da geometria plana e o ensino da geometria esférica para alunos do Ensino Médio. Tal oficina decorreu durante a realização da disciplina de Estágio Supervisionado na Educação Básica III, do curso de Licenciatura em Matemática.

O Estágio na formação do professor é obrigatório pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional nº 9394/96 e é tempo para desenvolver a prática. O Estágio não garante que o futuro professor irá saber lidar com todas as situações que aparecerem em sua caminhada profissional, mas é uma excelente maneira de oferecer experiência e preparo prévio. Segundo Paniago e Sarmiento (2015),

[...] o estágio supervisionado constitui um momento significativo na aprendizagem da docência profissional, por possibilitar a aproximação do formando com sua futura profissão, permitir-lhe vivenciar práticas de ensino, estabelecer a relação teoria-prática, conviver com a complexidade do cotidiano escolar e, sobretudo, experienciar práticas de interação educativa com os alunos. O contato direto com a escola, com as práticas de ensino dos professores titulares de turmas, com as

diversas relações existentes nesse cenário educativo é fundamental à aprendizagem e constituição da identidade docente [...] (Paniago; Sarmento, 2015, p. 77-18).

Dada a importância do Estágio Supervisionado e as atividades durante ele desenvolvidas, relata-se a aplicação da oficina “Prontos para decolar?!”. Ao longo do texto será possível identificar as limitações do uso da geometria plana ao se trabalhar com viagens aéreas, sendo necessário o conhecimento de geometrias não euclidianas, neste caso, a geometria esférica. Assim, serão trabalhados tanto conceitos da geometria plana como conceitos da geometria esférica, bem como suas possíveis relações e aplicações no cálculo da distância entre dois pontos.

### **Contexto da criação da oficina**

No que diz respeito à oferta de oficinas, elas estão previstas na Instrução Normativa nº 7, de 09 de agosto de 2023 da Instituição de Ensino, que apesar de ter sido publicada em 2023, ano seguinte à aplicação descrita neste relato, se alinha a prática que já era assumida na Universidade. No Capítulo VII da normativa, artigo 34, parágrafo 2 diz:

§ 2º O estágio curricular obrigatório é um espaço de aprofundamento teórico e prático de diferentes aspectos da educação, e inclui atividades de observação, oficinas, monitorias, planejamentos, regências, redação de relatórios, produção de artigos, e participação em seminários de socialização de portfólios (Instrução Normativa nº 7, 09 de agosto de 2023).

Desta forma, para as oficinas matemáticas a proposta aos alunos do curso de Estágio Supervisionado na Educação Básica da Licenciatura em Matemática era a seguinte: um tema interessante, que vai além do que é ensinado em sala de aula, que chame a atenção do aluno e o cativa para o aprendizado em matemática. Com isso em mente, se inicia uma busca por temas que poderiam ser contextualizados e que seriam legais de ensinar, que envolvessem cálculos que os alunos já sabiam fazer, mas que também pudesse ser um gancho para ensinar algo novo.

Ao mesmo tempo, durante a disciplina de Estágio, os alunos haviam discutido, em sala de aula, sobre alguns temas matemáticos, que deveriam ser ensinados com maior ênfase, e surgiu o tema geometria, que segundo Carvalho e Fernandes (2011) embora seja um ramo da matemática que permita aproximações com o mundo real, vem sendo deixado de lado. Estes autores defendem que, “a geometria pode desenvolver habilidades ligadas à forma, espaço, distância, percepção entre outros, permitindo uma maneira de compreender, descrever e representar organizadamente, o mundo no qual vivemos, bem como estabelecer aplicações práticas nas atividades cotidianas” (Carvalho; Fernandes, 2011, p. 03).

Aproveitando-se dessa possibilidade de aproximação ao mundo real, a autora buscou algo na geometria que despertasse a curiosidade, o interesse e, conseqüentemente, o engajamento dos

alunos. Ao ler sobre o ensino de geometria para o Ensino Básico encontrou uma citação de Martos (2002) que diz,

[...] a partir das grandes descobertas e invenções o homem tem buscado nos meios científicos, respostas para problemas concernentes às medidas geométricas. A partir dessa busca, tem constatado que, para algumas medidas, os conceitos da Geometria Euclidiana respondem satisfatoriamente, para os problemas que envolvam as pequenas medidas, mas para as medidas de grande escala, são necessários os conceitos de Geometrias não-Euclidianas (Martos, 2002, p. 212).

