

## QUESTÕES PARA A APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA SEGUNDO RAYMOND DUVAL

Dra Celia Finck Brandt  
Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Email: [brandt@bighost.com.br](mailto:brandt@bighost.com.br)

### **Resumo:**

O presente texto apresenta reflexões relativas à aprendizagem da geometria segundo Raymond Duval. Os aspectos considerados dizem respeito a uma abordagem cognitiva a ser contemplada no ensino para orientar um trabalho voltado para uma abordagem da face oculta da matemática conforme nos aponta Duval. O texto apresentará as diferentes apreensões (operatória, discursiva, sequencial e perceptiva), os diferentes olhares (botanista, agrimensor, construtor e inventor) e as desconstruções dimensionais, que permitem transitar entre os elementos de dimensão 0D (pontos, 1D (segmentos de reta ou retas), 2D (superfícies), aumentando o poder heurístico das figuras para a resolução de problemas de geometria. O texto se volta para análise de algumas atividades específicas, para as séries iniciais do ensino fundamental, apontando que essa abordagem deve ser uma preocupação desde esses anos da escolarização.

**Palavras-chave:** olhares em geometria (botanista, agrimensor, construtor, inventor); desconstrução dimensional; apreensões operatória, sequencial, discursiva e perceptivas; aprendizagem da geometria em Duval.

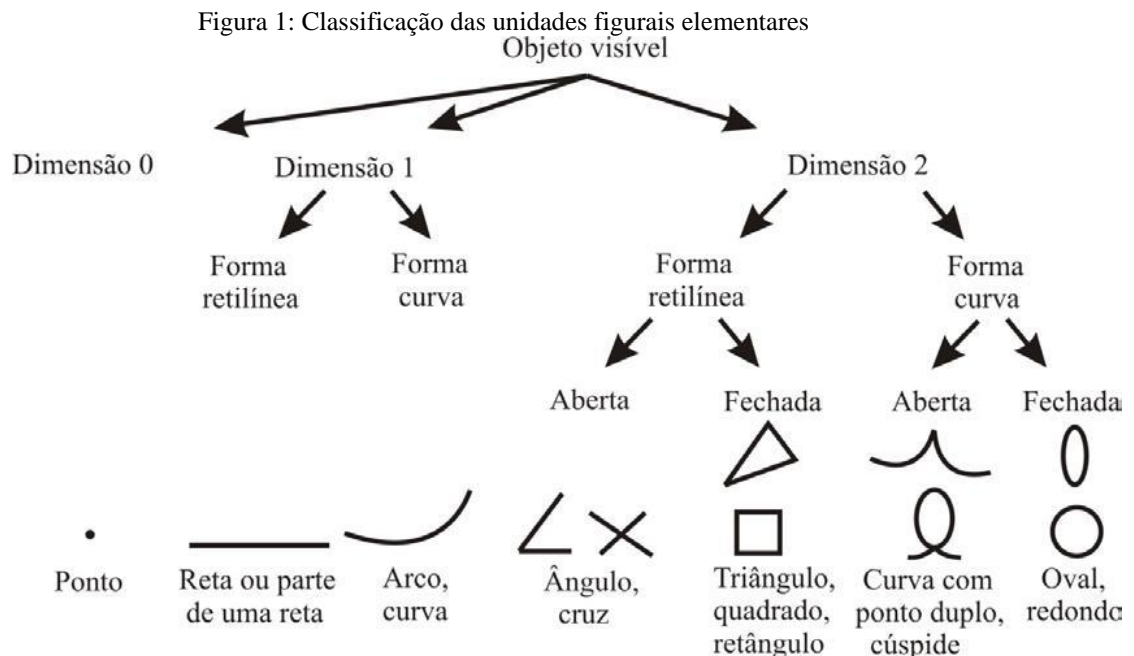
### **Introdução**

A aprendizagem em Geometria segundo Duval (2004, 2011, 2012a, 2012b) depende da coordenação simultânea de tratamento de dois tipos de Registros de Representação Semiótica: o registro discursivo (utilizado para enunciar as definições, os teoremas ou as hipóteses), em língua natural e o registro figural (necessário para evidenciar propriedades que estão contidas no desenho segundo DUVAL, 2004).

