# EXPANDINDO LIMITES COM MATEMÁGICAS E OUTROS DESAFIOS LÓGICOS

Keith Gabriella Flenik Morais
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Campus Curitiba
keithgabriella@hotmail.com

Rogério Otávio Mainardes da Silva
Universidade Federal do Paraná – Campus Curitiba
r.otavioms@gmail.com

**Resumo**:
Em geral, questões e desafios lógicos matemáticos são utilizados para trabalhar a velocidade do raciocínio e desenvolver a capacidade do pensamento lógico e analítico. Esta pesquisa, realizada por meio de pesquisas bibliográficas, busca atingir os estudantes desinteressados ou desestimulados. Por meio da metodologia de Jogos Matemáticos e Investigação Matemática, almeja-se além de reintegrar alunos desinteressados à disciplina, é também chamar atenção para estes tipos de ferramenta no ensino. A pesquisa se dará por apresentações e explicações de alguns truques de "mágica" na matemática, que chamaremos de "matemágicas", e de exercícios lógicos. Além disso, podem-se levantar as seguintes discussões: quais conteúdos matemáticos escolares estão envolvidos? Como despertar as percepções e intuições matemáticas nos estudantes dos Ensinos Fundamental e Médio? Serão abordadas as seguintes atividades: "Um número subtraído por ele escrito de trás para frente é múltiplo de nove", "Pensamentos em Sintonia", "Fibonacci", "Mágica dos Ases", "Questões de Lógica Comparativa", "Ordenação de Fatos Temporais", "O Roubo do Supermercado" e uma Questão da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Deste modo, deseja-se que os leitores desenvolvam interesse por essas dinâmicas e as reproduzam de maneira semelhante, proporcionando o desenvolvimento de competências de seus alunos.
**Palavras-chave**: Truques de Matemática. Desafios lógicos. Investigação Matemática. Jogos Matemáticos.

## Introdução

O ensino da matemática, por vezes, pode se tornar algo repetitivo e fugir da atenção de muitos estudantes. Diante disso, a busca por meios de incentivar alunos a iniciar ou mesmo permanecer no campo da lógica matemática faz-se de extrema necessidade. A utilização de jogos educativos é um possível meio, pois estes promovem a construção do conhecimento através de atividades lúdicas e estimulantes. Este trabalho baseia-se em pesquisas bibliográficas conforme as definições de Marconi e Lakatos (2013) e a abordagem metodológica de ensino fundamenta-se nas concepções de Ponte (2013) de Investigação Matemática e Muniz (2010) de Jogos Matemáticos.

> Ao observarmos o comportamento de uma criança em situações de brincadeira e/ou jogo, percebe-se o quanto ela desenvolve sua capacidade de fazer perguntas, buscar diferentes soluções, repensar situações, avaliar suas atitudes, encontrar e

> reestruturar novas relações, ou seja, resolver problemas (GRANDO, 2000. p.19).

Por isso, a proposta deste minicurso é a apresentação e a discussão de algumas atividades que englobam desafios de lógica e truques matemáticos "que consistem, basicamente, em adivinhações e predições aritméticas, todos fundamentados em propriedades aritméticas elementares" (Sampaio, 2008, p.11), visando estimular a criatividade e o raciocínio matemático.

## Abordagem Metodológica

Cada atividade descrita neste trabalho pode ser apresentada ao leitor da seguinte forma: exibição, interação, resolução e explicação. A exibição e a interação da atividade ou truque matemático (Sampaio, 2008) podem ser aplicadas pela metodologia de Jogos Matemáticos pelas concepções de Muniz (2010), como um instrumento facilitador no processo de aprendizagem. Os jogos possuem base simbólica, regras, jogadores, situações-problemas, mas não são competitivos como Muniz (2010, p. 42) propõe.

> (...) o jogo pode representar uma simulação matemática na medida em que se caracteriza por ser uma situação irreal, criada pelo professor ou pelo aluno, para significar um conceito matemático a ser compreendido pelo aluno. Os elementos do jogo representam entes concretos, mas a situação de jogo, vivenciada pelo aluno e que o leva à ação, é baseada numa situação irreal e metafórica, criada pelo homem. É neste sentido que o jogo apresenta um caráter alegórico. Assim, (...) pode-se dizer que o jogo, determinado por suas regras, poderia estabelecer um caminho natural que vai da imaginação à abstração de um conceito matemático (GRANDO, 2000, p.21).

A resolução e a explicação podem acontecer pela metodologia de investigação matemática, pois o processo é dado por etapas conforme Ponte (2013): (i) apresentação da atividade pelo apresentador; (ii) momento de reflexão e exercício individual ou em grupo para desvendar as propriedades e fundamentos matemáticos das atividades e, por fim, (iii) após o fim da dinâmica, uma reflexão sobre a sua relevância e a possibilidade de se abordá-la em sala de aula.

