

AS FRAÇÕES EM ALGUMAS CIVILIZAÇÕES ANTIGAS

Kamila Gonçalves Celestino
Universidade Estadual do Centro-Oeste - UNICENTRO
kamilaub@hotmail.com

Resumo:

O presente trabalho refere-se a um projeto de pesquisa vinculado ao regime de Tempo Integral e Dedicção Exclusiva para professores da Universidade Estadual do Centro-Oeste. Tal estudo consistiu em uma pesquisa bibliográfica referente ao tema “frações nas civilizações antigas”. O trabalho teve como objetivo analisar os sistemas de numeração babilônio, egípcio, grego, romano, chinês e hindu para verificar quais deles possuíam uma representação para as frações e quais foram as necessidades destes povos que levaram a invenção das frações. Com este estudo foi possível perceber que a invenção das frações aconteceu quando surgiu a necessidade de fazer medições, inicialmente para divisão de terras. Tal necessidade fez com que algumas civilizações antigas inserissem em seus sistemas de numeração novos entes, que no início não foram considerados como números, para representar partes de um objeto. Dentre estas civilizações estão os hindus que deram os primeiros passos para a nossa notação atual de frações decimais.

Palavras-chave: História da Matemática. Frações. Sistemas de Numeração.

Introdução

A pesquisa em história da matemática tem se configurado como tema de interesse crescente comprovado pelas diversas fontes e publicações já acessíveis, relacionadas ou não ao ensino da matemática. Dentre as modalidades de estudos que se identificam como pesquisas em História da Matemática estão os que tratam da investigação relativa à história de problemas, conceitos, métodos e também a figuras humanas (BARONI e NOBRE, 1999).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) destacam a história da matemática como um recurso didático para ser utilizado em sala de aula:

Em muitas situações, o recurso à História da Matemática pode esclarecer ideias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno, especialmente para dar respostas a alguns “porquês” e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento. (PCN Matemática, 1997, p.34)

As Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná tratam a história da matemática como um encaminhamento metodológico:

A história da Matemática é um elemento orientador na elaboração de atividades, na criação das situações-problema, na busca de referências para compreender melhor os conceitos matemáticos. Possibilita ao aluno analisar e discutir razões para aceitação de determinados fatos, raciocínios e procedimentos. (Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná – Matemática, 2008, p.66)

Para este trabalho, o tema “Desenvolvimento das Frações” foi adotado para um estudo de natureza histórica por se tratar de um assunto básico em matemática e que, apesar disso, ainda causa muitas dúvidas nos estudantes e também nos professores de matemática, no sentido de como transmitir tal tema aos seus alunos de forma mais clara e produtiva.

A dificuldade inata de se trabalhar com frações não é exclusividade dos estudantes do Ensino Fundamental, Médio e, algumas vezes, até do Superior. No princípio dos sistemas de numeração antigos as frações nem se quer existiam, a maioria desses sistemas baseava-se apenas na representação de números naturais:

Em épocas anteriores, quando as pessoas precisavam considerar partes de objetos, eles eram quebrados – algumas vezes literalmente – em pedaços menores, e então os pedaços eram contados (mesmo nossa palavra “fração”, com a mesma raiz de “fratura” e “fragmento”, sugere a quebra de algo). (BERLINGOFF e GOUVÊA, 2010, p. 87)

À medida que foi se tornando necessário trabalhar com frações, as notações para estas começaram a ser inseridas, mas, como os próprios sistemas de numeração ainda não estavam bem constituídos, tais notações não eram muito homogêneas e foram, por muito tempo, mal fixadas:

As frações não foram consideradas desde sua origem como números; nem se concebia a noção de fração geral m/n , como m vezes o inverso de n . Os egípcios, por exemplo, só conheciam as frações denominadas “unitárias” e só exprimiam as frações ordinárias através das somas de frações desse tipo. (IFRAH, 2010, p. 326)

A análise de como eram as frações nas civilizações antigas, em fontes históricas, teve o objetivo de destacar quais foram as civilizações que introduziram a ideia e a representação das frações em seus sistemas de numeração e em que tipo de situações esses povos precisavam das frações.

Materiais e métodos

A pesquisa foi baseada em alguns referenciais bibliográficos considerados clássicos na História da Matemática, tais como BOYER (2012) e EVES (2011) e também referenciais específicos sobre história dos números, como IFRAH (2010), entre outros.