A relação entre os registros discursivo e figural é necessária em virtude das abordagens conceituais variadas possibilitadas por uma figura e para permitir identificar o objeto que estamos tratando: por exemplo, não basta desenhar um quadrado, é preciso apresentar, por meio do discurso que se trata de um quadrado (com indicações das medidas dos lados e da medida dos ângulos iguais a 90). Isso permite compreender a afirmação de Duval (2004), p. 168) “não há desenho sem legenda”.

Duval (2004) aponta dois tipos de unidades figurais elementares: as dimensionais (relacionadas aos elementos da figura: 0D se for um ponto, 1 D se for uma linha, 2D se for uma figura plana e 3D se for uma figura espacial e as qualitativas (relacionadas às formas,

aos contornos abertos ou fechados ao tipo de linhas retas ou curvas. Essas unidades podem ser visualizadas na figura 1.



Fonte: DUVAL (2004, p. 159)

A desconstrução dimensional, segundo (DUVAL, 2011), possibilita uma mudança de olhar que caracteriza um salto cognitivo considerável voltado para a aprendizagem, pois vai na direção contrária do reconhecimento automático no qual a unidade figurial da dimensão se impõe. Esse direcionamento do olhar sem que a figura mude permite que reconheçamos outras formas dentro de uma forma, não percebidas de imediato.

Duval (2004, 2011, 2012a, 2012b) destaca diferentes apreensões para interpretar as representações de objetos geométricos e os enunciados em geometria: a apreensão perceptiva (de maneira imediata e automática na qual acontece o reconhecimento das diferentes unidades figurais que são discerníveis em uma figura dada), a apreensão operatória (centrada nas modificações possíveis de uma figura inicial e nas reorganizações possíveis destas modificações: óticas, posicionais ou mereológicas), a apreensão discursiva (relacionada com o enunciado) e a apreensão sequencial (solicitada em atividades de construção ou em atividades de descrição, tendo por objetivo a reprodução de uma dada figura).

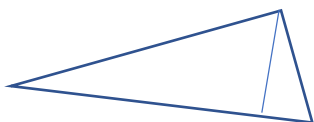
As apreensões perceptiva e operatória estão vinculadas com os tratamentos figurais e se direcionam à interpretação de uma figura geométrica e permitem a seleção de alternativas conduzirão à solução de um problema proposto. Conforme a apreensão

privilegiada acontecerá o que Duval (2004) intitula de conduta de abdução (aquela que permite explorar diferentes caminhos para a solução de um problema proposto a partir da análise do enunciado de determinado problema e da realização de tratamentos figurais pertinentes ao problema proposto).

Os tratamentos a serem realizados em uma figura dependem da seleção de determinadas unidades elementares de uma figura geométrica. Esses tratamentos figurais são “operações que podem ser efetuadas materialmente ou mentalmente sobre as unidades figurais em uma figura geométrica, para obter uma modificação figural desta figura.” (DUVAL, 2012b, p. 287) e estão vinculados, segundo (DUVAL, 2004, p. 162) às relações (ópticas ou posicionais) das partes de uma figura com a figura toda.

Os tratamentos figurais estão também relacionados à modificações da figura que podem ser ópticas (oriundas de homotetia ou projeções) mereológicas (relativas à decomposição das figuras em subfiguras de forma material ou mental) ou posicionais oriundas de transformações geométricas de simetria, rotação ou translação. As figuras 2a, 2b e 2c caracterizam esses tipos de modificações:

Figura 2a  
Modificação mereológica



Fonte: a autora

Figura 2b  
Modificação óptica

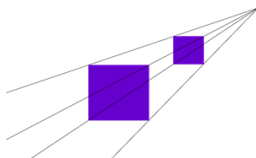


Figura 2c  
Modificação posicional



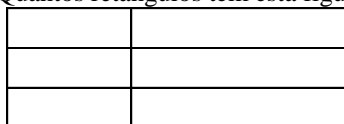
Essas modificações permitem que as figuras geométricas cumpram a função de suporte intuitivo para a realização de atividades de geometria. De acordo com Duval, (2004, p. 170)

O êxito da exploração de uma figura no âmbito de um problema proposto, vai depender então da articulação entre esta apreensão operatória da figura e um manejo discursivo de inferências que mobiliza uma rede de definições e de teoremas.

