NOÇÕES SOBRE ALGUMAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

Valdeni Soliani Franco
Universidade Estadual de Maringá
vsfranco@uem.br

Resumo:
Serão apresentados no minicurso noções das principais geometrias que não são euclidianas e que estão presentes nas Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná. Com as noções será possível discutir possibilidades de ensino de cada uma delas. Para isso, será discutido ideias sobre ver, visualizar e representar objetos e resultados da Matemática, em particular das diversas Geometrias.
Palavras-chave: Geometrias. Ver. Visualizar. Representar.

Introdução

Os conceitos matemáticos e os resultados que os envolve e que fazem parte das estruturas curriculares da Educação Básica, em geral, foram construídos há séculos. A ciência, evidentemente, caminha bem a frente do que é ensinado, e para que um determinado conteúdo faça parte do ensino das crianças e dos jovens deve-se mostrar que ele é importante para a formação de um cidadão.

Incluir ou retirar das estruturas curriculares, em qualquer nível de ensino, conteúdos de uma determinada área do conhecimento envolve sempre polêmicas, discussões, mas principalmente desafios. O que será que é mais difícil, incluir ou retirar conteúdos dessas estruturas? Ao incluir nas estruturas curriculares do Estado do Paraná, as Geometrias não Euclidianas, causou, causa e ainda causará várias discussões a respeito.

As DCE do Paraná trazem o conteúdo noções de Geometrias Não-Euclidianas que devem ser ensinadas no Ensino Fundamental e Médio. No Ensino Fundamental o aluno deve ser capaz de compreender: geometria projetiva (pontos de fuga e linhas do horizonte); geometria topológica (conceitos de interior, exterior, fronteira, vizinhança, conexidade, curvas e conjuntos abertos e fechados) e noção de geometria dos fractais (PARANÁ, 2008).

No Ensino Médio deve-se garantir ao aluno o aprofundamento dos conceitos da geometria plana e espacial em um nível de abstração mais complexo. Também no Ensino Médio deve-se aprofundar o estudo das Noções de Geometrias Não-Euclidianas ao abordar a Geometria dos Fractais; a Geometria Hiperbólica e a Geometria Elíptica (PARANÁ, 2008).

Não será objetivo deste minicurso discutir a importância ou não dessas inclusões, mas sim apresentar noções de todas as Geometrias que estão presentes nessas diretrizes, apenas chamando a atenção, que, em geral não dizemos geometria topológica, mas simplesmente, Topologia.

Outro objetivo do minicurso é mostrar a importância da visualização e da representação em Matemática, em particular, nas Geometrias, bem como a diferença entre ver e visualizar.

O que será trabalhado?

Ver, visualizar e representar.

Existem várias interpretações para o termo visualização em Matemática, o artigo de Flores, Wagner e Buratto (2012),

> busca compreender como pesquisadores conceituam, ou dão significado ao termo visualização em educação matemática, bem como analisar as tendências neste campo no que diz respeito, particularmente, ao papel da visualização para os processos de ensino e aprendizagem matemática (p. 32).

Mas, qualquer que seja a caracterização dada a este termo, é certo que ela é diferente da visão.

Quando dizemos que vemos um objeto, isto significa que estamos tendo uma visão física do objeto, e isto só é possível, evidentemente, se o objeto for real. Isso não ocorre com os objetos da matemática. Nenhum dos objetos da matemática é visível, no sentido de ver com os olhos, e é por isso a importância da representação em matemática. Representação é outro termo para o qual existem várias interpretações.

Escolhemos para o minicurso, o sentido de representação dado por Duval (1995), que trabalha com os registros de representação semiótica. Duval (2016) afirma que:

> A matemática é a única disciplina em que se trabalha exclusivamente com representações semióticas, haja vista que não existe outro modelo de acesso aos objetos matemáticos. Isso põe a matemática em uma situação epistemológica que é totalmente diferente da das outras disciplinas científicas (DUVAL, 2016, p. 17).

