MODELAGEM MATEMÁTICA E SEMELHANÇAS DE FAMÍLIA: UMA DISCUSSÃO FUNDAMENTADA NA PERSPECTIVA WITTGENSTEINIANA

Bárbara Nivalda Palharini Alvim Sousa
Universidade Estadual do Norte do Paraná
barbara.palharini@uenp.edu.br

Emerson Tortola
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
emersontortola@utfpr.edu.br

Lourdes Maria Werle de Almeida
Universidade Estadual de Londrina
lourdes@uel.br

Resumo:
Este artigo aborda uma investigação com foco na Modelagem Matemática na Educação Matemática e na perspectiva wittgensteiniana sobre linguagem e matemática. A pesquisa incide sobre as semelhanças de família nos jogos de linguagem de duas formas de vida, dos alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental e dos anos finais de um curso de Licenciatura em Matemática quando engajados com atividades de modelagem matemática. As análises são guiadas por meio da interpretação dos pesquisadores, com os óculos das teorias de base, de registros escritos e áudio-gravados dos alunos. Resultados apontam para usos empíricos e convencionados da linguagem matemática, para a transição de linguagem natural para a linguagem matemática e para a atribuição de significados aos conceitos matemáticos a partir da vivência com diferentes atividades de modelagem matemática.
Palavras-chave: Educação Matemática. Modelagem Matemática. Semelhanças de Família. Perspectiva Wittgensteiniana.

Introdução

Uma das inquietações que mais provocam os acadêmicos nos cursos de licenciatura em matemática é a relação entre os conteúdos que são estudados na universidade e os que são ensinados na Educação Básica. A explicação de que determinados conteúdos servem para formar uma base para preparar os acadêmicos para atuarem na Educação Básica não é suficiente. Não convence quem a recebe, nem quem a fornece. Talvez, se conseguíssemos colocar em evidência pelo menos algumas dessas relações, os professores e futuros professores poderiam compreender e até mesmo auxiliar seus alunos em dificuldades que eles carregam por sua vida escolar.

Desse modo, são necessárias atividades matemáticas que oportunizem discussões a respeito dessa relação, que deem aos alunos suporte para desenvolverem autonomia e criatividade, tanto com relação à interpretação e à investigação de problemas, quanto aos procedimentos e conceitos matemáticos.

Atividades de modelagem matemática configuram-se como uma possibilidade de promover tais discussões, uma vez que favorecem um ambiente em que a linguagem matemática é colocada em jogo, em acordo com os conhecimentos matemáticos que se tem (BASSANEZI, 2004) ou que os alunos têm condições para apreender (BARBOSA, 2003).

A análise dos usos da linguagem em atividades de modelagem matemática desenvolvidas em diferentes contextos escolares pode, portanto, sinalizar tais relações, a partir do que Wittgenstein (2012) denomina de *semelhanças de família*[1].

O objetivo dessa pesquisa, desse modo, é identificar semelhanças de família nos encaminhamentos de alunos para atividades de modelagem matemática desenvolvidas em dois contextos escolares distintos, no caso anos iniciais do Ensino Fundamental e anos finais de um curso de Licenciatura em Matemática.

Modelagem Matemática na Educação Matemática

Quando falamos em “modelagem matemática”, a palavra ‘modelagem’ lembra o trabalho de um artesão, que modela suas obras com criatividade e técnica. Assim, além de inspiração, o artesão coloca em prática seus conhecimentos. A palavra ‘matemática’, por sua vez, é utilizada como um adjetivo e sugere o uso da matemática para fazer a modelagem. Em atividades de modelagem matemática, portanto, fazemos a abordagem de situações não essencialmente matemáticas por meio de conceitos matemáticos.

No âmbito da Educação Matemática, defendemos a modelagem matemática no mesmo sentido de Almeida, Silva e Vertuan (2012), como uma alternativa pedagógica para o ensino de Matemática.

No âmbito da sala de aula, independente do nível de escolaridade, o uso de atividades de modelagem matemática está associado às ações que envolvem os atos de “formular de uma situação-problema, decidir o que manter e o que ignorar na criação de um modelo idealizado,

[1] A noção de *semelhanças de família* será discutida adiante, em uma seção específica, com base na perspectiva filosófica do austríaco Ludwig Wittgenstein acerca da linguagem.

fazer uso de matemática na situação idealizada, e então decidir se os resultados fazem sentido face à situação original" (POLLAK, 2015, p. 267, tradução nossa[2]).