## Descrição das atividades

Cada atividade listada abaixo terá um processo de apresentação em comum: (I) a exibição ao público alvo, conforme a especificação da própria atividade; (II) a interação, que aconteceria entre o próprio público, isto é, os estudantes interagiam e aplicariam juntos, uns com os outros; (III) em seguida, buscariam a resolução do problema dado: "Por que esta é a resposta?" a fim de entenderem a proposta e, por fim, (IV) receberiam a explicação pelo apresentador.

**Atividade 1: "Um número subtraído por ele escrito de trás para frente é múltiplo de nove" (GOMES, 2014)**

Conteúdo: Aritmética, valor posicional na base 10, multiplicidade.

Dados alguns exemplos, os participantes devem perceber que um número subtraído por ele escrito de trás para frente será sempre um múltiplo de nove e o objetivo então será investigar o porquê isto acontece.

*Tomemos* $x=a_na_{n-1}...a_1a_0$ *e* $y=a_0a_{-1}...a_{n-1}a_n$ *onde* $a_i$ *é um algarismo de 0 a 9, i é um natural entre 0 e n. Podemos reescrever x e y na base 10 da seguinte forma:*

$$x = a_n10^n + a_{n-1}10^{n-1} + ... + a_110^1 + a_010^0$$

$$y = a_010^n + a_110^{n-1} + ... + a_{n-1}10^1 + a_n10^0$$

*e provamos que* $9|\ (x - y)$. *Calcule* $x - y$:

$$(a_n10^n + a_{n-1}10^{n-1} + ... + a_110^1 + a_010^0) - (a_010^n + a_110^{n-1} + ... + a_{n-1}10^1 + a_n10^0)$$

$$= a_n10^n - a_n10^0 + a_{n-1}10^{n-1} - a_{-n-1}10^1 + ... + a_110^1 - a_110^{n-1} + a_010^0 - a_010^n$$

*Deixando em evidência os termos da forma* $a_i$, *temos:*

$$= a_n(10^n - 10^0) + a_{n-1}(10^{n-1} - 10^1) + ... + a_1[-(10^{n-1} - 10^1)] + a_0[-(10^n-10^0)]$$

*Agora, é possível observar que cada termo multiplicado por* $a_{i-}$ *é da forma* $10^m - 10^k = 10^k(10^{m-k} - 1)$. *Basta provar então, que para todo natural l,* $10^l - 1$ *é um múltiplo de 9. Para isso, vamos provar por indução em l:*

*Para* $l = 0$, $10^l - 1 = 10^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 9.0$.

*Vamos supor, como hipótese de indução, que a propriedade é válida para um natural k, ou seja,* $10^k - 1 = 9q$, *q natural e mostremos que é válido para* $k + 1$:

$$10^{k+1} - 1 = 10^k.10 - 1 = (9 + 1).10^k - 1 = 9.10^k + 10^k - 1.$$

*Pela hipótese de indução,* $10^k - 1 = 9.q$. *Substituindo na equação anterior, obtemos:*

$$9.10^k + 10^k - 1 = 9.10^k - 9.q = 9(10^k + q),$$

*um múltiplo de 9. Ou seja, para todo natural l,* $9|\ (10^l - 1)$.

**Atividade 2: "Pensamentos em sintonia" (Sampaio, 2008)**

Conteúdos: Aritmética, valor posicional na base 10.

O ministrante convida duas pessoas. Para a pessoa A ele pede que ela pense em um número de 1 a 100 e que não conte a ninguém este número, nem ao próprio. Em seguida, pede a pessoa B que conte apenas a ele um número de 1 a 9.

Dado isso, o ministrante pede para que a pessoa A multiplique seu número por 5, em seguida some 5 ao resultado, depois multiplique-o por 2 e por fim, subtraia um número especial do mágico. Após as operações, o ministrante pede para que a pessoa A diga o resultado final e, baseado nesse resultado, imediatamente são ditos os números escolhidos pelas pessoas A e B.

Peculiaridade: O número especial é o número $10 - b$, onde $b$ é o número escolhido pela pessoa B.

Sejam $a_1a_2a_3 = a_1100 + a_210 + a_3$ o número escolhido pela pessoa A, onde $a_i$ é um algarismo natural de 0 a 9, e $b$ o número natural de 1 a 9 escolhido pela pessoa B.

1º) Multiplica por 5: $5(a_1100 + a_210 + a_3) = a_1500 + a_250 + a_35$.

2º) Somando 5: $a_1500 + a_250 + a_35 + 5$.