Inicialmente foi feito um estudo dos referenciais de história da matemática para que fosse possível destacar as civilizações que introduziram a ideia de fração em seus sistemas de numeração. Em um segundo momento o estudo bibliográfico se estendeu às obras que

tratam especificamente da história dos números para que fosse possível obter informações mais detalhadas sobre o tema.

Por fim foi feita uma análise de todos os materiais coletados para compor um panorama sobre quais civilizações utilizavam a ideia de fração e como elas eram representadas.

Como surgiram os números e as frações?

O uso dos algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 é algo tão natural que, às vezes, parece que o ser humano “já nasceu sabendo” como manipulá-los. Segundo IFRAH (2010) o uso de tais algarismos nos parece em geral tão evidente que chegamos quase a considerá-lo como uma aptidão inata do ser humano. No entanto, de acordo com GUELLI (1998), a descoberta do número não aconteceu de repente, nem foi uma única pessoa responsável por essa façanha e, para IFRAH (2010), a história dos números não é linear, é uma história de necessidades e preocupações de povos que precisavam recensear seus membros, seus bens, suas perdas, seus prisioneiros, datar a fundação de sua cidade e suas vitórias utilizando os meios disponíveis.

Vale ressaltar que o homem primitivo não tinha símbolos para representar os números e tão pouco conhecia o conceito de número abstrato. Segundo BOYER (2012) nossos antepassados mais antigos, inicialmente, contavam somente até dois, e qualquer conjunto além desse nível era designado por “muitos”. IFRAH (2010) afirma que *um* e *dois* são os primeiros conceitos numéricos inteligíveis pelo ser humano.

Assim percebe-se que os números começaram a ser construídos devido às necessidades do homem primitivo de contar objetos. Então cada povo desenvolve seu próprio método de contagem e mais tarde os métodos de contagem são sistematizados e dão origem aos primeiros sistemas de numeração.

É importante destacar que, inicialmente, estes sistemas de numeração representavam apenas os números naturais, uma vez que foram elaborados para representar contagens de objetos. Mas, em algum momento, surge também a necessidade de medir as coisas, e então as civilizações antigas percebem que, na maioria das vezes, não é possível representar medidas apenas com os números naturais. Para solucionar o problema era preciso elaborar uma maneira de representar as partes que não formavam uma unidade de medida inteira. E é assim que alguns povos inserem os números fracionários em seus sistemas de numeração.

Dessa forma pode-se dizer, de forma extremamente resumida, que os números (naturais) foram inventados para contar e que os números fracionários foram inventados para medir. Mas quando, exatamente, isso aconteceu ou quem foi o primeiro a pensar nisso não há como saber com algum grau de certeza devido à falta de registros de informação na época e também pelo fato de que cada povo desenvolveu seus próprios meios de contar e medir independentemente.

Alguns sistemas de numeração antigos

Talvez o mais antigo dos sistemas de numeração seja o babilônio, criado na Mesopotâmia (atual região do Iraque) por volta de 3000 a.C. O sistema babilônio passou por muitas transformações e adaptações no decorrer do tempo mas, em seu último estágio, os números eram representados usando apenas dois símbolos, o “prego” para representar as unidades e a “viga” para representar as dezenas (figura 1).



Figura 1 – O prego e a viga da numeração babilônica (Fonte: EVES, 2011, p.32)

O sistema dos babilônios era sexagesimal (base 60) e posicional (o símbolo tem valor diferente dependendo de sua posição). Os números eram representados por grupos de símbolos separados por um espaço em que cada grupo deveria ser multiplicado por uma potência de 60, os grupos, da direita para a esquerda, deviam ser multiplicados, respectivamente por 60^0 , 60^1 , 60^2 , 60^3 ,..., e por fim somava-se o resultado final de cada grupo.

Outro sistema de numeração tão antigo quanto o babilônico é o egípcio que começou a ser desenvolvido por volta de 3000 a.C., quando os egípcios inventaram sua escrita hieroglífica, baseada em desenhos de sua fauna e flora, e assim também representaram os números.

O sistema de numeração dos egípcios era um sistema de agrupamento simples (desenhava-se a figura tantas vezes quantas ela precisasse ser contada) que utilizava o princípio aditivo e uma base decimal. Os egípcios tinham hieróglifos particulares para representar a unidade e cada uma das seis potências de dez seguintes (figura 2).