Quando tratamos das ações dos alunos em atividades de modelagem matemática, a dinâmica da atividade, se inicia com uma situação-problema que pode ser direcionada pelos professores, ou definida pelos alunos e a ação do sujeito para com a situação-problema pode ser caracterizada de acordo com algumas fases: inteiração, com a situação-problema, dados e informações; matematização, tradução da linguagem natural para a linguagem matemática; resolução utilizando de artifícios matemáticos; interpretação de resultados e validação com vistas à situação inicial (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012).

É na fase de resolução que os modeladores utilizam de modelos matemáticos. Diferentes são os modos de apresentação de um modelo matemático: gráficos, tabelas, expressões algébricas, escrita cursiva, entre outros. De modo geral, um modelo matemático pode ser entendido como um conjunto de relações matemáticas, um amálgama de componentes matemáticos que visam apresentar uma situação em estudo por meio de conceitos matemáticos.

Uma das potencialidades do uso de atividades de modelagem matemática na Educação Matemática está associada à formulação de problemas e ao aprimoramento da habilidade de usar matemática em diferentes situações. Uma das atribuições dos professores de Matemática está no ensino dos usos dos conceitos matemáticos em diferentes contextos:

> A Educação Matemática é, no mínimo, responsável por ensinar como usar Matemática na vida cotidiana e na cidadania, e não podemos nos esquecer disso. Atualmente, qualquer separação das Ciências da vida cotidiana é uma ilusão. A vida cotidiana e a cidadania frequentemente envolvem questões científicas. Então, o que realmente importa na Educação Matemática é aprender e praticar o processo de modelagem matemática. O campo particular de aplicação, seja na vida cotidiana, ou no uso para o bom exercício da cidadania, ou para o entendimento de alguma parte da Ciência, esses fatores são menos importantes do que a experiência com o processo de modelagem (POLLAK, 2012, p. ix, tradução nossa[3]).

---

[2] Do original: "[…] formulating the problem situation, deciding what to keep and what to ignore in creating an idealized model, do the mathematics in the idealized situation, and then decide if the results make sense in the original situation" (POLLAK, 2015, p. 267).
3 Do original: "Mathematics education is at the very least responsible for teaching how to use mathematics in everyday life and in intelligent citizenship, and let's not forget it. Actually, any separation of science from everyday life is a delusion. Both everyday life and intelligent citizenship often also involve scientific issues. So what really matters in mathematics education is learning and practicing the mathematical modeling process. The particular field of application, whether it is everyday life or being a good citizen or understanding some piece of science, is less important than the experience with this thinking process (POLLAK, 2012, p. ix).

Os usos da matemática em diferentes situações podem, então, justificar o ensino mediado por atividades de modelagem matemática. Quando da definição das especificidades destas atividades em diferentes níveis de escolaridade, alguns elementos podem ser enfatizados como transversais, dentre eles: a matematização, o processo investigativo, e a interpretação dos resultados, e validação, com vistas à situação em estudo.

De modo geral, após a formulação de uma situação-problema, é preciso que os sujeitos modeladores utilizem da linguagem matemática para tratamento dos dados inicialmente coletados. O ato de matematizar está associado, segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012) à tradução da linguagem natural para a linguagem matemática. O entendimento expresso por Vidigal e Bean (2016) sinaliza que *matematização*, em atividades de modelagem matemática, pode se referir à conceituação ou estruturação de uma situação por meio de Matemática.

É no processo investigativo que reside uma importante característica das atividades de modelagem matemática, a formulação de hipóteses e a busca por soluções de situações matemáticas idealizadas. Segundo Bean (2001, p. 53), o uso de hipóteses é uma especificidade das atividades de modelagem matemática "a exigência das hipóteses e das aproximações simplificadoras como requisitos na criação do modelo". Neste contexto, Grigoraş (2012) discute que as hipóteses que emergem em atividades de modelagem matemática são baseadas nas informações advindas da situação-problema e visam direcionar o uso de artefatos e modelos matemáticos para solucionar os problemas levantados e, muitas vezes, idealizados. Almeida (2014) aborda o termo hipótese em modelagem matemática no sentido de *suposições bem fundamentadas*.

Já a análise interpretativa é tida sempre com vistas à situação inicial, e nesse contexto, por vezes as informações matemáticas perdem parte de sua soberania, como sinaliza Pollak (2015, p. 268, tradução nossa), ao lidar com a matemática em atividades de modelagem matemática questionamentos para além dos conceitos matemáticos são necessários:

> Em uma situação de modelagem matemática, a matemática pura perde parte de sua soberania. A qualidade de um resultado é julgada, não só com base nos procedimentos matemáticos utilizados na situação matemática idealizada, mas também pelo sucesso do confronto desta com a realidade. Se o resultado não faz sentido em termos da situação original no mundo real, não é uma solução aceitável (POLLAK, 2015, p. 268, tradução nossa[4]).