3º) Multiplicando por 2: $2(a_1500 + a_250 + a_35 + 5) = a_11000 + a_2100 + a_310 + 10$

4º) Subtraindo o número especial: $(a_11000 + a_2100 + a_310 + 10) - (10 - b)$

Obtemos então $a_11000 + a_2100 + a_310 + b = a_1a_2a_3b$. O último algarismo do resultado é o número da pessoa B e os primeiros algarismos são do número escolhido pela pessoa A.

**Atividade 3: “Fibonacci” (SAMPAIO, 2008)**

Conteúdo: Aritmética, multiplicação por 11.

Enquanto o ministrante fica de costas para o quadro, um voluntário escreve na lousa dois números de 1 a 9, um consecutivo ao outro. Em seguida, pede-se que some os dois e coloque o resultado em sequência. Este processo, de soma dos dois últimos termos da sequência, repete-se sucessivamente até obter dez termos no quadro da seguinte forma:

$$(a, b, a+b, a+2b, 2a+3b, 3a+5b, 5a+8b, 8a+13b, 13a+21b, 21a+34b)\ (*)$$

Então o ministrante vira-se e quase de imediato diz o valor da soma de todos os termos, resultado que decorre do seguinte fato:

Somando todos os termos de (*) obtemos $55a+88b = 11(5a+8b)$, ou seja, 11 vezes o sétimo termo da sequência, cálculo que é realizado pelo ministrante.

**Atividade 4: Mágica dos ases**

Conteúdo: Progressão aritmética.

São feitas 4 colunas com 5 cartas cada uma, cada coluna contém um Ás do baralho. Então as cartas são juntadas e “embaralhadas” pelo mágico e redistribuídas em 5 colunas de 4 cartas cada uma. Os 4 Ases se encontram enfileirados e apenas uma das colunas.

Sejam $a_1$, $a_2$, $a_3$- e $a_4$ os Áses e " / " as outras cartas. Organizando em 4 colunas de 5 cartas:

$a_1$ $a_2$ $a_3$ $a_4$

/ / / / , organizando em fileira, obtemos: $a_1$//// $a_2$-//// $a_3$//// $a_4$////

[...]

Passando, por exemplo, 7 cartas de frente para trás, obteremos: //$a_4$//// $a_1$//// $a_2$-//// $a_3$//(*)

É possível passar *x* cartas (*x* natural, $1 \leq x \leq 20$) tanto de trás para frente quanto de frente para trás, desde que elas sejam apenas contadas e passadas, sem que sejam colocadas no meio ou misturadas.

Este processo de "embaralhamento" pode ser feito quantas vezes julgar necessário, desde que seja mantida a distância de 4 cartas entre um Ás e outro.

Então, o "mágico" segura o baralho com as cartas viradas para baixo e as distribui em 5 colunas de 4 cartas da seguinte maneira:

1ª 2ª 3ª 4ª 5ª

6ª 7ª 8ª 9ª 10ª

[...]

Sendo assim, utilizando do exemplo em (*), obtemos:

/ / $a_4$ / /

/ / $a_1$ / /

[...]

Como os Áses sempre mantêm a mesma distância de 4 cartas entre si, quando as cartas–ficam organizadas desta maneira, ao virá-las para cima elas acabam se enfileirando em apenas uma coluna.

**Atividade 5: Questões de lógica comparativa (ALMEIDA, 2015)**

Conteúdo: Lógica comparativa, grandezas e medidas.

Esta atividade promove a reflexão a respeito das grandezas como medidas de comprimento, peso, velocidade, entre outros, por meio de perguntas simples de exclusão até às absurdas. Assim, algumas questões podem ser propostas:

- O que vale mais: uma nota de R$10,00 ou cinco moedas de R$1,00? Uma nota de R$5,00 ou cinco notas de R$1,00? R$1.000.000,00 em barras de ouro ou R$1.000.000,00 em dinheiro? Um carro de brinquedo ou um carro de verdade? Comprar chicletes ou comprar um doce?

- O que é que pesa mais: um elefante ou um boi? Um lápis de madeira ou um lápis de ferro do mesmo tamanho? Uma pena ou um lápis?
- O que é maior: um carro ou um trem? Uma mesa ou uma cadeira?
- O que é que fica mais cheio: um copo cheio de água ou um copo cheio de refrigerante? Um copo cheio de água ou uma água cheia de copos?
- O que é mais rápido: um coelho ou uma tartaruga? Um avião ou um pássaro?
- O que é que mais perigoso: mexer na tomada de luz ou mexer nas coisas de escola? Ficar preso na jaula de um leão ou um leão ficar preso na sua jaula?
- Um lavrador semeou na terra a palavra "verdura". Nasceram verduras ou nasceram palavras?
- João tem 1 real em moedas de 1 centavo. Pedro tem 1 centavo em moedas de 1 real. Quem tem mais moedas?

