

ALGORITMO DA DIVISÃO DE EUCLIDES COMO FERRAMENTA PARA JUSTIFICAR A NÃO DIVISÃO POR ZERO EM MATEMÁTICA

Ana Paula Willms Capra¹

Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Pato Branco
anapaulawillms@hotmail.com

Lauren Isabely Cavali²

Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Pato Branco
lauren_lalicavali@hotmail.com

Moisés Aparecido do Nascimento

Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Pato Branco
mnascimento@utfpr.edu.br

Resumo:

Este artigo, no contexto do ensino fundamental, aborda alguns aspectos referentes ao motivo da não divisão por zero em matemática. Como ferramenta para tentar justificar essa afirmação utilizamos o algoritmo euclidiano. Os sujeitos da pesquisa são alunos do 9º ano do Colégio Estadual Castro Alves, localizado na cidade de Pato Branco/PR. O planejamento das atividades ocorreu em encontros semanais do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência - PIBID, na Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR. A aplicação do projeto na escola ocorreu entre novembro/2016 e abril/2017 onde, inicialmente, aplicou-se um questionário com o objetivo de verificar o conhecimento que os alunos já tinham sobre o conteúdo e, a partir dele, constatou-se a importância de revisar conceitos básicos já vistos em sala de aula sempre que possível, para que assim os alunos possam formar conjecturas, concluindo por si próprios que não existe a divisão por zero na matemática. Foi possível observar os problemas apontados no questionário inicial e a vaga compreensão dos conceitos de divisão.

Palavras-chave: Divisão por zero. Algoritmo Euclidiano. Material manipulável.

Introdução

Este trabalho, desenvolvido no projeto de pesquisa pedagógica do PIBID – Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência – do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnologia Federal do Paraná - UTFPR, câmpus Pato Branco/PR, busca investigar explicações matemáticas que justificam a não divisão por zero. Como uma ferramenta interessante para mostrar esse fato, escolhemos o algoritmo da divisão euclidiana.

As atividades desenvolvidas na escola, de cunho investigativo, buscavam promover discussões sobre os conceitos matemáticos envolvidos na justificativa da não divisão por zero

¹ Apoio CAPES

² Apoio CAPES

em matemática. O planejamento ocorreu durante os encontros semanais do PIBID na universidade e buscava preparar atividades e aulas diferenciadas, por meio de discussões, vídeo-aulas, exercícios instigantes na metodologia de resolução de problemas, para que os alunos pudessem construir suas próprias conjecturas, concluindo o porquê da não divisão por zero em matemática.

A aplicação do projeto foi realizada no Colégio Estadual Castro Alves, em Pato Branco/PR, no qual atuamos como bolsistas PIBID, com uma turma de 9º ano, no período de contra turno. Inicialmente, por meio de um questionário diagnóstico, foi possível verificar as dificuldades dos alunos com o conceito e o algoritmo da divisão, com a identificação dos elementos de uma divisão (dividendo, divisor, quociente e resto) e, sobre a divisão euclidiana, todos os alunos que responderam ao questionário afirmaram que não sabiam a respeito. Diante disso, durante oito encontros, foram trabalhados os conteúdos de divisão euclidiana, fenômenos periódicos, aritmética dos restos, múltiplos e divisores. Além disso, foi desenvolvido um material manipulável que auxiliasse os alunos na compreensão da divisão euclidiana e da não divisão por zero em matemática. Ao final do projeto, foi aplicado outro questionário a fim de verificar os resultados do projeto. Nesse questionário, os alunos escreveram suas conclusões e justificaram a não divisão por zero.

Um pouco sobre Euclides

A Matemática foi constituída por meio da contribuição de muitas culturas antigas, mas os matemáticos gregos foram os essenciais na criação do raciocínio lógico e da demonstração. Dentre os matemáticos gregos, temos um grande matemático chamado Euclides, o qual desenvolveu e constituiu a geometria plana e espacial que hoje conhecemos. Segundo Florian Cajori, Euclides nasceu por volta de 365 a.C, porém pouco se sabe sobre a vida dele, visto que alguns fatos são contados por Proclo no Sumário Eudemiano.