Em se tratando da apreensão discursiva Duval (2004) alerta para as dificuldades de êxito para a resolução de um problema oriundas do fenômeno da não congruência semântica. Isso ocorre quando o enunciado faz referência a um tipo de figura que é uma subfigura da figura que se impõe de imediato. A figura 3, adaptada de Duval (2004, p. 163) mostra a não

congruência entre o desenho, pois ela impõe perceptivamente a existência de 6 retângulos somente.

**Figura 3:** Quantos retângulos têm esta figura?



**Fonte:** Duval (2004, p. 169)

As quatro apreensões perceptiva, operatória, sequencial e discursiva podem ser requisitadas na resolução de um problema de Geometria. Conforme combinada privilegiam procedimentos ou análises: as apreensões perceptiva e discursiva se articulam para a análise de uma figura geométrica; as apreensões perceptiva e operatória comandam a visualização; as apreensões discursiva e sequencial resultam em uma atividade de construção geométrica; as apreensões discursiva e operatória estão presentes nas heurísticas de resolução de problemas e em demonstrações.

Em se tratando da apreensão perceptiva cabe ressaltar, de acordo com Duval (2005, *apud* Moretti, 2013, p. 294-295, ) sua associação com a forma de olhar para um problema em Geometria. Esse olhar pode ser de quatro maneiras diferentes: o olhar botanista, em que há o reconhecimento do contornos das formas focalizando os aspectos qualitativos de uma figura; o olhar o agrimensor que tem por finalidade de efetuar medidas, passando de uma escala de grandeza para outra; o olhar construtor que ocorre a partir do uso de instrumentos, como a régua não graduada, o compasso ou algum programa computacional, para a tomada de consciência sobre uma propriedade geométrica que ocorre não apenas pela característica perceptiva; o olhar inventor que acrescenta trações na figura a fim de modificá-la para possibilitar um procedimento de resolução para o problema proposto.

Em relação à geometria a aprendizagem não está nos conceitos mas na coordenação entre os tratamentos figurais e discursivos, no desenvolvimento dos olhares e na consideração das apreensões e suas articulações. O problema é que essas questões não são levadas em conta no ensino no que se trata do desenvolvimento das competências geométricas dos alunos. O desenvolvimento do pensamento geométrico deve compreender o desenvolvimento de mobilizações cognitivas específicas, necessárias para a aprendizagem da geometria.

Os olhares precisam ser objeto do ensino segundo (Duval, 2005<sup>1</sup> apud Moretti, 2013, p. 293) pois para o autor “ver” uma figura em geometria não é algo simples e os olhares passam por uma evolução (do icônico ao não icônico) além de estarem presentes nas apreensões necessárias às atividades geométricas.

A originalidade das atividades em geometria é, de acordo com Duval (2004, p. 156), que ela exige a coordenação entre os tratamentos próprios para registrar as figuras e suas propriedades e os tratamentos específicos do discurso em língua natural para enunciar definições, teoremas, propriedades, entre outros. Isso significa que uma figura só é uma figura geométrica se compreender essa coordenação entre a representação figural e a representação discursiva.

Há que se evidenciar que a necessidade dos tratamentos figurais e discursivos serem realizados simultaneamente, e de maneira interativa, advém do fato da percepção imediata e automática pode ir de encontro ao discurso. Isso significa uma divergência entre o que se dá à percepção e o discurso e leva o aluno a realizar tratamentos baseados somente em sua percepção.

Além da evolução dos olhares, presente nas atividades de geometria, existem condições prévias para que, segundo Duval (2004), seja possível uma descrição precisa dos diferentes tratamentos matemáticos pertinentes no registro das figuras:

- a determinação das unidades de base constitutivas deste registro;
- as possibilidades de sua articulação nas figuras;
- as modificações das figuras obtidas.