Dessa forma, ficou definido que o conteúdo matemático a ser abordado seria a geometria, não a geometria plana (Euclidiana), mas a geometria esférica ou também conhecida como geometria de Riemman. Com o intuito de aproximar-se de aspectos da realidade dos alunos e instigá-los, utilizou-se do contexto de viagens aéreas e a sala foi decorada como se fosse a parte interna de uma aeronave. Além disso, a autora, professora da disciplina durante a oficina, era a representante da companhia aérea “UTFPR Airlines”, na qual, os alunos participantes, eram os candidatos ao emprego de piloto de avião. Para passar no teste e serem contratados, era necessário que os candidatos fossem capazes de calcular a trajetória de um avião.

A partir dessa atividade seria possível cumprir com os objetivos propostos, sendo eles: compreender que existem outras geometrias além da Euclidiana, como a Geometria esférica; definir os elementos da superfície esférica; compreender os conceitos de circunferência máxima, triângulo esférico, geodésica e distância entre pontos; resolver problemas de distância entre pontos e de soma de ângulos internos de triângulos esféricos.

Foi necessário que a autora pesquisasse e buscasse informações sobre essa geometria, que ainda era desconhecida por ela mesma. Alguns trabalhos lidos que não fazem parte da construção bibliográfica deste relato, mas que foram relevantes para o entendimento e construção da oficina são: Geometria Riemanniana na Educação Básica: interdisciplinaridade em ação (Conceição, 2018); Geometrias Não Euclidianas: uma Proposta de Inserção da Geometria Esférica no Ensino Básico (Carvalho, 2017); Rotas Aéreas e a Geometria do Globo Terrestre (Costa, 2014); Atividades investigativas para exploração de conteúdos da Geometria Esférica com o GeoGebra (Guimarães; Pevorano, 2020).

### **Aplicação da Oficina**

A oficina “Prontos para decolar?!” foi realizada durante o segundo semestre de 2022, no campus da Universidade em que a autora estudava, na qualidade de licencianda do curso de Licenciatura em Matemática, com alunos das escolas do Ensino Básico da região. Ela aconteceu em

dois momentos, primeiramente para um grupo de alunos, das 8h até 9h30 e para outro grupo de alunos das 10h até 11h30.

Ao adentrar na sala, os alunos foram informados que estão participando de uma seletiva para trabalhar na companhia aérea e deveriam calcular a menor rota de voo possível para ir de São Paulo (Brasil) até Tóquio (Japão) fazendo uma conexão em Nova Iorque (Estados Unidos). Para isso apenas disponibilizariam de um mapa *mundi* e uma régua.

Logo os alunos perceberam que a menor distância não é cruzando a Europa, e sim passando sobre o Oceano. Então para resolver a situação apresentada eles mediram a distância entre São Paulo e Tóquio, passando por Nova Iorque e depois, usando a escala do mapa encontraram a distância real.

Após terem encontrado os valores, os alunos foram questionados se realmente acham que uma aproximação com um mapa plano seria bastante fiel à realidade, ou se um globo terrestre poderia nos ajudar, todos concordaram que como a Terra não é plana, seria difícil aproximar a trajetória com uma linha reta, teria que ser uma curva, então disponibilizamos, aos estudantes, globos terrestres e um pedaço de barbante, com isso foi possível realizar uma nova aproximação que também foi trazida para a discussão.

Os alunos também foram lembrados, que um avião sobrevoa a Terra a uma distância média de 11 mil metros, com o material manipulável essa distância é quase impossível de representar, talvez ela fosse a própria grossura do barbante, mas com cálculos de distância entre pontos na esfera seria possível considerar a altura de voo de um avião.

Iniciou-se então o ensino de alguns elementos da esfera, tais como, eixo, polos, equador, paralelos, meridianos, circunferência máxima, triângulo esférico, e, por fim, distância entre pontos em uma superfície esférica.