1	—
10	∩
100	∩∩∩
1 000	∩∩∩∩∩
10 000	∩∩∩∩∩∩∩∩
100 000	∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩
1 000 000	∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩

Figura 2 – Algarismos egípcios (Fonte: IFRAH, 2010, p.158)

Quando os egípcios começaram a escrever em papiros, os escribas precisavam de uma escrita manual e mais eficiente para escrever numerais. Então foi desenvolvido o *sistema hierático*, que é um sistema cifrado (cada unidade, dezena, centena, e assim por diante, tem um símbolo diferente).

1	∩	10	∩∩	100	∩∩∩∩∩	1 000	∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩
2	∩∩	20	∩∩∩∩	200	∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩	2 000	∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩
3	∩∩∩	30	∩∩∩∩∩∩	300	∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩	3 000	∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩
4	∩∩∩∩	40	∩∩∩∩∩∩∩∩	400	∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩	4 000	∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩
5	∩∩∩∩∩	50	∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩	500	∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩	5 000	∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩
6	∩∩∩∩∩∩	60	∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩	600	∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩	6 000	∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩
7	∩∩∩∩∩∩∩	70	∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩	700	∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩	7 000	∩∩
8	∩∩∩∩∩∩∩∩	80	∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩	800	∩∩	8 000	∩∩
9	∩∩∩∩∩∩∩∩∩	90	∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩	900	∩∩	9 000	∩∩

Figura 3 – Sistema de numeração hierático (Fonte: IFRAH, 1997, p.354)

Estes novos símbolos permitiam expressões mais compactas para os numerais, mas o inconveniente do sistema hierático é que ele exigia um grande esforço de memória dos escribas responsáveis pelos registros, pois agora a quantidade de símbolos era consideravelmente maior do que na notação hieroglífica.

Os gregos também tiveram dois sistemas de numeração diferentes. O primeiro deles foi o sistema ático, desenvolvido por volta do século VI a.C., que era um sistema alfanumérico.

1	I	10	Δ	100	H	1.000	X	10.000	M
2	II	20	ΔΔ	200	HH	2.000	XX	20.000	MM
3	III	30	ΔΔΔ	300	HHH	3.000	XXX	30.000	MMM
4	IIII	40	ΔΔΔΔ	400	HHHH	4.000	XXXX	40.000	MMMM
5	Γ	50	ΓΔ	500	ΓH	5.000	ΓX	50.000	ΓM
6	ΓI	60	ΓΔΔ	600	ΓHH	6.000	ΓXX	60.000	ΓMM
7	ΓII	70	ΓΔΔΔ	700	ΓHHH	7.000	ΓXXX	70.000	ΓMMM
8	ΓIII	80	ΓΔΔΔΔ	800	ΓHHHH	8.000	ΓXXXX	80.000	ΓMMMM
9	ΓIIII	90	ΓΔΔΔΔΔ	900	ΓHHHHH	9.000	ΓXXXXX	90.000	ΓMMMMM

Figura 4 – Algarismos do sistema ático (Fonte: GARBI, 2006, p.323)

O sistema ático era, basicamente, de agrupamento aditivo (soma-se o valor de cada símbolo para formar o número), mas é possível perceber também o emprego do princípio multiplicativo (Multiplica-se os valores de dois símbolos, isto normalmente é feito para reduzir a notação) na representação dos números 50, 500, 5.000 e 50.000.

A partir de 500 a.C. e, paralelamente ao sistema ático, outro sistema de numeração foi desenvolvido na Jônia, este era chamado de sistema *jônico* ou *alfabético*, pois utilizava todo o alfabeto grego composto por 24 letras usuais e mais 3 letras arcaicas (*digamma*, *koppa* e *san*) incluídas para completar o sistema. O sistema jônico era cifrado e com base decimal.

α	alpha	1	ι	iota	10	ρ	rho	100
β	beta	2	κ	kappa	20	σ	sigma	200
γ	gamma	3	λ	lambda	30	τ	tau	300
δ	delta	4	μ	mu	40	υ	upsilon	400
ε	epsilon	5	ν	nu	50	φ	phi	500
Ϟ	digamma	6	ξ	ksi	60	χ	chi	600
ζ	zeta	7	ο	omicron	70	ψ	psi	700
η	eta	8	π	pi	80	ω	omega	800
θ	theta	9	ϙ	koppa	90	Ϡ	san	900

Figura 5 – Numeração jônica (Fonte: GARBI, 2006, p.323)

Por volta do século III a.C., os romanos também montam o seu sistema de numeração. É um sistema de agrupamento, principalmente aditivo, e base decimal. A numeração romana usava as letras do alfabeto latino para representar as quantidades, fazendo a seguinte correspondência: I=1, V=5, X=10, L=50, C=100, D=500 e M=1000.