Além disso é preciso aprender a olhar matematicamente uma figura e isso coloca exigências, dentre as quais a desconstrução dimensional que exige estar atento à passagem da dimensão física à dimensão representada: representar cubos no espaço ( $3D \setminus Q3D$ ), plantas de casa no papel ( $2D/3D$ ), cordões esticados ( $1D/3D$ ), conforme as situações.

As maneiras de ver podem ser enriquecidas de acordo com a decomposição das figuras que pode, segundo Scheifer (2017) ser realizada por superposição ou justaposição e também em suas unidades figurais (pontos, linhas, regiões).

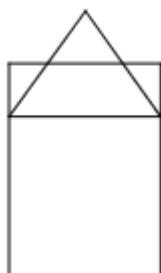
---

<sup>1</sup> DUVAL, R. **Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie**: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 2005. v. 10, p. 5-53

Por exemplo se consideramos um quadrado identificamos ser uma figura geométrica formada por 4 lados que se encontram e não passam pelo mesmo ponto formando ângulos no encontro dos lado. Essas unidades figurais são identificadas por meio do caminho percorrido pelo olhar para as diferentes dimensões que se impõem: o quadrado (2D), os lados (1D) os vértices (0D) e de novo a figura 2D.

É o olhar que direciona o que se vê em uma figura. Vejamos a figura 4 abaixo:

Figura 4: Como reproduzir a figura por dois modos distintos: superposição ou justaposição



Fonte: a

Podemos ver um triângulo sobreposto a um retângulo (2D/2D) um retângulo, três triângulos e um trapézio justapostos (2D/2D/2D/2D). Ao olhar uma dimensão inferior visualizamos um número diferente de segmentos de reta (1D) e vértices (0D) conforme decompos a figura por justaposição ou por superposição.

Diferentes atividades podem ser propostas à crianças das séries iniciais do ensino fundamental voltadas para o desenvolvimento dos olhares, das apreensões e da desconstrução dimensional. Devem ser objeto do ensino por não serem espontâneas e nem imediatas.

Alguns exemplos:

Estabelecer relações topológicas segundo Piaget (1993) que está na gênese da representação do espaço.

Apresentar uma caixa com figuras geométricas (triângulos, quadrados, círculos e outros em EVA para serem identificados pelas crianças sem serem vistos só por percepção tátil cinetésica A figura 5 ilustra o modelo da caixa. As crianças têm que manipular as figuras e falar o que percebem na figura e os nomes dados aos elementos percebidos e às figuras manipuladas.

Figura 5: Atividade referente à intuição das formas e percepção estereognóstica

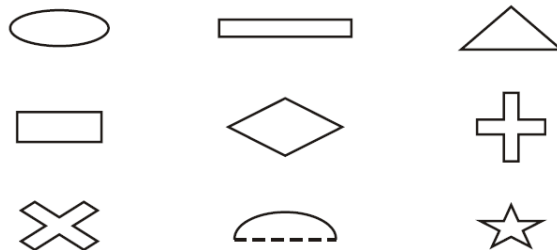


Nessa atividade entra em jogo a apreensão perceptiva e a desconstrução dimensional visto que a mão, por manipulação tátil cinestésica, vai tocando os elementos da figura nas dimensões 0D (os vértices), 1D (os lados) e 2D (as figuras planas).

N figura 6 propõe-se a atividade para associação das figuras manipuladas com as figuras representadas. Aqui se encontra a apreensão discursiva.