Ensinamos como se calcula a distância entre pontos a partir de algo já conhecido por eles, o cálculo do comprimento de uma circunferência, dado por:

$$C = 2. \pi. r$$

Onde  $C$  é o comprimento da circunferência e  $r$  é o raio. Sabendo que uma circunferência tem  $360^\circ$ , dividimos o comprimento da circunferência por  $360^\circ$ , e então, teremos o comprimento de  $1^\circ$ , se eu tenho o valor do ângulo central formado pelo arco de circunferência que eu quero calcular, que chamaremos de  $\alpha$ , basta agora multiplicar por ele, assim encontraremos o comprimento do arco clamado  $l$ , que desejamos.

$$l = \frac{2. \pi. r. \alpha}{360}$$

$$l = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180}$$

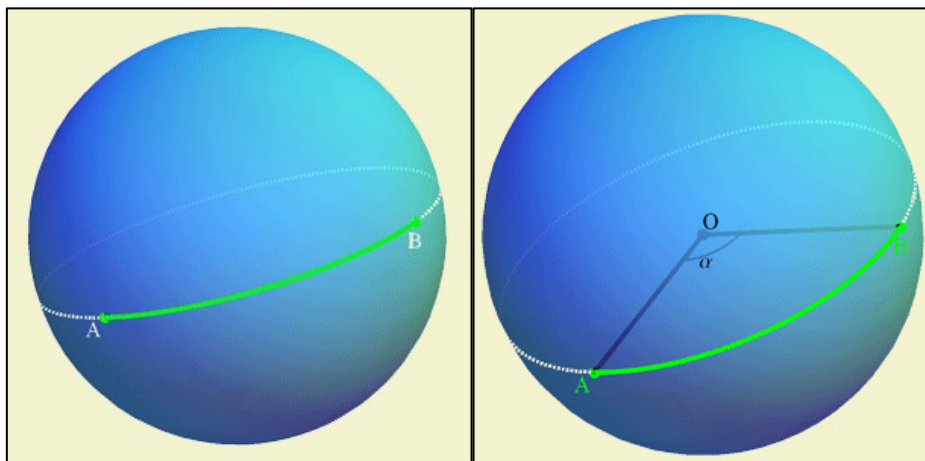
Por exemplo, para calcular a distância entre as cidades que se situam sobre a linha do equador, uma  $60^\circ$  a oeste do meridiano de Greenwich e outra  $15^\circ$  a leste, sabendo que o raio da Terra é de 6378 Km, pode ser realizado o seguinte cálculo:

$$l = \frac{3,14 \cdot 6378 \cdot 75}{180} = 8344,55$$

Se essa distância fosse percorrida por um avião, poderíamos utilizar a informação de que o avião sobrevoa a uma altura de 11 km, e ao alterar o valor do raio, que passa a ser 6389 Km, teríamos:

$$l = \frac{3,14 \cdot 6389 \cdot 75}{180} = 8358,94$$

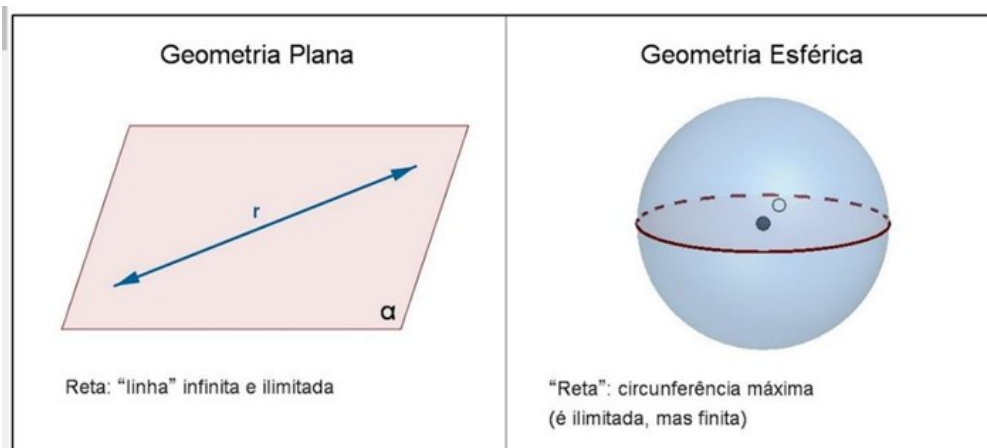
Para exemplificar o que é a distância entre pontos e o ângulo central usou-se da Figuras 1 que representam a distância entre os pontos A e B, que formam o ângulo central  $\alpha$ .