Os chineses traçaram sua numeração há mais de 3000 anos e ainda a usam até hoje. Ela é composta por treze símbolos básicos que representam os números de 1 a 9 e as potências de 10. Os símbolos chineses são os nomes por extenso dos números (figura 12).

一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	百	千	萬
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100	1000	10000

Figura 6 – Símbolos clássicos da numeração chinesa (Fonte: IFRAH, 2010, p.228)

Por volta de 300 a.C. surgiu uma outra representação numérica usada pelos matemáticos chineses: os chamados numerais em barras. Esse sistema é muito semelhante à nossa numeração moderna, pois é um sistema decimal e posicional, no qual são usados nove símbolos.

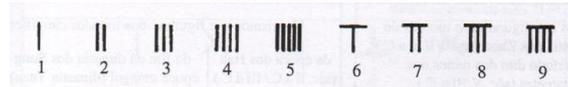


Figura 7 – Numerais em barras chineses (Fonte: IFRAH, 1997, p. 581)

Com essa notação, qualquer número poderia ser representado usando apenas os nove símbolos básicos, pois a posição do símbolo alterava seu valor. Lendo o número da direita para a esquerda, cada símbolo deveria ser multiplicado por 10^0 , 10^1 , 10^2 , 10^3 ,..., etc.

E, finalmente, o ancestral do nosso sistema de numeração foi criado pelos hindus por volta do século V d.C.

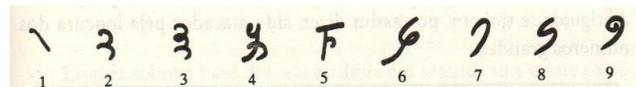


Figura 8 – Os nove primeiros símbolos da numeração hindu (Fonte: IFRAH, 2010, p.265)

Como podemos observar os símbolos de algumas unidades hindus, já lembram a notação atual que usamos para as unidades. Mas este sistema ainda não usava o princípio posicional, ele tinha uma base decimal, mas era cifrado.

O sistema hindu passou por várias transformações. No século IV a numeração se torna oral e os hindus recorriam aos nomes, em *sânscrito* (língua culta hindu), dos números. Mais tarde a numeração oral passa a ser posicional, e com a numeração posicional surge o problema da representação das posições vazias que foi facilmente solucionado usando a palavra “*sūnya*” (que significa vazio em sânscrito) para descrever as posições vazias. Dessa forma, os hindus haviam inventado o seu zero, para que não houvesse equívocos na representação dos números, e seu sistema posicional estava completo!

Mas os hindus ainda tinham um problema, a representação dos valores na numeração oral tornava-se demasiadamente longa algumas vezes, foi por isso que resolveram retomar os nove símbolos iniciais das unidades para representar os números. E para o zero usaram inicialmente um ponto e mais tarde um círculo.

E assim os hindus inventaram o sistema de numeração que usamos até hoje. É claro que os símbolos passaram por adaptações no decorrer do tempo, mas o princípio da numeração decimal posicional já estava formado no século V graças aos hindus.

A descoberta da fração

Segundo BOYER (2012), não se pode afirmar nada sobre a origem da matemática, seja aritmética, seja da geometria, afinal, seu princípio é mais antigo do que a arte de escrever. Não se podem apontar épocas e datas exatas pela falta registros das civilizações antigas. Isso não é diferente com as frações. BERLINGOFF e GOUVÊA (2010) dizem que as frações fazem parte da matemática há 4 mil anos ou mais. Mas não é possível precisar quando elas surgiram ou quem as descobriu, novamente porque os registros são poucos e talvez as primeiras ideias sobre frações nem tenham sido registradas por falta de meios para fazer isso.