Figura 6: Atividade complementar para intuição das formas

Escreva o nome de cada uma das formas que você reconheceu pelo tato:

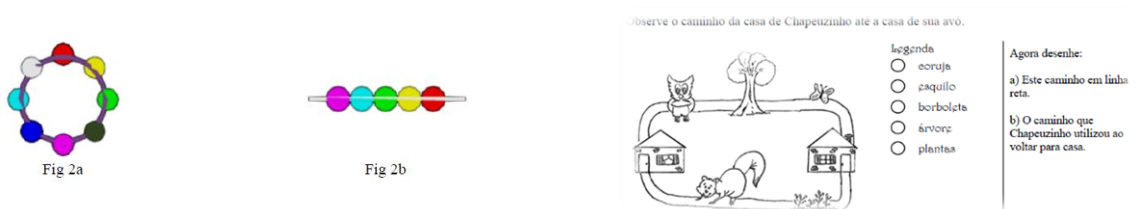


Fonte: Scortegagna (2008)

Nas figuras 7 e 8 propomos a reprodução de um desenho para representação da ordem e da percepção da ordem. O desenho tem que ser reproduzido e nesse sentido a apreensão discursiva é exigida e o olhar botânico entra em ação para reprodução do desenho. São relações topológicas de ordem que devem ser estabelecidas para a realização da atividade e a apreensão discursiva é exigida.



Figura 7 : Reprodução das figuras Figura 8: reprodução do caminho em ordem direta e inversa



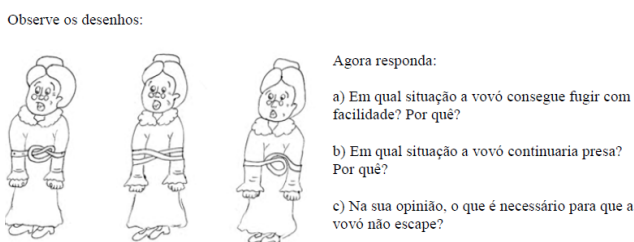
Fonte: Scortegagna (2008) adaptado.

Nestas atividades a desconstrução dimensional é contemplada para a reprodução das figuras solicitadas (no caso dos círculos as linhas fechadas sem vértices e no caso da reprodução do caminho as diferentes formas e as diferentes dimensões contempladas: 0D os vértices, 1D os pontos e 2D as figuras planas). O olhar agrimensor é também exigido pelo fato de trabalhar em escala com objetos da realidade representados no papel. A apreensão sequencial pode ser solicitada pedindo que a criança descreva como procedeu para reproduzir a ordem dos elementos dos desenhos.

A atividade de caminhos em labirintos cumpre os mesmo objetivos.

Na atividade a seguir apresentada na figura 8 solicita-se que a criança estabeleça relações de envolvimento, também topológicas, e ao mesmo tempo direciona o olhar botânico e a desconstrução dimensional, pois direciona o olhar para as linhas de dimensão 1D e para as sobreposições e justaposições dos elementos do desenho em 2D).

Figura 8 Relações topológicas de envolvimento



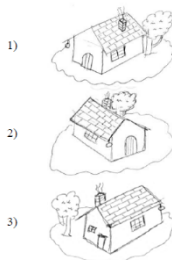
Fonte: Scortegagna (2008) adaptado

Relações projetivas também podem ser propostas em atividades e se voltam para as diferentes apreensões, desenvolvimento de olhares e desconstruções dimensionais solicitadas para o desenvolvimento do pensamento geométrico. Isso pode ser observado na atividade apresentada na figura 9.



Figura 9: relações topológicas projetivas.

Marque com um xis onde está a mãe de Chapuzinho na em hora que tirou a foto da casa:



Fonte: Scortegagna (2008) adaptado

Nessa atividade está contemplada a desconstrução dimensional ao voltar o olhar para um desenho de uma casa em 3D no plano. A apreensão sequencial e discursiva também é exigida no momento em que o aluno descreve passo a passo a posição do observador no momento de tirar a fotografia.

Igualmente a atividade apresentada na figura 10.

Figura 10: Desenvolvimento de relações projetivas

Chapeuzinho tinha um cachorro chamado Lulu. Ele estava brincando com uma bola, equilibrando-a no focinho.