[4] Do original: "[…] in a mathematical modelling situation, pure mathematics loses some of its sovereignty. The quality of a result is judged not only by the correctness of the mathematics done within the idealized mathematical situation, but also by the success of the confrontation with reality at the end. If the result does not make sense in terms of the original situation in the real world, it is not an acceptable solution." (POLLAK, 2015, p. 268).

Com base nessas asserções teóricas sobre Modelagem Matemática, abordamos as especificidades da linguagem e o conceito de semelhanças de família na perspectiva wittgensteiniana.

Linguagem e sua pluralidade, as semelhanças de família

Meia hora, meia-vida, meia maçã, meia dúzia, meia idade, ramal meia dois sete, meia para vestir, pé de meia. Veja esses usos da palavra 'meia'. O que se pode dizer a respeito?

> O que é comum a todos estes [usos]? – Não diga: "*Tem que* haver algo que lhes seja comum, do contrário não seriam chamados [meia]" – mas *olhe* se há algo que seja comum a todos. – Porque, quando olhá-los, você não verá algo que seria comum a *todos*, mas verá semelhanças, parentescos, aliás, uma boa quantidade deles (WITTGENSTEIN, 2012, § 66, acréscimo nosso).

De certo que esses usos da palavra 'meia', embora possuam semelhanças, não dizem respeito à mesma ideia, isto é, tais termos remetem a ideias diferentes. Olhe, por exemplo, para os termos: "meia-vida" e "ramal meia dois sete". Enquanto o termo "meia-vida" determina o período de tempo que certa substância leva para reduzir sua concentração à metade, o termo "ramal meia dois sete" indica um código que quando discado liga para alguém. Em termos numéricos, enquanto a palavra "meia" do segundo termo indica explicitamente o número seis – meia dúzia –, no primeiro termo a palavra "meia" pode indicar diferentes períodos de tempo, dependendo da substância considerada. Os usos da palavra "meia" em ambos os termos se dão em diferentes circunstâncias, e seu significado é determinado pelo uso, no contexto a que se refere, em acordo com a "forma de vida" (WITTGENSTEIN, 2012), ou seja, com as atividades, hábitos, costumes, sujeitos envolvidos em um determinado contexto.

Se compararmos, ainda, tais usos a outros, veremos outras semelhanças e dissemelhanças, algumas mais marcantes, outras mais sutis. "Você encontra muitas correspondências com aquela primeira classe, mas muitos traços comuns desaparecem, outros se apresentam" (WITTGENSTEIN, 2012, § 66). Por exemplo, no caso do termo "meia idade", a palavra 'meia' também demarca a metade de algo, mas, particularmente, um período intermediário da vida entre a maturidade e a velhice. Já no caso do termo "pé de meia[5]", as

---

[5] O termo "pé de meia" indica uma reserva financeira, uma espécie de poupança. O termo pode ter surgido pelo fato de que antigamente, quando bancos não eram comuns, costumava-se guardar dinheiro em um pé de meia.

semelhanças já são sobrepostas pelas dissemelhanças com os termos já citados e semelhanças de outras espécies se apresentam, como explica Wittgenstein (2012).

Mas poder-se-ia também questionar: a palavra 'meia' não se refere à metade de algo? Se a pergunta for feita dessa forma, talvez, a resposta possa ser afirmativa. Mas assim como orienta Wittgenstein (2012, § 66), "não pense, mas olhe!", isto é, não pense em uma referência que seja comum a todos os usos, mas olhe para o uso da palavra e para o significado que emerge nesse uso, e, provavelmente, esse *olhar* revelará que embora a palavra 'meia' seja a mesma em todos os termos citados, o 'significado' pode não o ser. Isto porque o significado está imerso em um contexto cultural e é resultado de uma construção histórica e social.

O significado, portanto, na perspectiva de Wittgenstein, é algo que não existe para além da linguagem, aliás, para o autor, tudo o que conhecemos, o que dizemos, o que interpretamos e o que pensamos ocorre ou se manifesta por meio da linguagem. É na e pela linguagem que se constituem os significados. "Não há nada oculto" (WITTGENSTEIN, 2012, § 435), não há uma referência a ser identificada. "O convite para que se 'veja' pretende afastar a tendência para filosofar, isto é, afastar a inclinação para encontrar 'algo comum'; [...] buscar algo que está por trás daquilo que aparece" (HEBECHE, 2003, p. 44). Afinal, "o que porventura está oculto, não nos interessa" (WITTGENSTEIN, 2012, § 126)[6].