**Figura 1** - Distância entre os pontos A e B na esfera.

Fonte: Atractor (2019).

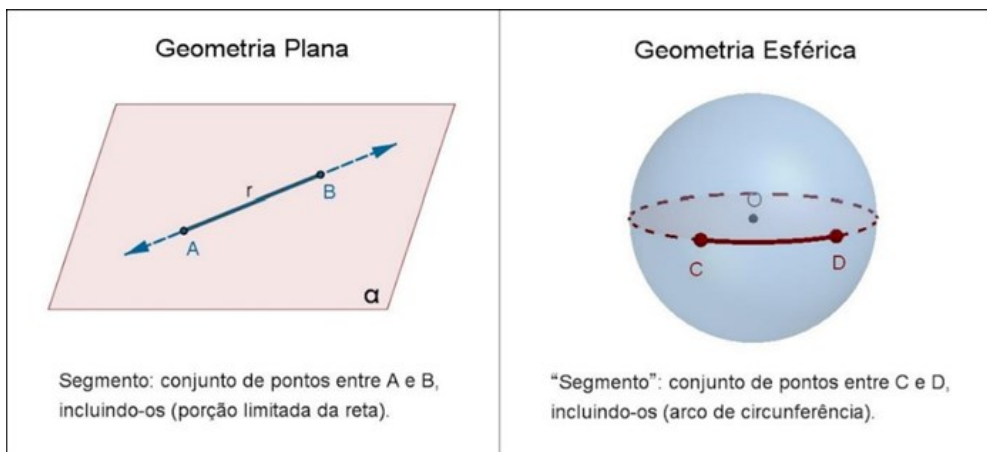
Nesta hora os alunos ficaram admirados, pois, relacionando seus conhecimentos prévios com novas informações, foi possível encontrar uma fórmula para calcular a distância entre pontos em uma superfície esférica, ou seja, calcular o comprimento de um arco de circunferência. Além disso, relacionamos alguns elementos da geometria plana com elementos da geometria esférica, mostrando suas divergências, através de imagens (Figuras 2, 3, 4 e 5) que foram projetadas.



**Figura 2** - Reta na geometria plana e esférica.

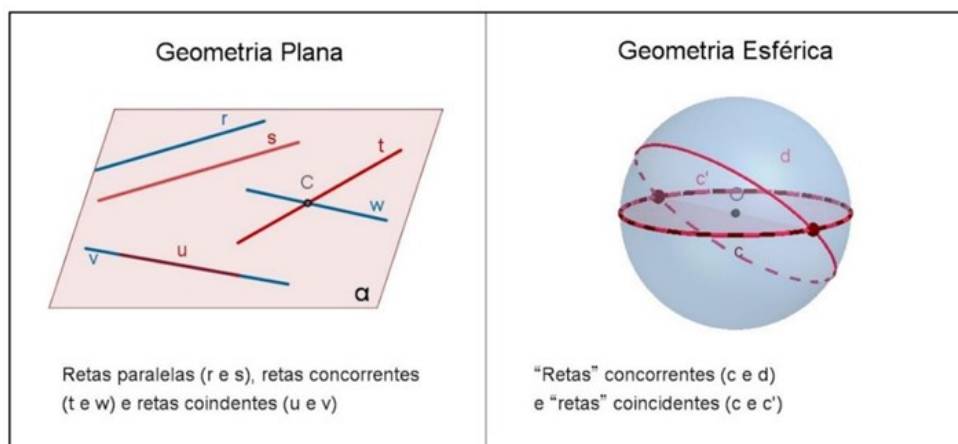
Fonte: Fonseca e Leivas (2021, p. 65).

Ao fazer o comparativo de retas na geometria plana e esféricas podemos dizer que são as circunferências máximas que substituem as retas da geometria plana.