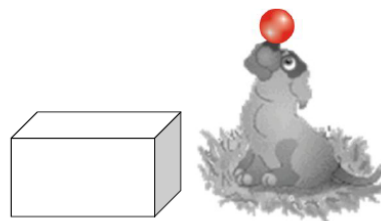
a) De repente, ele se distraiu e a bola foi parar em cima de uma caixa de papelão. Desenhe onde está a bola.

b) Ao tentar pegá-la, Lulu bateu na caixa e a bola acabou caindo dentro dela. Desenhe esta situação.

c) Então virou a caixa, a bola saiu de dentro da caixa e foi parar do lado esquerdo da caixa. Desenhe.

d) Lulu correu para apanhá-la, mas ela rolou para o lado direito. Desenhe.

e) Lulu estava se divertindo com a brincadeira, até ouvir um assobio e nem percebeu que a bola foi parar atrás da caixa. Desenhe.



Fonte: Scortegagna (2008) adaptado.

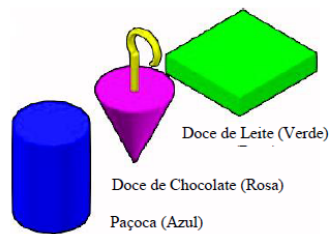
As relações projetivas supõem uma relação entre o objeto e o ponto de vista próprio. Isso exige diferenciar do ponto de vista de outro observador. Uma construção é exigida para a elaboração de perspectivas e vai relacionar objetos entre si, segundo um sistema de coordenadas e segundo uma coordenação das relações projetivas que correspondem a diversos observadores possíveis segundo Piaget e Inhelder,(1993, p.224,

apud Scortegagna, 2008) . Essas coordenações exigirão olhares agrimensor, botanista, construtor, desconstruções dimensionais 0D, 1D, 2D, 3D ao direcionar o olhar para pontos, linhas regiões e as figuras especiais representadas no plano e as diferentes apreensões discursiva, sequencial, perceptiva e operatória.

A apreensão operatória também pode ser proposta em atividades para as crianças das séries iniciais do ensino fundamental. A figura 12 apresenta um tipo de atividade que pode ser proposta.

Figura 12: Atividade para desenvolvimento de relações projetivas por meio de secções.

Utilizando a massa de modelar, confeccione os doces que a Chapeuzinho levou para sua avó.



Responda:

Fazendo um corte nos doces, no sentido longitudinal, qual a forma que o interior de cada doce terá?  
Paçoca (desenhe). Doce de Chocolate (desenhe). Doce de leite (desenhe)

Fazendo um corte paralelo a base, que forma o interior de cada doce apresentará?  
Paçoca (desenhe). Doce de chocolate (desenhe). Doce de leite (desenhe)

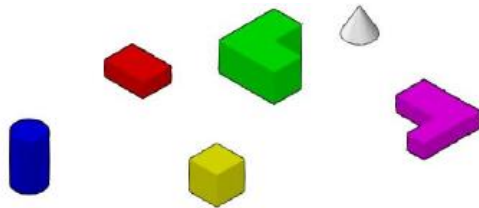
Agora, utilizando a faca de plástico, corte os doces representados pela massa de modelar e verifique se suas respostas estão corretas.

Fonte: Scortegagna (2008), adaptado.

Essa atividade vai exigir o acréscimo de traços auxiliares e a reprodução das secções que deverão ser imaginadas antes das secções e desenhadas após as secções. Esses desenhos (representações) exigirão o olhar botanista para identificação das formas, o olhar construtor para representação no papel utilizando escala, o olhar construtor para reprodução dos ângulos, paralelismos, perpendicularismos, das figuras obtidas nas secções, desconstrução dimensional para reprodução dos vértices, segmentos e regiões planas das secções. As apreensões operatória e perceptiva são exigidas para a reprodução de subfiguras dos objetos obtidas por meio das secções e as apreensões sequencial e discursiva para descrição das ações realizadas pela criança.

Uma outra atividade pode ser proposta em complementação à atividade descrita na figura12. Ela pode ser observada na descrição apresentada na figura 13.

Figura 13: Desenvolvimento de relações projetivas por meio de encaixes



Fonte: Scortegagna (2008) adaptado.

Nessa atividade as apreensões discursiva e sequencial são exigidas para a criança acompanhar, por meio do olhar botanista, o encaixe das formas, duas a duas, sem movimentação física dessas formas. Essa atividade direciona para a desconstrução dimensional uma vez que os encaixes dar-se-ão pelas regiões idênticas e pelas medidas dos lados das figuras.