Ao fundar a primeira escola de Alexandria, Demétrio Falereu foi convidado a vir de Atenas para ocupar a chefia da biblioteca, e é bem provável que Euclides tenha sido convidado também a vir e abrir a escola de Matemática.

Pelos relatos de Proclo, Euclides era mais jovem que Platão e mais velho que Erastóstenes e Arquimedes. Foi sectário do platonismo e muito versado em suas doutrinas. Foi

distinguido por sua educação esmerada, delicadeza e disposição aqueles que poderiam promover avanço das ciências matemáticas.

Sua fama se deve principalmente ao seu livro de geometria, Os Elementos, escrito por volta de 330 a 320 a.C., o qual é visto como a melhor introdução às ciências matemáticas. Foi usado na Inglaterra como livro texto até o século XIX. Segundo Elza e Helena, este é uma coleção dos mais importantes resultados matemáticos gregos, organizado de forma sistemática e apresentado de maneira dedutiva formal, onde se abre com uma lista de definições e postulados e noções comuns, como a ideia de ponto, reta e plano.

Quando Ptolomeu certa vez lhe perguntou se a geometria poderia ser dominada por um processo mais fácil do que estudando Os Elementos, Euclides deu, de volta, a resposta: “Não existe nenhum caminho real para a geometria” (CAJORI, 2007, p. 62)

O texto usado comumente nas escolas foi traduzido e alterado por Teon, o qual ao ser avaliado sofreu por muitas avaliações que detectaram algumas falácias por parte de Euclides, isto é, algumas demonstrações foram usadas intuitivamente, embora nele contenha rigorosas demonstrações.

É certamente verdade que em termos de rigor pode ser comparado favoravelmente com seus rivais modernos; mas quando examinados exclusivamente sob luz da lógica matemática, foi considerado por Peirce, “crivado de falácias” (CAJORI, 2007, p. 63).

Os Elementos de Euclides contêm 13 livros, os primeiros quatro tratam da geometria plana, o quinto fala da teoria de proporções aplicadas a grandezas em geral, o sexto desenvolve a geometria de figuras semelhantes, o sétimo, oitavo e nono abordam a teoria dos números, ou a Aritmética, o décimo trata da teoria dos incomensuráveis, os últimos três livros são de estereometria. Dentre estes três últimos, o primeiro trata sobre os teoremas mais elementares, o segundo aborda sobre as relações métricas da pirâmide, do prisma, do cone e do cilindro, e o terceiro fala sobre polígonos regulares.

Os elementos são uma maciça realização, e seu estilo e conteúdo foram enormemente influentes não só para a matemática grega, mas também para a tradição matemática ocidental. O livro de Euclides foi considerado como modelo de raciocínio claro e preciso (GOMIDE E CASTRO, 2010, p.20).

Outro livro de Euclides é chamado *Data*, o qual é elencado como um curso de prática de análise. Segundo Cajori, parece ter sido escrito por aqueles que tendo completado *Os Elementos*, almejavam resolver novos problemas que lhes fossem propostos. No entanto ele não contribui muito para o acervo, pois a maioria do que se encontra nele, pode ser encontrado também nos *Os Elementos*.

Algoritmo de Euclides

Euclides, como já citado, famoso por sua obra *Os Elementos*, também determinou um algoritmo para a divisão de números naturais, apresentando outra maneira de representar um determinado número.

Como motivação do tema considere o seguinte exemplo: imagine que você tenha 478 bolinhas e deseje separá-las em grupos de 7. Agrupando de 7 em 7 é possível organizar essas bolinhas em 68 grupos de 7 bolinhas, totalizando $68 \times 7 = 476$, sobrando 2 bolinhas que não podem formar um novo grupo de 7. Podendo ser escrito então da seguinte maneira: $478 = 68 \times 7 + 2$, isto é, $\text{dividendo} = (\text{quociente}) \times (\text{divisor}) + (\text{resto})$.

Segundo a definição do livro “Programa de Iniciação Científica da OBMEP – encontros de aritmética”, na divisão de dois números naturais a por b , existe um quociente q e um resto r tal que podemos escrever o dividendo da seguinte forma: $a = b \cdot q + r$, onde a é o dividendo e b o divisor, sendo que $0 \leq r \leq b-1$. Assim, analisando o exemplo citado anteriormente, temos na igualdade $478 = 68 \times 7 + 2$ que $a = 478$, $b = 7$ e $r = 2$, sendo $0 \leq 2 \leq 7-1 = 6$. E assim, verificamos que a divisão de quaisquer números naturais pode ser escrita no algoritmo euclidiano.