Mas, de qualquer forma, a maioria dos autores de História da Matemática converge em dizer que o conceito de fração surgiu, inicialmente, no antigo Egito. GUELLI (1998), por exemplo, conta que, por volta do ano 3000 a.C., o faraó Sesóstris repartiu o solo do Egito, às margens do rio Nilo, entre seus habitantes, mas, uma vez por ano, as águas do Nilo subiam muitos metros além de seu leito normal e quando voltavam a baixar as marcações de divisão das terras estavam perdidas. Então os funcionários do governo traçavam novamente os limites do terreno de cada habitante e para fazer a medição eles esticavam uma corda, com uma unidade de medida já assinalada, e verificavam quantas vezes aquela unidade cabia nos lados do terreno. No entanto, dificilmente aquela unidade de medida escolhida cabia um número inteiro de vezes nos lados do terreno e foi por esta razão que os egípcios criaram um novo tipo de número: o número fracionário.

As frações são relativamente novas se comparadas com os números inteiros, pois, segundo BOYER (2012), entre as tribos primitivas parece não ter havido praticamente nenhuma necessidade de usar frações. CONTADOR (2012) diz que não se desenvolveram métodos especiais para trata-las devido às restrições para seu uso e também pelo fato de que as frações não eram consideradas números. O entendimento de número nas civilizações antigas é explicado por BOYER (2012): número, no Egito, significava o domínio dos números naturais e frações unitárias; entre os babilônios, o corpo das frações racionais. Na

Grécia, a palavra “número” era usada só para os inteiros. Uma fração não era considerada como um ente único, mas como uma razão ou relação entre inteiros.

BERLINGOFF e GOUVÊA (2010) comentam que em épocas anteriores, quando as pessoas precisavam considerar partes de objetos, eles eram, literalmente, quebrados em pedaços menores, e então os pedaços eram contados. Daí é possível perceber a origem da nossa palavra “fração”, com a mesma raiz de “fratura” e “fragmento”, que sugere a quebra de algo.

Também é importante ressaltar que, além de as frações não terem sido consideradas como números no início, o conceito de fração inicial também era diferente da nossa ideia atual. Em suas primeiras formas as frações estavam limitadas a representar uma parte de algum objeto, o que hoje em dia chamamos de frações unitárias, pois o fato de o numerador ser sempre 1 facilitava a escrita das frações.

Os egípcios parecem ter sido os primeiros a inserir a ideia de fração em seu sistema de numeração, mas além deles outros povos antigos também conheciam e utilizavam a ideia de fração e mesmo sem regras estabelecidas para trabalhar com elas estes povos já possuíam símbolos para representa-las. CONTADOR (2012) afirma que os egípcios, babilônios, gregos, hindus e chineses conheciam as frações. A seguir veremos como as frações eram utilizadas por tais povos.

As frações nos sistemas de numeração antigos

Os egípcios, provavelmente, foram os primeiros a inserir as frações em seu sistema de numeração, mas outros povos antigos também o fizeram. E, assim como para os números inteiros, cada um tinha sua própria maneira de representar as frações.

No Egito eram conhecidas apenas as frações unitárias. Os escribas tinham uma forma especial para representar as frações, eles colocavam sobre a notação para o inteiro um sinal oval alongado. Como o numerador era sempre 1, a notação era muito prática.

escrita egípcia	nossa escrita
	$\frac{1}{3}$
	$\frac{1}{12}$
	$\frac{1}{21}$

Figura 10– Representação das frações egípcias (Fonte: Blog Prof. Inês Reynaud)

Os egípcios tinham notações especiais para duas frações que fogem a regra das frações unitárias: $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$.

Quando os escribas passaram a usar a notação hierática o símbolo oval foi substituído por um ponto colocado acima da cifra que representava o inteiro.

Os egípcios trabalhavam bem com as frações unitárias, mas, de acordo com BOYER (2012), a fração geral parece ter sido um enigma para essa civilização. Eles conheciam também as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ que auxiliavam nos processos aritméticos e outras frações ordinárias eram escritas como soma de frações unitárias e das duas frações especiais.

Na Mesopotâmia as frações também eram conhecidas. De acordo com CONTADOR (2012), os babilônios, por volta do ano 2000 a.C., já usavam frações basicamente da mesma maneira que as frações decimais de hoje. A diferença é que eles faziam a conversão de frações usando apenas denominadores iguais às potências de 60.

Para BOYER (2012), os babilônios deram um passo muito feliz em estender o princípio da posição para cobrir as frações. Dessa forma conseguiram representar facilmente os números fracionários usando as posições 60^{-1} , 60^{-2} , 60^{-3} , ..., e assim sucessivamente.