Assim, no minicurso, durante a apresentação das geometrias não euclidianas, mostraremos registros de representação semióticas para cada uma delas, e o obstáculo que se construiu pelo fato de se confundir representação com o próprio objeto matemático.

A Topologia

Recentemente ao ministrar um minicurso para ingressantes em um curso de Pedagogia a distância, foi gravado um vídeo que discutia alguns aspectos da Topologia. Nas discussões no fórum sobre o assunto, a grande maioria, por volta de 200 participantes, ficou surpresa em saber que aqueles assuntos faziam parte da matemática. Segue, como exemplo dois comentários.

> *Não somente os números são estudados na matemática. Além de fatores quantitativos, também são estudados os qualitativos. No caso dos fatores qualitativos, a parte da Matemática responsável por estudá-los é a Topologia. Nunca tinha parado para pensar desta forma e surpreendi ao perceber que a Matemática também se envolve em estudos qualitativos.*

> *Esses conceitos de estar dentro e fora, ser vizinho, contínuo ou descontínuo, eu, como qualquer outra pessoa, não sabia que era matemática. Estou surpresa pois achava que matemática só estudava números. Esses exemplos de transformações topológicas são muito interessantes.*

Percebe-se nos dois comentários a questão que é bastante recorrente, que quando se fala em matemática, o que mais aparece são os números, mas a surpresa foi tão grande para o participante do segundo comentário que ele afirma que "eu, como qualquer outra pessoa, não sabia que era matemática" em relação aos conceitos envolvidos na topologia. Ou seja, lê-se: "não é possível que alguém saiba disso, pois como nunca ninguém me havia dito isto?". Em relação a este fato, veja mais comentários, falando da topologia:

> *Estudei a geometria euclidiana e vejo as professoras trabalharem na educação infantil esta geometria também. Elas até trabalham as questões de dentro e fora, vizinhos, aberto e fechado enfim, mas não vejo sendo trabalhado de forma a fazer o aluno ver as características comuns em figuras diferentes assim como foi mostrado nos slides, onde as figuras sofreram alterações de forma e tamanho e mesmo assim têm propriedades topológicas preservadas.*

> *Fiquei surpresa em saber, que na geometria existem outras formas de se estudar, que não é só círculos, triângulos, retângulos, etc., com os conceitos da topologia longe/perto, dentro/fora, separado/unido, entre outros, fica mais interessante o estudo da geometria,*

O que se percebe é que a surpresa foi quase unânime entre os participantes do curso, sobre o desconhecimento que os conceitos topológicos, tais como: dentro/fora, conexo/desconexo, contínuo/descontínuo, vizinhança etc. fazem parte da matemática indicando que de fato, ela é pouco ou não é trabalhada como conteúdos estruturantes da Educação Básica.

Assim, no minicurso, faremos uma discussão sobre esta geometria e sua importância na formação de uma criança e de um jovem.

A Geometria Projetiva

Gobert (2001, p. 87, tradução nossa), afirma que:

> As seguintes competências deveriam ser desenvolvidas pelos alunos:
> - ✓ Ser consciente de que uma representação indica um ponto de vista, lugar no espaço de onde a vemos;
> - ✓ Ser capaz de mudar de ponto de vista e de produzir uma representação em consequência;
> - ✓ Ser capaz de ler ou de deduzir propriedades do objeto a partir de uma representação, dominar as regras e as convenções de escritura;
> - ✓ Ter consciência da deformação das propriedades geométricas, ou de sua conservação, das ligações existentes entre objetos e representações.

De acordo com Coxeter (1974), a motivação para a construção desta geometria veio das artes. Em 1425, o arquiteto italiano Brunelleschi começou a discutir a teoria geométrica da perspectiva, que foi consolidado em um tratado feito por Alberti, anos mais tarde. Desargues, no seu “Brouillon Project” de 1639, constrói a ideia de ponto no infinito, como o encontro de retas que possuem a mesma direção. Mas foi Poncelet, no século XIX, que demonstrou vários resultados desta geometria, bem como os principais teoremas que já haviam sido demonstrados, mas agora utilizando razões puramente projetivas, muitas vezes ampliando, desta forma, suas teses e possibilidades de utilização.