Dessa forma, podemos propor a pergunta: Como explicar através do algoritmo de Euclides a não divisão por zero? O esperado é que os alunos percebam e concluam que ao dividirmos um número por zero, pelo algoritmo de Euclides, existe um quociente q e um resto r , e assim podemos escrever $a = 0 \cdot q + r$, o que implica que q é indeterminado, pois pode ser qualquer número natural e $a = r$, o que é um absurdo pois $a \geq b$ e $b \geq r$, logo $a \geq r$. Além disso, pode-se instigar o aluno à seguinte situação: uma pessoa tem determinada quantidade de objetos e não quer dividi-los com ninguém, é possível realizar essa divisão? Assim, o aluno pode verificar que essa divisão não é possível, ou seja, que não existe divisão por zero.

A importância dos materiais manipuláveis no ensino-aprendizagem

Sabemos que o ensino da matemática passa por constantes transformações decorrentes das modernizações que ocorrem no mundo e que alteram o perfil do aluno, dos professores e, conseqüentemente, da escola. Diante disso, é importante que os professores estejam em contínua reflexão sobre sua prática docente, buscando metodologias que estimulem os alunos a estudar matemática. De acordo com Kishimoto (1992) a atividade lúdica ganhou um valor na década de 60, com o surgimento de museus, com concepções dinâmicas, onde as crianças poderiam tocar e manipular brinquedos. No Brasil, desenvolveu-se a valorização do jogo na década de 80, com as brinquedotecas.

Uma das ferramentas lúdicas muito interessante para utilização em sala de aula é o material manipulável, pois pode auxiliar na compreensão e/ou fixação do conteúdo, além de instigar a criticidade, criatividade e coletividade dos alunos. Conforme afirma Camacho,

Desta forma, acredita-se que quanto maior for a atividade desenvolvida pelos próprios alunos, maior será o conhecimento atingido pelos mesmos, uma vez que estes procurarão continuamente novas estratégias para desenvolver as suas próprias capacidades e, conseqüentemente, através da experiência direta, construirão os conceitos de acordo com o objeto explorado e observado (CAMACHO, 2012, p. 37).

Além disso, podemos constatar alguns vestígios do surgimento do material manipulável pelos nossos antepassados na contagem das ovelhas, por exemplo, onde se utilizavam, escritas em ossos e madeiras, pedras, nós em cordas para marcar a quantidade do rebanho. Segundo Camacho (2012), através da contagem e manipulação de objetos, começou-se a criar regras, padrões e teorias.

Visto que algumas das funções que o material manipulável proporciona é a autonomia, criticidade e criatividade, o uso dele nas aulas, favorece a sensibilidade na construção de conhecimento e compreensão dos conteúdos. Além disso, outro aspecto que podemos elencar é a interação entre os alunos e a troca de ideias que levam à construção e apropriação conjunta de conceitos.

Materiais manipuláveis são materiais lúdicos, pedagogicamente estruturados para a aprendizagem dos diversos conteúdos matemáticos, uma vez que, através da sua utilização, estes propiciam uma melhor interação e socialização

entre os alunos, contribuindo para uma maior troca e partilha de ideias entre os mesmos (CAMACHO, 2012, p.38).

Desse modo, através dos materiais manipuláveis, os alunos têm a possibilidade de relacionar o conteúdo visto em sala com o seu cotidiano, além de formular novas estratégias, o que por consequência gera maior confiança em suas capacidades intelectuais, assim como, na tomada de decisões. Segundo Camacho,

A partir da observação, da procura, da reflexão, da comunicação e de um envolvimento ativo, estes alcançam o sentido de conquista e o prazer de fazer e de construir, organizando o seu pensamento e estruturando os seus próprios conceitos (CAMACHO, 2012, p.39).