Por fim, mas sem esgotar as possibilidades, uma atividade para reprodução da sala de aula, de um ambiente da casa com vista de cima são ricas nas explorações das apreensões, olhares e desconstruções dimensionais importantíssimas para a aprendizagem da geometria.

### Considerações finais

Temos que incentivar no ensino uma maneira matemática de ver as figuras em geometria por meio de variações que se operam no olhar do observador e não na figura (Duval, 2011, p.87).

Infelizmente nas escolas não ocorre o ensino do “ver” e sim uma forma violenta e irrealista do “ver” fundamentado no enunciado de propriedades, definições e teoremas, segundo Duval (2011, p.88)

Essa maneira de “ver” exige a organização do ensino com tarefas e problemas específicos que devem ser propostos desde os anos iniciais da educação básica de acordo com Duval (2011, p. 94).

Essa maneira de ver deve, segundo Scheifer (2017) vai exigir a articulação dos registros das figuras com o discurso para que as unidades figurais sejam identificadas, principalmente as dimensionais. Isso porque a percepção automática se dá na dimensão 2 e as aplicações e definições de teoremas se fazem em outras unidades figurais ao relacionar, por exemplo, medidas de lados (dimensão 1D) com medidas de ângulos (dimensão 2D).

Existem tratamentos próprios ao registro das figuras geométricas e isso pode ser proposto nas atividades que organizamos para o ensino. Esses tratamentos são essenciais visto que as figuras atuam como suporte intuitivo para a resolução de problemas em geometria e, por essa razão é necessário não limitar a atenção para caminhos únicos que conduzem à solução. Uma conduta de abdução segundo Duval (2004, p. 161) permite limitar a atenção em certos momentos para alguns elementos da figura e em outros para outros elementos de forma a contribuir para os caminhos que conduzem à solução. Essa conduta só poderá ser alcançada por meio de um trabalho árduo e específico desde os anos iniciais da educação básica voltado para as apreensões, desconstruções dimensionais e desenvolvimento de olhares icônicos e não icônicos.

Lembrar que, em um primeiro momento, os tratamentos figurais são independentes de um conhecimento matemático e estão muito mais relacionados às possibilidades de modificações que efetuamos nas figuras e das formas como exploramos olhar essas figuras.

Esses tratamentos caracterizam uma riqueza e complexidade heurística para o registro das figuras geométricas e para que compreendamos quais são as condições cognitivas para a aprendizagem da geometria, esses conhecimentos são essenciais.

## Referências

DUVAL, R. 2004. *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Tradução Myriam Vega Restrepo. Santiago de Cali: Ed. Peter Lang, 2004.

\_\_\_\_\_. *Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência*. Tradução de Méricles T. Moretti. REVEMAT, Florianópolis v. 7, n. 1, p. 118-138, 2012a.

\_\_\_\_\_. *Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento*. Trad. MORETTI, M. T. Revemat: R. Eletr. De Edu. Mat e ISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 266-297, 2012b.

\_\_\_\_\_. *Ver e ensinar a Matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas*. Organização de Tânia M. M. Campos. Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, R. Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 2005. v. 10, p. 5-53

MORETTI, M. T. Semiosfera do olhar: um espaço possível para a aprendizagem da geometria. *Acta Scientiae*, v. 15, n. 2, p. 289-303. Canoas, 2013. Disponível em

<<http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/568>> Acesso em: 28 de Jan. de 2017

PIAGET, J. & INHELDER, B. *A representação do espaço na criança*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1993.

SCHEIFER, C. *Design metodológico para análise de atividades de geometria segundo a teoria dos registros de representação semiótica*. Dissertação de mestrado. Programa de Pós Graduação em Educação da UEPG. Ponta Grossa, 2017.

SCORTEGAGNA, G. M. *A organização da prática educativa em geometria: contribuições da teoria piagetiana*. Dissertação de mestrado. Programa de Pós Graduação em Educação de Ponta Grossa. Ponta Grossa, 2008.