No minicurso serão trabalhadas algumas ideias de utilização desta geometria no Ensino Fundamental e Médio.

A Geometria da Superfície Esférica

Os resultados históricos citados a seguir foram descritos em Coxeter (1998) e Greenberg (1994).

Na Geometria Euclidiana, dado um ponto P que não está em uma reta *r*, existe exatamente uma reta paralela a reta *r* que contém o ponto P, sendo isso, uma das versões do conhecido postulado das paralelas da obra *Elementos* de Euclides. Em algumas geometrias, assume-se que não existe reta paralela a *r* que contém o ponto P. Uma dessas geometrias é a Geometria da Superfície da Esfera, que foi desenvolvida por Riemann (1826-1866), sendo a segunda Geometria não Euclidiana reconhecida como tal.

Riemann supôs que a hipótese de Saccheri (será discutido no minicurso) do ângulo obtuso era válida, e alterou outros postulados dos Elementos de Euclides, a saber:

1. Quaisquer dois pontos determinam ao menos uma reta;
2. Uma reta é ilimitada;
3. Quaisquer duas retas em um plano, se encontram.

Essa tese de Riemann foi fruto de um trabalho de trinta meses, cuja finalidade era obter habilitação para ser professor na Universidade de Göttingen. A prova consistia de um trabalho de pesquisa inédito e de três conferências, uma das quais era escolhida pelo corpo docente, permitindo ao candidato indicar suas linhas de estudo na Instituição.

Se Gauss fosse acusado por ter retardado o surgimento da Geometria Hiperbólica, isso ficaria superado por ter sido dele (como chefe de departamento) o pedido para Riemann discorrer sobre o último tema.

No trabalho apresentado por Riemman, as retas seriam as geodésicas de uma superfície esférica, que no caso seria o plano dessa geometria. Como a reta é ilimitada, mas tem comprimento finito, ela pode ser representada como uma circunferência. As circunferências máximas, interpretadas como retas, nos fornecem um modelo para as retas finitas no plano finito – a Superfície Esférica.

Quais as consequências práticas para este estudo? Este é o principal foco do estudo desta geometria no minicurso.

A Geometria Hiperbólica

Durante meados do século XIX encontramos um exemplo de simultaneidade de “descobertas” relacionadas às Geometrias não Euclidianas; o alemão Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), o húngaro Janos Bolyai (1802-1860) e o russo Nicolai Lobachevsky (1793-1856), sem qualquer contato mútuo e sem prévio conhecimento dos trabalhos de Saccheri, desenvolveram, independentemente, um novo tipo de Geometria (LOVIS, 2009).

Lobachevsky foi um dos matemáticos que mais contribuiu na construção das Geometrias não Euclidianas. Durante sua vida acadêmica elaborou vários trabalhos relacionados à Geometria. Em um desses trabalhos "On the Principles of Geometry", publicado em 1829, Lobachevsky marcou oficialmente o nascimento da Geometria não Euclidiana.

Matemáticos do fim do século XIX chegaram a resultados importantes sobre à consistência da Geometria de Lobachevsky, ou Geometria Hiperbólica. Eles descobriram que as Geometrias não Euclidianas devem ser consistentes caso seja consistente a Geometria Euclidiana. Lobachevsky rejeitou somente o quinto postulado de Euclides, mas conservou os demais postulados e os axiomas da Geometria Euclidiana. O que faltava era construir um modelo matemático para a Geometria Hiperbólica.