Os babilônios, segundo BOYER (2012), utilizavam as frações em problemas de economia como na distribuição de patrimônios entre herdeiros e dominavam a computação com estes números. Na divisão de frações, por exemplo, os babilônios multiplicavam o numerador pelo inverso do denominador e, para isso, usavam uma tabela de recíprocos (tabela babilônica contendo os inversos dos números sexagesimais inteiros).

Os romanos também utilizaram as frações e elaboraram um sistema fracionário sem relação com o seu sistema de números inteiros. De acordo com CONTADOR (2012), os romanos davam a cada fração um nome especial e geralmente mantinham o número 12 como denominador constante. Este procedimento talvez se deva ao fato de que sua moeda de cobre, de nome *As*, pesava uma libra e era dividida em 12 *unciae*.

Os gregos tentaram estabelecer regras gerais para as frações ordinárias, mas sua simbologia não os favoreceu. Eles começaram com as frações unitárias simplesmente colocando um sinal à direita para distingui-la do inteiro correspondente. Por exemplo, a fração $\frac{1}{32}$ seria escrita como $\lambda\beta'$. Assim como os egípcios, entre os gregos também havia uma preferência pelas frações unitárias que, como aponta BOYER (2012), continuou na Europa até por volta de 1000 d.C. Os gregos também usaram frações comuns gerais e frações sexagesimais.

A Grécia conheceu os sistemas egípcio e babilônio e os astrônomos gregos passaram a utilizar as frações sexagesimais em suas medidas, por isso dos graus, minutos e segundos para medida de ângulos. O uso dessas frações era comum em trabalhos técnicos e mesmo quando o sistema decimal é adotado para números inteiros, o sexagesimal continua sendo usado para frações.

Segundo BOYER (2012), as frações sexagesimais tinham se tornado o instrumento usual dos astrônomos e físicos, mas é provável que permanecessem pouco familiares para o homem comum. As frações comuns eram usadas com certa frequência pelos gregos, a princípio com o numerador colocado abaixo do denominador, depois com as posições trocadas (e sem a barra separando os dois).

Os gregos usaram as frações de forma semelhante às outras civilizações, basicamente em problemas econômicos e comerciais, envolvendo divisão de terras e taxas.

A civilização chinesa, com seu sistema decimal e posicional, conseguiu representar frações de forma muito prática. BERLINGOFF e GOUVÊA (2010) dizem que a obra chinesa *Nine Chapters on the Mathematical Art*, que remonta de aproximadamente 100 a.C., contém uma notação para frações que é muito parecida com a nossa. A única diferença é que os chineses evitavam usar “frações impróprias” como $\frac{7}{3}$; eles escreviam $2\frac{1}{3}$ em vez disso. Todas as regras usuais para operar com frações apareciam em *Nine Chapters*: como reduzir uma fração que não está simplificada, como somar frações e como multiplicá-las.

A regra para somar em termos atuais seria:

Cada numerador é multiplicado pelos denominadores das outras frações. Some-os como o dividendo, multiplique os denominadores como o divisor. Divida; se existir um resto, tome-o como numerador e tome o divisor como denominador. (BERLINGOFF e GOUVÊA, 2010, p.89)

Os hindus abordaram as frações de forma muito parecida com os chineses, pois o sistema hindu também era decimal e posicional. Como já comentado anteriormente, o nosso sistema de numeração atual teve sua origem na Índia e, da mesma forma, as nossas frações atuais também começaram a tomar forma depois que os hindus completaram sua numeração posicional.

Em manuscritos hindus datados do século VII, aproximadamente, eles representavam frações escrevendo os dois números um sobre o outro, com o tamanho da parte abaixo do número de vezes que ela devia ser contada. Não havia linha separando os números.

Segundo BERLINGOFF e GOUVÊA (2010), a regra de “inverter e multiplicar” para dividir frações foi usada pelo matemático hindu Mahavira (800 – 870) por volta de 850 d.C.

Assim pode-se perceber que as frações foram usadas por vários povos, de vários jeitos diferentes e com bases e notações que dependiam de cada civilização, cada uma elaborou sua própria maneira de representar frações, da mesma forma que aconteceu com os inteiros. No início havia uma preferência por frações unitárias usadas por egípcios e gregos e essa prática, de acordo com BERLINGOFF e GOUVÊA (2010), dominou a aritmética e permaneceu até o começo da Idade Média. Como prova disso pode-se citar o *Liber Abbaci* de Fibonacci (1170 – 1250), um texto bastante influente na matemática europeia do século XIII, que ainda usou muitas frações unitárias e descreveu várias maneiras de converter outras frações em soma de frações unitárias.