**Figura 3** - Segmento na geometria plana e esférica.

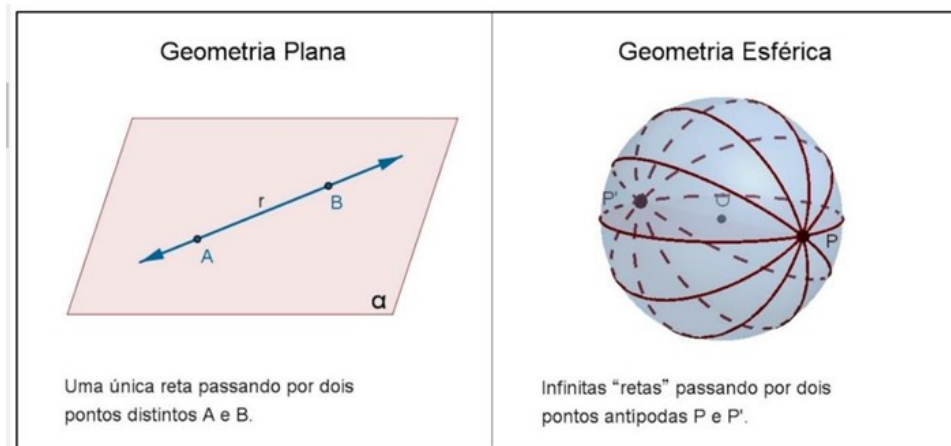
Fonte: Fonseca e Leivas (2021, p. 65)





**Figura 4** - Reta paralela na geometria plana e esférica.

Fonte: Fonseca e Leivas (2021, p. 65).



**Figura 5** - Reta que passa por dois pontos na geometria plana e esférica.

Fonte: Fonseca e Leivas (2021, p. 65).

Na Geometria Riemanniana não existem retas paralelas. Assim, as retas da superfície Euclidiana são substituídas pelas circunferências máximas na superfície Riemanniana.

Vale ressaltar que segundo Veloso (1928, apud. Conceição, 2018), na Geometria Euclidiana, dados dois pontos, existe uma única reta que passa por esses dois pontos. Na Geometria Riemanniana, dados dois pontos, eles podem ser antípodas, ou seja, existem infinitas circunferências máximas que contém dois pontos. Dessa forma, se dois pontos definem mais de uma circunferência máxima, e duas circunferências máximas sempre se encontram em dois pontos, “[...] se definirmos que duas circunferências máximas são paralelas quando não tem ponto em comum, vemos que não existem circunferências máximas paralelas” (Veloso, 1928, p. 332 apud Conceição, 2018, p.71).

Durante toda a oficina, foi possível perceber que os alunos se mantiveram atentos ao que lhes era proposto. Na Figura 6 é possível observar o engajamento deles ao desenvolverem as atividades da Oficina.



**Figura 6** – Oficina em andamento.

Fonte: A autora.

### Considerações finais

Essa experiência agregou ao conhecimento da autora. O aprendizado de um tema novo fez com que o contato com a matemática, especificamente a área da geometria, se tornasse mais significativo. Por meio do desenvolvimento e aplicação da oficina matemática a autora revisitou seu conhecimento em geometria plana e teve acesso ao estudo sobre a geometria esférica.

O avanço concernente ao estudo da geometria ocorreu devido a necessidade de retomar conteúdos da geometria plana, como os conceitos de reta, ponto e plano, além da pesquisa acerca da geometria esférica, como ela se constituiu historicamente, qual seu objeto de estudo, suas aplicações, formas de ensiná-la no Ensino Básico, bem como suas relações com a geometria plana.

Além disso, a experiência da regência da oficina foi marcante pois, pela primeira vez, a autora ofertou e vivenciou uma atividade em que os alunos estavam empenhados em realizá-la, ou seja, através da forma de condução da oficina, seu enredo e atividades propostas, foi possível motivar os alunos e apresentar-lhes novas aplicações da matemática e como ela pode estar presente em muitos espaços da nossa vida e das atividades sociais, como por exemplo, na aviação.

Tendo em vista a participação dos alunos, e as respostas que eles deram às atividades propostas considera-se que os objetivos propostos, inicialmente, foram alcançados.