O matemático Felix Klein (1849-1925) criou um modelo para a Geometria Hiperbólica, que está de acordo com os postulados dessa Geometria. O matemático Henri Poincaré (1864-1912) criou outros dois modelos para a Geometria Hiperbólica. Durante o minicurso vamos descrever esses três modelos e discutir com um pouco mais de detalhes o chamado modelo denominado "Disco de Poincaré".

A Geometria dos Fractais

Comecemos com uma frase de Mandelbrot (1983, p. 1)

> Por que a geometria é frequentemente descrita como "" fria "e" "seca?" Um motivo reside na sua incapacidade de descrever a forma de uma nuvem, uma montanha, um litoral ou uma árvore. As nuvens não são esferas. As montanhas não são cones, as costas não são círculos, e a casca não é suave, nem a luz viaja em linha reta.

A maior parte dos objetos que encontramos no nosso dia-a-dia não são retas, nem esferas, nem cones. Na natureza, em geral, os mares e oceanos, que separam os continentes e ilhas, com suas costas, suas montanhas e rios, rochas, plantas e animais, temos componentes com suas formas nas quais dominam a irregularidade.

O matemático Benoit Mandelbrot concebeu e desenvolveu esta Geometria da Natureza e implementou o seu uso num diverso número de aplicações. A partir desta teoria descreveu vários modelos irregulares e fragmentados que encontramos em nossa volta através da família de formas que chamou **fractais**.

Alves (2007), escreve que:

> O conceito de fractal é simples e, no entanto, não é fácil defini-lo de modo formal dir-se-a até que se trata de uma ideia que se torna mais útil quando entendida de forma abrangente através das muitas imagens e contextos que a ele se referem (ALVES, p. 3).

O que propomos apresentar no minicurso é esta visão mais simples de ver a Geometria dos Fractais.

Conclusão

Esperamos que tenha dado para se perceber, por meio do que foi descrito nas seções anteriores, que o que se pretende fazer neste minicurso não é aprofundar estudos das geometrias comentadas, mas sim tentar motivar o estudo e se possível o ensino delas, que fornece um prazer imenso quando são compreendidas como elementos do cotidiano.

Talvez tais geometrias sejam mais visíveis como úteis do que muitas teorias que são ensinadas a anos e que não fazem nenhum sentido para muitos dos estudantes.

Referências

ALVES, C. M. S. F. J. **Fractais**: conceitos básicos, representações gráficas e aplicações ao ensino não universitário. Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa, 2007, 324p.

COXETER, H. S. M. **Non-Euclidean Geometry**. Ed. 6. Toronto: University of Toronto Press. 1998, p. 349

COXETER, H. S. M. **Projective Geometry**. Ed. 2. Toronto: University of Toronto Press, 1974, 163p.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamento humano**. Tradução de Myriam Vega Restrepo. Cali: Universidad del Valle, 1995.

DUVAL, R. **Questões epistemológicas e cognitivas para pensar antes de começar uma aula de matemática**. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. REVEMAT. Florianópolis (SC), v.11, n. 2, p. 1-78, 2016

FLORES, C. R.; WAGNER, D. R; BURATTO, I. C. F. **Pesquisa em visualização na educação matemática:** conceitos, tendências e perspectivas. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.14, n.1, pp.31-45, 2012.

GOBERT, S. **Questions de didactique liées aux rapports entre la géométrie et l'espace sensible, dans le cadre de l'enseignement à l'école élémentaire**. Diplome de Doctorat (Didactique des mathématiques) – Université Paris 7- Denis Diderot, Paris, 2001. 318 p.

GREENBERG, M. J. **Euclidean and Non-Euclidean Geometries**. Ed 3. New York: W. H. Freeman and Company. 1994, 483p.

LOVIS, K. A. **Geometria Euclidiana e Geometria Hiperbólica em um Ambiente de Geometria Dinâmica:** o que pensam e o que sabem os professores. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Maringá, Maringá/PR, 2009, 148p.

MANDELBROT, B. B. **The Fractal Geometry of Nature**. New York: W. H. Freeman and Company. 1983, 468p.