Com o desenvolvimento do cálculo e da aritmética ficou claro que as frações seguiam as mesmas regras dos inteiros e poderiam ser comparadas com números. Mas, segundo IFRAH (2010), mesmo com esse progresso, os antigos não foram capazes de unificar a notação de fração devido às suas notações diferentes e ainda incompletas para os inteiros.

Notação e frações decimais

O progresso das frações não foi ordenado como aconteceu com os números inteiros, a notação passou por várias mudanças no decorrer do tempo e, de acordo com BOYER (2012) o domínio das frações decimais é essencialmente um produto da idade moderna.

Já vimos como foram as notações das frações em várias civilizações antigas, mas as iniciais não se pareciam em nada com a nossa notação atual. Segundo IFRAH (2010), foram os babilônios os primeiros a atribuir às frações uma notação racional, convertendo-as em frações sexagesimais com o seu sistema posicional.

Depois os gregos tentaram atribuir uma notação geral às frações ordinárias, mas sua numeração alfabética não favoreceu suas tentativas, então eles as abandonaram para usar a notação sexagesimal dos babilônios em seus cálculos. De acordo com CONTADOR (2012), os gregos escreveram o denominador sobre o numerador (o inverso de como fazemos atualmente) e sem a barra de separação.

Os hindus escreveram as frações de forma bem semelhante a atual. CONTADOR (2012) diz que eles herdaram dos gregos a fração sem a barra, mas já com o numerador e

denominador na ordem que usamos hoje. Segundo IFRAH (2010), a notação moderna das frações ordinárias se deve aos hindus que, devido a sua numeração decimal de posição, chegaram a simbolizar mais ou menos como nós uma fração.

BOYER (2012) cita que o matemático hindu Brahmagupta (598 – 670) denotava a operação de divisão com divisor sob o dividendo, como em nossa notação para frações, mas sem a barra. E, CONTADOR (2012) diz que num trabalho do hindu Bakhshali, do século V, se encontra o numerador sobre o denominador, mas ainda sem a linha divisória entre eles.

O costume dos hindus de escrever frações com um número sobre o outro se tornou comum na Europa alguns séculos mais tarde. A notação hindu foi adotada e aperfeiçoada pelos árabes, que inventaram a famosa barra horizontal. De acordo com CONTADOR (2012) foi por volta do ano 1.000 que os árabes inseriram a barra na notação das frações.

As nomenclaturas para os termos da fração só surgiram depois que a notação das frações decimais hindus estava concretizada. Segundo CONTADOR (2012) os termos “denominador” e “numerador” foram criados pelo matemático francês Nicole Oresme (1323 – 1382).

A convenção pelas frações decimais parece ter acontecido ainda mais tarde que as nomenclaturas atuais para as frações. As frações decimais apareceram bastante cedo na matemática chinesa, mas, de acordo com BERLINGOFF e GOUVÊA (2010), na Europa seu primeiro uso ocorre no século XVI. Segundo BOYER (2012), o matemático árabe Al-Kashi (1380 – 1429) é uma figura importante na história das frações decimais. Ele parece ter herdado o hábito de usa-las dos chineses. E apesar de existirem precursores ele é considerado o inventor das frações decimais por ter sido o primeiro a sugerir que as frações decimais e sexagesimais são igualmente convenientes para problemas que exigem muitas casas exatas.

BOYER (2012), também comenta que François Viète (1540 – 1603), em 1579, recomendou insistentemente o uso de frações decimais em vez de sexagesimais. Mas, segundo BERLINGOFF e GOUVÊA (2010), elas só se popularizam com o livro do matemático belga Simon Stevin (1548 – 1620), *The Thenth* de 1585. Stevin mostrou em seu livro que escrever frações como decimais permite que operações com frações sejam efetuadas pelos algoritmos muito mais simples da aritmética de números inteiros.