Em vista disso, é possível observar, como resultado da utilização do material manipulável no ensino da matemática, a contribuição dessa ferramenta, pois possibilita a manipulação e investigação, individual ou coletiva, do conceito estudado por meio do material. Dessa forma, os alunos podem construir seu conhecimento, transformando o ambiente escolar em um estudo dinâmico, intuitivo e desafiante.

Contudo, para que estes resultados sejam alcançados, é necessário que o papel do professor seja bem desenvolvido, construindo um ambiente adequado ao aprendizado do aluno para o uso do material manipulável. É importante que o docente proporcione contextos de aprendizagem propícios à compreensão, isto inclui desde a escolha do material à reflexão sobre as relações a serem exploradas. Também é importante que o professor deixe claro ao aluno a razão pela escolha do material, como, por exemplo, se está sendo usado para estimular os alunos, para memorização ou construção. A utilização dessa ferramenta também não será única, ou seja, podemos utilizar um mesmo material para trabalhar conceitos diferentes, sendo assim, esse fato depende de como o professor enxerga o material escolhido, o conhecimento que ele tem de suas potencialidades e as relações que ele estabelece.

Com o uso do material manipulável, o professor torna-se mediador da turma, pois é função dele instigar e questionar os alunos a pensarem e desenvolverem suas ideias. A partir do material proposto, ideias podem ser partilhadas tanto com o professor quanto com os colegas.

Desta forma, o docente deverá promover e criar contextos de aprendizagem, onde os alunos possam interagir entre si, de maneira a comunicarem e a partilharem ideias, de forma rica e diversificada, proporcionando experiências significativas na sala de aula e estimulando os mesmos a expressar e a desenvolver os seus pensamentos (CAMACHO, 2012, p.41).

O objetivo de trabalhar com material manipulável vai muito além do que apenas um momento de descontração, ou de fixar a atenção dos alunos em um determinado material. Essa ferramenta envolve diversos aspectos que permitem o seu desenvolvimento pela aprendizagem, auxiliando para o entendimento do conteúdo de uma maneira visual e dinâmica. No entanto, como professor, é preciso tomar cuidado ressaltar a importância do material que está utilizando, e fazer com que o aluno perceba que não é apenas um momento diferente, mas que apresenta objetivos ao que está sendo estudado em sala de aula. Como nos afirma Araújo (2004, p.2, citado por Camacho, 2012, p.42): “o professor deve ter cuidado ao utilizar um material didático, pois deve observar que o objetivo não está no material em si, mas nas ações que são desenvolvidas através deles, ou seja, no modo que ele será explorado”.

Contudo, vale ressaltar que para que o trabalho com material manipulável traga resultados produtivos, o docente deve tomar de um tempo maior para a resolução das tarefas em sala de aula, pois é necessário que os alunos se apropriem do material, haja interação entre os grupos, investigação e construção do conhecimento.

Metodologia

Essa pesquisa classifica-se como qualitativa, pois apresenta um caráter investigatório e teórico bibliográfico, amparado pela observação direta em situações de aprendizagem. Além disso, a análise qualitativa dos dados se deu através das observações das pesquisadoras do projeto (bolsistas PIBID Matemática), sempre orientadas pelo professor orientador do projeto de pesquisa.

Inicialmente, o orientador desse projeto disponibilizou os materiais de apoio que foram utilizados para planejamento das atividades, sendo eles: Encontros de Aritmética OBMEP, Revista do Professor de Matemática e Banco de questões OBMEP 2015. Visto que o primeiro deles foi o material mais utilizado, e os demais foram importantes para complementação das atividades e outras dúvidas. Na primeira semana, fizemos a leitura do material e discussões com o orientador, após isso, durante os meses de setembro e outubro, houve planejamento das atividades, o qual foi escrito no formato de planos de aula a fim de melhor organizar essa pesquisa.

A aplicação do projeto na escola iniciou no dia 09 de novembro, com a aplicação de um questionário diagnóstico que tinha por objetivo verificar o conhecimento prévio dos alunos sobre o algoritmo de Euclides, inverso multiplicativo, oposto aditivo e os elementos da divisão. Depois disso, foi entregue alguns exercícios de divisão para resolução e apresentação no quadro, aproveitando o momento para explicar sobre como é possível representar uma divisão, sem ainda falar sobre o algoritmo de Euclides. Durante as atividades, os alunos se mostraram curiosos em saber o porquê estavam realizando divisões simples, sendo que esse conteúdo eles aprenderam no Ensino Fundamental I, sendo, na verdade, esse o objetivo da atividade: instigar os alunos, despertando assim a curiosidade deles ao conteúdo que seria estudado.