A linguagem, nesse contexto, é uma complexa trama de semelhanças e dissemelhanças, que caracterizam o significado a partir dos usos que fazemos das palavras e dos signos, usos que denotam o que Wittgenstein (2012, § 7) chama de jogos de linguagem. "Os jogos de linguagem estão aí muito mais como objetos de comparação, os quais, por semelhança e dissemelhança, devem lançar luz nas relações de nossa linguagem" (WITTGENSTEIN, 2012, § 130).

Essas relações estão intimamente associadas aos jogos de linguagem, que dizem respeito ao contexto e às atividades em que se faz um uso da linguagem. No âmbito da matemática, por exemplo, quando falamos em meia maçã, trabalhamos com uma metade idealizada, não há erros, não há perdas, meia maçã implica em metade de sua massa, de seu volume, de sua superfície. Já no dia a dia, dividir uma maçã ao meio pode ser uma tarefa mais complexa do que parece, é fato que a divisão de uma maçã ao meio com uma faca não resultará perfeitamente meia maçã, mas ninguém nega que a maçã foi dividida ao meio. Inclusive, quando a divisão é feita por dois irmãos, que gostam muito de maçã, geralmente a dinâmica

[6] Com essa afirmação Wittgenstein não sugere a existência de algo oculto por trás da linguagem, pelo contrário, para o autor não faz sentido pensar em algo que vai para além da linguagem.

utilizada é: você divide e eu escolho, desse modo quem faz o corte o faz em busca de um corte ideal, que divida a maçã exatamente ao meio, como, em geral, consideramos no contexto da matemática.

São dois jogos de linguagem diferentes, pois enquanto na matemática trabalha-se com um corte idealizado, no dia a dia trabalha-se com o "em busca" do corte perfeito e um não contradiz nem invalida o outro, pelo contrário, caracterizam diferentes facetas do significado associado à palavra "meia", pois tais jogos de linguagem servem a formas de vida diferentes, com objetivos diferentes. Desse modo cada jogo possui suas regras de uso que orientam seus participantes, e quando um sujeito aprende a jogar um novo jogo, aprende também uma nova faceta do significado, isto é, aprende um novo uso.

No âmbito da matemática existem também vários símbolos que dependendo do contexto em que são utilizados podem denotar ideias diferentes. Um exemplo é o "x". Esse "x" pode significar muitas coisas, uma multiplicação no contexto da aritmética, uma incógnita no estudo das equações algébricas, uma variável no estudo de funções, um produto vetorial no contexto da geometria analítica. Interpretar e saber lidar com esse "x" em cada caso, depende de uma formação que só se faz, segundo Wittgenstein, colocando os alunos em contato com os diferentes usos, ampliando a participação dos alunos nos jogos de linguagem associados a esse "x".

Consideramos que um tipo de atividade que pode favorecer a participação dos alunos em diferentes jogos de linguagem é a modelagem matemática, uma vez que possibilita a partir da problematização e investigação de fenômenos reais, a abordagem matemática segundo conhecimentos já estabelecidos ou não, o desenvolvimento da habilidade de formular e resolver problemas, entre outros.

Aspectos metodológicos e contexto da pesquisa

Os dados referentes às atividades de modelagem matemática foram coletados em dois contextos. A primeira atividade foi desenvolvida com alunos do 1º ano do Ensino Fundamental (alunos com 6 anos de idade) em uma escola pública e municipal do Paraná, e teve como temática a quantidade de peixes em um aquário. A segunda atividade, por sua vez, foi desenvolvida com alunos do 3° ano de um curso de Licenciatura em Matemática, de uma universidade pública do Paraná, durante a disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias, cuja temática investigada foi a temperatura do café e a garrafa térmica.

Em ambos os casos, as atividades foram desenvolvidas de modo a favorecer a familiarização dos alunos com as ações e procedimentos de uma atividade de modelagem matemática. Para isso, nos orientamos nos “três momentos de familiarização” sugeridos por Almeida, Silva e Vertuan (2012), que afirmam que tal maneira de desenvolver atividades de modelagem, auxilia os alunos a desenvolverem habilidade de fazer modelagem matemática, uma vez que a cada momento o professor compartilha mais com o aluno a responsabilidade pelo encaminhamento da atividade.