Simon Stevin não foi o inventor das frações decimais e nem o primeiro a usa-las, mas de acordo com EVES (2011), ele é conhecido por ter dado uma das exposições mais antigas da teoria das frações decimais. E, segundo IFRAH (2010), foi ele quem deu o passo

decisivo rumo a nossa notação atual escrevendo o número 679,567 da seguinte forma: 679(0) 5(1) 6(2) 7(3), em que os números entre parênteses representavam a ordem das unidades decimais. Alguns anos depois, o suíço Jost Bürgi (1552 – 1632) simplificou a notação colocando um sinal no alto das unidades simples: 679^0567 . Em seguida, o italiano Giovanni Antonio Magini (1555 – 1617) substituiu esta bolinha por um ponto: 679.567. E assim nasceu a notação usada até hoje nos países anglo-saxões.

De acordo com IFRAH (2010), a vírgula que usamos atualmente foi inserida pelo neerlandês Wilbord Snellius (1580 – 1626) no início do século XVII: 679,567.

Conclusões

O estudo dos referenciais históricos permitiu observar que as frações surgiram da necessidade que os povos antigos tinham de fazer medições. Para isso, algumas civilizações inseriram novos entes em seus sistemas de numeração para representar as partes de um objeto.

Os povos que tinham representação para frações, segundo as fontes pesquisadas, eram os egípcios, babilônios, gregos, romanos e hindus. Os egípcios foram os primeiros a apresentar a ideia de fração quando se depararam com dificuldades de medir suas terras apenas usando seus números inteiros. Os babilônios usaram frações sexagesimais e apenas estendendo sua notação posicional cobriram também o campo dos números fracionários. Os babilônios parecem ter sido os primeiros a dar uma notação racional para frações.

Na Europa, os romanos usaram frações duodecimais e os gregos tentaram estabelecer regras gerais para frações ordinárias, mas sua simbologia não permitiu que tivessem sucesso. Os gregos escreviam as frações com um número sobre o outro, mas com a ordem invertida em relação ao que fazemos hoje. Os chineses, com seu sistema decimal e posicional, foram capazes de escrever frações de forma muito semelhante a atual e já conheciam as regras atuais para cálculos com frações.

Já os hindus, que são responsáveis pelo nosso sistema de numeração atual, também deram início à nossa notação atual para frações decimais. Os hindus representavam frações de forma semelhante às dos chineses e herdaram o hábito de escrever um número sobre o outro dos gregos, mas eles já os colocavam na ordem que usamos hoje.

Por fim, com este estudo foi possível destacar outras civilizações, além dos egípcios, que também utilizaram frações em seus sistemas de numeração. Também se percebe que

todos estes povos precisaram das frações, basicamente, para resolver problemas de divisão de terras e heranças e transações comerciais e que somente os chineses possuíam algumas regras para cálculos com frações. Algoritmos para operações com frações não são citados, pelas fontes pesquisadas, em outras civilizações. E, curiosamente, alguns povos não consideravam as frações como números.

Referências

BARONI, R. L. S.; NOBRE, S. R. **A Pesquisa em História da Matemática e suas relações com a Educação Matemática**. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. (org.). Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999.

BERLINGOFF, W.P.; GOUVÊA, F.Q. **A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas**. Trad. ELZA GOMIDE, ELENA CASTRO. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.

BOYER, C.B. MERZBACH, U. C. **História da matemática**. Trad. HELENA CASRTO. São Paulo: Blucher, 2012.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>>. Acesso em: 09. mar.2016.

CONTADOR, P. R. M. **Matemática, uma breve história, volume 1**. São Paulo: Livraria da Física, 2012.

EVES, H. W. **Introdução à história da Matemática**. Trad. HYGINO H. DOMINGUES. Campinas: Unicamp, 2011.

GARBI, G. G. **A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática**. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

GUELLI, O. **Contando a História da Matemática: a invenção dos números**. 9. Ed. São Paulo: Ática, 1998.

IFRAH, G. **História Universal dos Algarismos, volume 1: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo**. Trad. ALBERTO MUÑOS e ANA BEATRIZ KATINSKY. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

IFRAH, G. **Os Números: a história e uma grande invenção**. 11. ed. Trad. STELLA MARIA DE FREITAS SENRA. São Paulo: Globo, 2010.

PARANÁ. **Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná: Matemática**. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/diaadia/diadia/arvosFile/diretrizes_2009/matematica.pdf>. Acesso em: 09.mar.2016.



REYNAUD, I. **Os egípcios e as frações**. Disponível em:
<<http://profinesreynaud.blogspot.com.br/2010/08/os-egipcios-e-as-fracoes.html>>. Acesso em: 18.mai.2016