Através da correção dos questionários percebemos que os alunos não conheciam o algoritmo de Euclides e não recordavam sobre inverso multiplicativo e oposto aditivo, sendo que houve também certa confusão em relação aos conceitos de quociente, divisor, dividendo e resto.

Nos dias 23 e 30 de novembro foram trabalhadas questões da OBMEP por meio de resolução de problemas. Durante a exposição dos resultados no quadro, gravamos um vídeo da explicação de um dos alunos, disponibilizado no blog do PIBID da escola, disponível em <http://pibidmatematicacastroalves.blogspot.com.br/>. Para finalizar o encontro, instigamos os alunos a pensarem o porquê em uma divisão não podemos ter o divisor igual a zero, deixando assim a pergunta em discussão, sem a formalização.

No encontro do dia 23 de março de 2017, foram revisados e trabalhados conceitos sobre múltiplos e divisores, conteúdo em que os alunos não apresentaram tantas dificuldades. Ao final do encontro, foi proposto um desafio onde eles deveriam responder, tentando formalizar um argumento utilizando o conteúdo visto durante o encontro. A pergunta era: “O 0 é múltiplo de algum número? E divisor?”. Os alunos pensaram e discutiram por alguns minutos, após isso, discutimos por mais alguns momentos no quadro e percebeu-se a empolgação e a discussão gerada em torno da pergunta. Depois dessa discussão, foi possível formalizar o argumento necessário à pergunta sobre 0 ser divisor de algum número através do algoritmo de Euclides, levando o aluno a pensar sobre o porquê não existe essa divisão. Foi possível notar a motivação e curiosidade deles em relação ao desafio, e a relação que conseguiram estabelecer entre o algoritmo para explicar esse fato. A explicação para a primeira pergunta foi que 0 pode ser múltiplo de qualquer número, pois qualquer número multiplicado por 0 é zero, já a explicação para a segunda pergunta foi a seguinte: se fosse possível a divisão por zero, então com certeza pelo algoritmo de Euclides teríamos um quociente e um resto, ou seja, o dividendo pode ser

escrito na forma $a = b.q + r$, onde na divisão por zero teríamos $a = 0.q + r$, implicando que $a = r$, o que é um absurdo, pois isto nos afirma que o dividendo é igual ao resto.

No dia 30 de março, o encontro iniciou com uma atividade já conhecida dos alunos, o crivo de Eratóstenes, com o objetivo de revisar os números primos, e depois foram lembrados e formalizados alguns conceitos no quadro. Além disso, foram propostos a fatoração de alguns números. O desafio do dia era: “O 0 pode ser fatorado?”. Novamente a pergunta gerou muitas discussões, o que proporcionou maior curiosidade por parte dos alunos.

No encontro do dia 6 de abril, foram trabalhados os critérios de divisibilidade. Como metodologia, foi utilizada a resolução de problemas com exercícios da OBMEP presentes no livro Encontros de aritmética.

No último encontro do projeto, realizado no dia 20 de abril, foi realizada uma pequena revisão de conceitos vistos até aquele momento. Logo após, aplicamos uma atividade por meio do material manipulável criado pelas autoras, o qual objetivava fixar o algoritmo de Euclides e levar o aluno a concluir a não divisão por zero. Após entregar as cartas do material aos alunos e lembrar o cálculo da área de um retângulo, foi dado o primeiro desafio: calcular $15:4$ e verificar se 15 é divisível por 4 no conjunto dos números inteiros. Dessa forma, o aluno deveria construir uma figura que representasse um retângulo de lado 4, tal que as cartas estivessem dispostas de 4 em 4, ao final teríamos como saber o outro lado do retângulo e se foi possível construir este retângulo sem sobrar cartas, como ilustrado na figura abaixo:

Figura 1: Cálculo da divisão $15/4$ utilizando o material manipulável:



Fonte das autoras.