### Referências

ATRACTOR. Geometria Esférica: **Distância Entre Dois Pontos**. 2019. Disponível em: [https://www.atractor.pt/mat/GeomEsf/saber\\_1.html](https://www.atractor.pt/mat/GeomEsf/saber_1.html). Acesso em: 27 abr. 2024.



- CARVALHO, G. S. de. Geometrias Não Euclidianas: Uma Proposta de Inserção da Geometria Esférica no Ensino Básico. 2017. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal de Viçosa. Florestal, Minas Gerais, 2017. Disponível em:  
<https://www.locus.ufv.br/bitstream/123456789/18025/1/texto%20completo.pdf>. Acesso em: 27 abr. 2024.
- CARVALHO, M. A. S de; FERNANDES, A.M. O ensino de geometria não euclidiana na educação básica. **XIII CIAEM-IACME**, Recife, Brasil, 2011. Disponível em:  
[http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/maio2013/matematica\\_artigos/artigo\\_carvalho\\_tucci.pdf](http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/maio2013/matematica_artigos/artigo_carvalho_tucci.pdf). Acesso em: 27 abr. 2024.
- CONCEIÇÃO, G. L. Geometria Riemanniana na educação básica: interdisciplinaridade em ação. **BoEM**, Joinville, v. 6, n. 10, p. 61-81, ago. 2018. Disponível em:  
<https://www.revistas.udesc.br/index.php/boem/article/view/11893/8593> . Acesso em: 27 abr. 2024.
- COSTA, M. J. M. Rotas Aéreas e a Geometria do Globo Terrestre. 2014. 67f. Dissertação (Mestrado). Curso de Pós-graduação em Matemática. Centro de Ciências Exatas e Tecnologias. Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2014. Disponível em:  
[https://sca.proformat-sbm.org.br/profmat\\_tcc.php?id1=858&id2=1102](https://sca.proformat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=858&id2=1102). Acesso em: 27 abr. 2024.
- FONSECA, J. A; LEIVAS, J. C. P. A abordagem da geometria esférica no ensino e na aprendizagem matemática: o que apontam as pesquisas realizadas entre 2000 e 2018. **Revista Tangram**, MS, v. 04, n. 02, abril/junho. 2021. Disponível em:  
<http://funes.uniandes.edu.co/27027/1/Aparecida2021A.pdf>. Acesso em: 27 abr. 2024.
- GUIMARÃES, D. R; PEROVANO, A. P. Atividades investigativas para exploração de conteúdos da Geometria Esférica com o GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra**, São Paulo, v. 9, n. 2, p. 20-34, 2020. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/46457/32300> . Acesso em: 27 abr. 2024.
- MARTOS, Z.G. Geometrias Não Euclidianas: uma proposta metodológica para o ensino de Geometria no Ensino Fundamental. Rio Claro, 2001. Dissertação. (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista.
- PANIAGO, R. N., & SARMENTO, T.J.. O processo de estágio supervisionado na formação de professores portugueses e brasileiros. **Revista Educação em Questão**, Natal, v. 53, n. 39, p. 76-103, set./dez. 2015. Disponível em:  
<https://periodicos.ufrn.br/educacaoemquestao/article/view/8521/6166>. Acesso em: 27 abr. 2024.
- UTFPR. Diretoria-geral - Campus Toledo. Dir. de Graduação e Educação Profissional – Toledo. Coordenador de Curso de Licenciatura em Matemática - UTFPR. Instrução Normativa COMAT-TD/UTFPR nº 7, de 09 de agosto de 2023. Dispõe sobre as diretrizes e os procedimentos para implementação dos estágios no âmbito do Curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR. Toledo, 2023. Disponível em:  
<[https://sei.utfpr.edu.br/sei/publicacoes/controlador\\_publicacoes.php?acao=publicacao\\_visualizar&id\\_documento=3963848&id\\_orgao\\_publicacao=0](https://sei.utfpr.edu.br/sei/publicacoes/controlador_publicacoes.php?acao=publicacao_visualizar&id_documento=3963848&id_orgao_publicacao=0)>. Acesso em 13 de mai. De 2024.