A atividade referente à quantidade de peixes de um aquário configura-se como uma atividade de 3º momento, foi a quarta atividade de modelagem desenvolvida pelos alunos e teve o tema escolhido por eles. Por se tratar de alunos de 1º ano, optamos por fornecer algumas informações curtas, trechos de reportagens, por exemplo, pois eles ainda estavam em fase de alfabetização. O problema e a investigação, por sua vez, foram definidos em conformidade com os interesses dos alunos, que decidiram por estudar qual a quantidade de água deve ter um aquário, sabendo-se a quantidade de peixes que o habitarão? Para investigar esse problema, os alunos partiram das informações que são apresentadas no Quadro 1.

Qual a quantidade de água que deve ter um aquário?

Não existe uma regra universal, mas quando definir quais peixes criar, pesquise a necessidade de cada espécie, desde os parâmetros da água – como o espaço.
O importante é levar em consideração o tamanho do peixe adulto. Alguns pensam apenas no peixe quando está pequeno e descartam quando adultos. Não façam isso!
Mas como calcular qual o volume de água deve ter em um aquário, considerando a quantidade de peixes?

- Pequenos: *5 litros vagos + 2 litros por peixe*

(Guppy, Neon, Mato Grosso, Beta e outros do mesmo porte)

- Médios/pequenos: *10 litros vagos + 5 litros por peixe*

(Molinésia, Espada, Plati e outros do mesmo porte)

- Médios/grandes: *20 litros vagos + 15 litros por peixe*

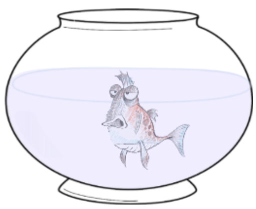
(Bandeiras, Beijadores, e outros do mesmo porte)

- Grandes: *40 litros vagos + 40 litros por peixe*

(Discos, Kinguios, e outros do mesmo porte)

- Jumbos: *100 litros vagos + 100 litros por peixe*

(Apaiari ou Oscar, Carpas)



Quadro 1: Informações associadas à quantidade de água de um aquário
Fonte: Dos autores.

Para o desenvolvimento da atividade, informações foram coletadas em conjunto com o professor. Os alunos decidiram por realizar a atividade com a quantidade necessária para peixes pequenos, como peixes Guppy, Neon, Mato Grosso, Beta e outros do mesmo porte. Em busca por informações na internet obtiveram a informação de que para esses peixes seria necessário 5 litros vagos de água no aquário e mais dois litros por peixe. Como se pode observar as variáveis envolvidas na situação foram: quantidade de peixes e volume de água do aquário, em que o volume de água do aquário depende da quantidade de peixes do aquário.

O Quadro 2, apresenta os modelos matemáticos produzidos pelos alunos.

Quadro 2: Modelos matemáticos para a quantidade de água de um aquário
Fonte: Tortola (2016).

A atividade referente a temperatura do café e a garrafa térmica foi desenvolvida para familiarizar os alunos com atividades de modelagem matemática. Dispostos em quatro grupos, dezoito alunos desenvolveram a atividade e contaram com o auxílio da professora da disciplina. A partir de um problema colocado pela professora da disciplina "como obter a temperatura do café, em uma garrafa térmica, em qualquer instante de tempo?", a investigação foi definida de acordo com os interesses dos alunos, a partir das informações que são apresentadas no Quadro 3.

A Temperatura do Café e a Garrafa Térmica

[...]

Uma garrafa térmica é também conhecida como *Vaso de Dewar*[7]. A característica da garrafa térmica é conservar a temperatura dos líquidos de seu interior pelo maior tempo possível. Desse modo, a função da garrafa térmica é evitar a troca de calor entre o meio ambiente e um corpo qualquer. Na garrafa térmica as paredes duplas dificultam a troca de calor por radiação, enquanto o vácuo entre essas paredes tenta evitar a troca de calor por condução e convecção, já que estes dois processos não ocorrem no vácuo. A tampa da garrafa, por sua vez, impede o contato com o ar externo evitando o processo de convecção.

Segundo a ABIC (Associação Brasileira da Indústria de Café) o café deve ser preparado para ser consumido imediatamente ou, no máximo, durante a hora seguinte. E, ainda, para o preparo da bebida a água deve ser apenas aquecida (não pode ferver), visto que a perda de oxigênio altera a acidez do café. A temperatura ideal, da água, para o preparo é de 90°C.