Desse modo, com 15 cartas, organizadas de 4 em 4, os alunos verificaram que não é possível formar uma figura que represente um retângulo sem sobrar cartas, logo não é possível dividir 15 por 4 no conjunto dos números inteiros, pois não existe um número inteiro cujo produto entre ele e 4 seja 15. Além disso, explorando o material, podemos escrever essa divisão no algoritmo euclidiano tal que $15 = 4 \times 3 + 3$, onde as colunas e as linhas do retângulo formado

são os divisores inteiros de 15 (4 e 3) e as cartas que sobraram representam o resto da divisão ($r=3$).

Depois disso, mais exemplos de divisão foram feitos pelos alunos: $24/3$, $15/2$, entre outros. Na divisão $24/3$, os alunos construíram uma figura de lados 8 e 3, sem sobrar cartas, e assim concluíram que como $24 = 8 \times 3 + 0$, então 24 é divisível por 3. E finalmente, o desafio era: “é possível construir um retângulo de lado 0?”. Os alunos discutiram muito e concluíram que isso era impossível, pois nunca conseguiríamos construir um retângulo cujo lado é 0, pois sempre teremos uma fileira ou coluna de cartas, um dos lados representando uma medida. Ao final, os alunos responderam à um questionário que objetivava comparar com o questionário inicial, verificando os resultados do projeto.

As figuras abaixo ilustram as cartas do material manipulável criado e uma aluna utilizando-o:

Figura 2: Cartas do material manipulável



Fonte das autoras.

Figura 3: Aluna do 9º ano utilizando o material manipulável para verificar a divisão $23/3$.



Fonte: acervo das autoras.

Considerações Finais

Durante o ensino de matemática na sala de aula, muitas vezes nos deparamos com situações-problemas que envolvem divisão ou mesmo com o ensino desse conceito, e assim surge uma instigante questão: como explicar para o aluno que não podemos dividir um número por zero, ou que o denominador de uma fração tem que ser diferente de zero? Na busca por uma explicação que poderia ser utilizada em sala de aula, foi possível verificar a utilidade do algoritmo euclidiano, no ensino de matemática, como ferramenta que auxilie o professor nessa justificativa.

Além disso, verificou-se a importância de relembrar e trabalhar conteúdos já vistos pelos alunos, por meio de projetos no contra turno, trabalhando de maneira mais aprofundada, e ainda incentivando a construção do conhecimento de forma coletiva com os alunos e a formulação de suas próprias conclusões.

Visto que, a criação e utilização do material manipulável foi algo fundamental para o desenvolvimento da pesquisa, pois através da manipulação, o aluno pôde experimentar o cálculo de divisões em um contexto diferente, relacionando com o cálculo de área e construção de figuras. Além do que, tentou-se de diversas maneiras, formar figuras retangulares que pudessem ter um lado igual a zero, o que não foi possível. E assim, o material manipulável utilizado foi imprescindível para a conclusão do objetivo da pesquisa, onde os alunos concluíram por si próprios que não existe divisão por zero.

Portanto, por meio do estudo teórico e do material manipulável, essa pesquisa trouxe resultados positivos para o ensino da matemática, pois sugere uma justificativa que pode ser abordada na sala de aula, de forma coletiva e construtiva, para fundamentar a não divisão por zero na matemática.

Referências

ASSIS, Cleber. BARBOSA, Régis. FEITOSA Samuel. MIRANDA, Tiago. OBMEP – **Banco de Questões 2015**. Rio de Janeiro. IMPA, 2015. 174 p.

CAJORI, Florian. **Uma história da Matemática**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2007.

CAMACHO, Mariana Sofia F. P. **Materiais Manipuláveis no Processo Ensino/Aprendizagem da Matemática Aprender explorando e construindo**. Dissertação de mestrado. Portugal. Junho, 2012.

DUTENHEFNER, Francisco. CADAR, Luciana. **Encontros de Aritmética**. Rio de Janeiro. IMPA, 2015. 121 p.

GOMIDE, Elza F. e CASTRO, Helena. **A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas**. São Paulo: Blucher, 2ª ed. 2010.

Revista do Professor de Matemática, Vol. 2. SBM, 2015