A fim de estudar como se dá a variação da temperatura do café em uma garrafa térmica foi realizada a coleta dos dados (Tabela 1). O café foi preparado com 750 ml de água na temperatura de 90°C. O café foi depositado na garrafa térmica e a cada 10 min aproximadamente 50 ml de café foi retirado da garrafa e a

[7] James Dewar (1842-1923), físico e químico escocês, construiu o recipiente no século XIX, o qual inicialmente tinha o intuito de conservar soluções químicas em temperatura constante.

temperatura medida utilizando um termômetro químico diferenciado escala -10+250°C que sobe de 1 em 1°C a 350 mm da marca *Incoterm* enchimento Hg em vidro de diâmetro 8 – 9 mm com erro de até 20°C/+- 1°C e acima de 210°C/2+-2°C. No dia da coleta de dados a temperatura ambiente estava entre 20°C e 21°C.

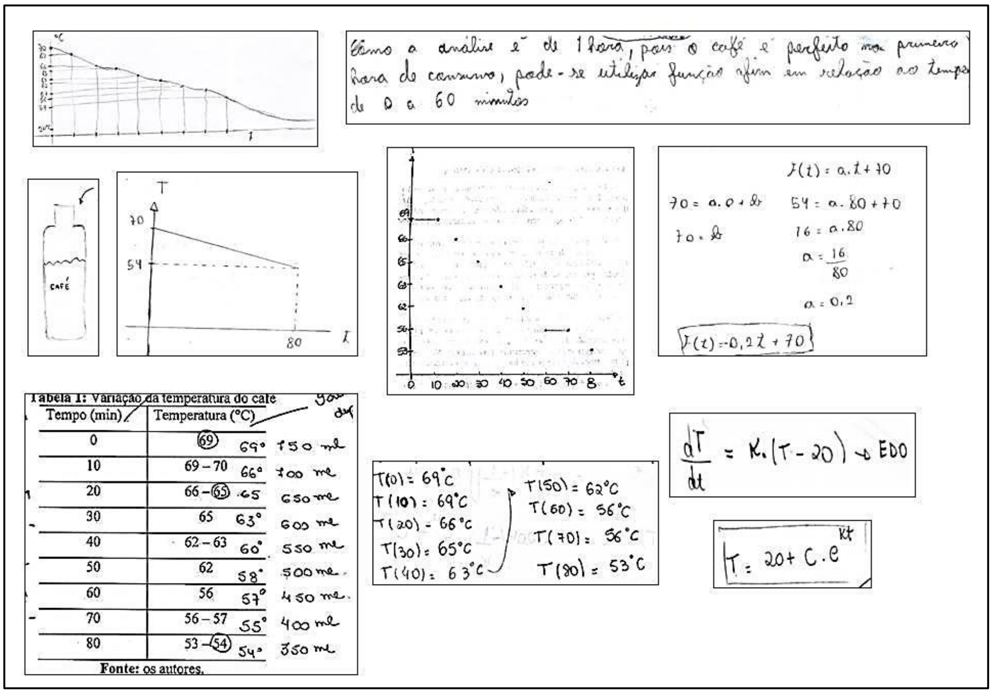
Tabela 1: Variação da temperatura do café

Tempo (min)	0	10	20	30	40	50	60	70	80
Temperatura (°C)	69	69-70	66-65	65	62-63	62	56	56-57	53-54

Fonte: os autores.

Quadro 3 – Informações associadas à temperatura do café e a garrafa térmica
Fonte: Palharini (2017).

Como podemos observar as variáveis envolvidas na situação foram: tempo e temperatura, em que a temperatura do café na garrafa térmica depende do tempo de permanência do café nesse ambiente. O Quadro 4, apresenta os modelos matemáticos produzidos pelos alunos.



Quadro 4: Modelos matemáticos utilizados pelos alunos na resolução da atividade
Fonte: Dos autores.

Em ambos os casos, os dados foram coletados por meio de áudio, vídeo, registros escritos produzidos pelos alunos e anotações dos pesquisadores em diário de campo. Esses dados são resultados de duas pesquisas que podem ser consideradas de observação-participante, uma vez que os pesquisadores desempenharam, durante o desenvolvimento da atividade, o papel de professor.

A análise dos dados é realizada por meio de uma abordagem qualitativa, inspirada em pressupostos teóricos que fundamentam a filosofia da linguagem na perspectiva de Wittgenstein e da Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática.

A busca por semelhanças de família: o processo analítico

As atividades de modelagem matemática que tratam da quantidade de água necessária em um aquário e da temperatura do café em uma garrafa térmica foram realizadas em diferentes níveis de escolaridade e, portanto, por duas formas de vida distintas que partilhavam apenas o processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

Os usos que os alunos fazem dos conceitos matemáticos são diversos, na forma de vida dos anos iniciais do Ensino Fundamental os alunos partem de informações da literatura para conjecturar uma 'lei' que associe a quantidade de água no aquário em relação ao número de peixes dentro do mesmo, já os alunos da forma de vida do Ensino Superior estão em busca de uma relação matemática que associe a variação da temperatura do café em uma garrafa térmica.

Em ambos os contextos os alunos buscam uma relação entre duas grandezas, volume de água e quantidade de peixes, e temperatura e tempo. O tratamento das informações é diferente, visto que em cada forma de vida os alunos já têm hábitos e costumes ao trabalhar com a matemática, enquanto nos anos iniciais muitos conceitos são tratados de forma intuitiva, no Ensino Superior, o rigor matemático associado à linguagem algébrica já é predominante.

Mas, as semelhanças de família existem, visto que em ambas formas de vida há a possibilidade de tratar o conceito de função como uma relação entre duas variáveis, em particular da função afim. Como sinaliza Wittgenstein, "*Tem que* haver algo que lhes seja comum, do contrário não seriam chamados [função]" – mas *olhe* se há algo que seja comum a todos" (WITTGENSTEIN, 2012, § 66, acréscimo nosso).

O conceito matemático é amplo e pode ser abordado nos dois níveis de escolaridade, as semelhanças e o parentesco se mostram nos tratamentos dados nas duas formas de vida. Por meio dos Quadros 2 e 4 é possível visualizar que nos dois níveis de escolaridade os alunos fazem o tratamento dos dados por meio de tabelas, ou sejam, utilizam o mesmo tipo de modelo matemático para apresentar os dados das situações-problema.

Se olharmos para os modelos matemáticos trabalhados pelos alunos como sugere Wittgenstein (2012), veremos que nos dois casos os alunos tentaram trabalhar com uma relação linear, e ambos justificaram seus procedimentos com base na situação-problema em estudo. No caso dos peixes, os alunos justificaram suas informações a partir dos dados coletados na internet, já os alunos que buscavam uma relação para a variação da temperatura em relação ao tempo justificaram o uso da relação linear com base no tempo de consumo para o café, ou seja, de uma hora.

As justificativas dadas pelos alunos no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática estão atreladas ao uso de hipóteses, nos dois jogos de linguagem, seja a partir de informações sobre peixes de porte pequeno, seja a partir da consideração de uma relação linear em um curto período de tempo, ou pelo uso de uma lei de resfriamento.

Mesmo trabalhando com a relação linear, os significados assumidos pela função ~~linear~~ em cada jogo de linguagem diferem. Os modelos matemáticos utilizados para a situação dos peixes sinalizam que a cada peixe que os alunos decidam colocar no aquário sempre será necessário inserir dois litros de água, enquanto que na situação do café, a relação linear não vale para além dos sessenta minutos iniciais. Ou seja, esse modo de apresentar a situação no Ensino Superior se torna inválido dependendo das condições associadas ao tempo do café na garrafa térmica. Estes significados são expressos na linguagem dos alunos e em como estes apresentam suas conjecturas sobre a situação-problema.

É possível ver semelhanças também, no modo de apresentar a matematização das situações-problema, ou seja, no modo como os alunos estruturam a situação matematicamente, como sinalizam Vidigal e Bean (2016). O uso de registros tabulares, o uso da linguagem natural, e o uso de desenhos para interpretar as situações sinalizam as semelhanças e dissemelhanças que nos fazem interpretar os significados dados pelos alunos a partir dos usos da linguagem matemática nas duas formas de vida.

Retornamos a Wittgenstein (2012, § 130) quando o filósofo aborda um dos papeis dos jogos de linguagem em nossa forma de vida “os jogos de linguagem estão aí muito mais como objetos de comparação, os quais, por semelhança e dissemelhança, devem lançar luz nas relações de nossa linguagem”.

No Ensino Superior os alunos trabalham também com o conceito de função exponencial e de equações diferenciais ordinárias, conceitos trabalhados na forma de vida na qual estavam inseridos e no jogo de linguagem do curso de Licenciatura em Matemática. Os usos da linguagem nos anos iniciais estão associados a outras especificidades, entre elas, a ludicidade na apresentação das informações, ao aprimoramento na escrita, ao reconhecimento de uma sequência numérica, entre outros.

São essas dissemelhanças que nos aproximam das semelhanças quando o foco está no ensino de Matemática, bem como nas diferentes regras que imperam nos diferentes jogos de linguagem analisados.

Ainda com relação às semelhanças de família, em cada forma de vida os alunos estão em contato com novos usos do conceito de função e de relação entre grandezas, seja a partir da definição intuitiva de função, nos anos iniciais, seja a partir da introdução de uma equação diferencial e de sua solução como uma relação entre duas variáveis, o que indica o uso de uma equação diferencial ordinária. Nesse contexto, o conceito de relação entre duas variáveis é "colocado na mesa", seja por meio de seu uso a partir da análise do volume de água em relação ao número de peixes, seja por meio da análise da variação da temperatura em relação ao tempo.

Os usos da simbologia matemática podem denotar uma dissemelhança, mas isso nada mais é do que uma especificidade de cada jogo de linguagem e do que cabe ou não a uma forma de vida e à outra, enquanto uns usam a aritmética devido às regras daquele jogo de linguagem, outros usam a álgebra, conforme os hábitos e costumes partilhados em cada forma de vida.

Considerações Finais

O olhar para as atividades de modelagem matemática nos dois contextos apresentados, permitiu a identificação de "semelhanças de família" nos jogos de linguagem que surgiram nos encaminhamentos dos alunos.

Ambas as formas de vida fundamentaram sua resolução na ideia de 'função afim'. Contudo, enquanto os alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental utilizaram a contagem e a adição para determinar o volume de água do aquário a partir da quantidade de peixes, os alunos do Ensino Superior realizaram um ajuste de curvas e/ou utilizaram equações diferenciais para descrever o resfriamento do café na garrafa térmica no decorrer do tempo.

Embora haja semelhanças entre os jogos de linguagem que se constituíram, há também dissemelhanças, que valem a pena serem sinalizadas, uma vez que elas contribuem para a diferenciação do significado, isto é, para sua caracterização e formação; bem como para que haja uma evolução nos modelos matemáticos produzidos pelos alunos ao longo de sua vida escolar. Espera-se que os alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, por exemplo, ao longo de sua jornada na escola, sejam capazes de evoluir seus modelos, sejam eles desenhos, gráficos, tabelas, equações, etc. deixando-os em acordo com as regras que normatizam a linguagem matemática convencional.

As semelhanças de família identificadas, portanto, apontam para usos empíricos e convencionados da linguagem matemática, para a transição de linguagem natural para a linguagem matemática e para a atribuição de significados aos conceitos matemáticos a partir da vivência com as atividades de modelagem matemática.

Referências

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA. K. P.; VERTUAN, R. E. **A modelagem matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

BEAN, D. O que é modelagem matemática? **Educação Matemática em Revista** (São Paulo), São Paulo, v. 8, n. 9/10, p. 49-57, 2001.

POLLAK, H. O. The Place of Mathematical Modelling in the System of Mathematics Education: Perspective and Prospect. In: STILLMAN, G.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.) **Mathematical Modelling in Education Research and Practice**: cultural, social and cognitive influences. New York: Springer, p. 265-276, 2015.

POLLAK, H. O. What is mathematical modeling? In: **Mathematical Modeling Handbook**. Bedfort: COMAP, 2012. Disponível em <www.comap.com>.

GRIGORAŞ, R. Mathematising through hypotheses and assumptions: a case study. **12th International Congress on Mathematical Education**, 08 July – 15 July, 2012, COEX, Seoul, Korea. 10 p. Disponível em: <http://icme12.org/upload/UpFile2/TSG/0658.pdf>. Acesso em: 02 mai 2016.

TORTOLA, E. **Configurações de modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2016. 304 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

VIDIGAL, C.; BEAN, D. Levantando Aspectos, Formulando Pressupostos e Matematizando em Modelagem Matemática. **ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**. v. 9, n. 2, p. 249-269, 2016.

PALHARINI, Bárbara N. **A Matemática em atividades de modelagem matemática**: uma perspectiva wittgensteiniana. 2017. 316p. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, UEL, Londrina, 2017.

BARBOSA, J. C. Uma perspectiva de Modelagem Matemática. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 2003, Piracicaba. Anais...Piracicaba: UNIMEP, 2003.

BASSANEZI, R. C. Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia. 2. ed. São Paulo: Contexto, 2004.

HEBECHE, L. “Não pense, veja!” Sobre a noção de “semelhanças de família” em Wittgenstein. **Veritas**, Porto Alegre, v. 48, n. 1, p. 31-58, mar. 2003.

WESSELS, H. Levels of mathematical creativity in model-eliciting activities. **Journal of Mathematical Modelling and Application**, Blumenau, v. 1, n. 9, p. 22-40, 2014.

WITTGENSTEIN, L. **Investigações Filosóficas**. 7. ed. Tradução de Marcos G. Montagnoli. Petrópolis: Editora Vozes; Bragança Paulista: Editora Universitária São Francisco, 2012. (Coleção Pensamento Humano). Tradução de: Philosophische Untersuchungen.