**Atividade 6: Ordenação de fatos temporais (ALMEIDA, 2015)**

Conteúdo: Ordenação, lógica temporal.

São dados os acontecimentos de forma desordenada e pede-se para que os jogadores os organizem de forma mais rápida e lógica possível, tais como:

1. Levantar da cama, escovar os dentes, acordar, vestir a roupa.
2. Almoço, café da manhã, outro lanche, jantar, lanche.
3. Entrar na sala de aula, sair de casa, encontrar os amigos à porta da escola, passar pela padaria.
4. Jogar bola, ir embora, entrar em campo, vestir uniforme.
5. Sentar-se à mesa, pegar a comida, comer, escovar os dentes.
6. Separar os dados, ler, resolver o problema, confirmar a resposta, dar a resposta.
7. Descascar a fruta, chupar a fruta, apanhar a fruta do pé, subir no pé de fruta.
8. Assistir aula, estudar, chegar em casa, ir para a escola, acordar.
9. Comprar uma lembrança, ir à loja, ganhar o dinheiro, entregar a lembrança à mamãe.

**Atividade 7: O roubo do supermercado (ALMEIDA, 2015)**

Conteúdo: Lógica condicional.

Num fim de semana, ao final de expediente, um supermercado foi assaltado por um jovem que levou todo o dinheiro do caixa. A polícia foi chamada e, após ouvir várias testemunhas, chamou três suspeitos para depor logo na segunda-feira. Ao interrogar os suspeitos, todos apresentaram um álibi:

1. O primeiro suspeito afirmou que no horário do assalto estava no Shopping fazendo compras.
2. O segundo suspeito afirmou que estava em casa sozinho quando o carteiro lhe entregou uma carta de cobrança de uma loja.
3. O terceiro suspeito afirmou que na hora do assalto, de fato, estava nas imediações do supermercado, mas que estava voltando do treino de futebol.

Após o depoimento dos suspeitos a polícia mandou prender o verdadeiro culpado. Quem foi o culpado e o que levou a polícia a incriminá-lo?

**Atividade 8: Questão da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP, 2016)**

Conteúdo: Lógica condicional.

Esta questão foi proposta para o Nível 1 da OBMEP em 2016 e trabalha com lógica condicional.

Em uma brincadeira, a mãe de João e Maria combinou que cada um deles daria uma única resposta correta a três perguntas que ela faria.
Ela perguntou:
– Que dia da semana é hoje?
– Hoje é quinta, disse João.
– É sexta, respondeu Maria.
Depois perguntou:
– Que dia da semana será amanhã?
– Segunda, falou João.
– Amanhã será domingo, disse Maria.
Finalmente ela perguntou:
– Que dia da semana foi ontem?
– Terça, respondeu João.
– Quarta, disse Maria.
Em que dia da semana a brincadeira aconteceu?

## Considerações finais

O intuito do trabalho é motivar os leitores a explorarem a matemática com seus alunos, apresentando uma visão mais carismática e de modo menos conteudista, tentando sempre trazer uma melhor divulgação desta ciência. Além disso, as atividades propostas têm o objetivo de desenvolver a capacidade de solucionar problemas e trabalhar com possibilidades, gerando reflexão em quem está resolvendo-os.

Salienta-se a importância de haver um registro das construções e conclusões adquiridas pelos estudantes e dos leitores após a aplicação das atividades, pois estes ficariam inutilizados sem um objetivo tendo apenas o caráter incentivador, assim como Grando (2000) enfatiza:

> A grande maioria ainda vem desenvolvendo as atividades com jogos espontaneamente, isto é, com um fim em si mesmo, "o jogo pelo jogo", ou imaginando privilegiar o caráter apenas motivacional. Nota-se certa ausência de preocupação em se estabelecer algum tipo de reflexão, registro, pré-formalização ou sistematização das estruturas matemáticas subjacentes à ação no jogo (análise). Desta forma, não se estabelece um resgate das ações desencadeadas no jogo, ou seja, um processo de "leitura", construção e elaboração de estratégias e "tradução", explicitação numa linguagem. Trata-se apenas de compreensão e cumprimento das regras, com elaboração informal e espontânea de estratégias, e sem muita contribuição para o processo ensino-aprendizagem da Matemática. (GRANDO, 2000. p. 5)

Portanto, este trabalho propõe sugerir ferramentas e dar aos professores em formação e aos profissionais, uma maneira diferente deles se aproximarem de seus alunos para sanar suas dificuldades e mantê-los ativos no estudo da matemática.

**Referências**

GOMES, Walter Helvécio. **Oficina da Matemática: Conserta, Acerta, Soluciona - Cálculos e Problemas.** Sabará: Gráfica e Editora Mafali Ltda, 2014.

GRANDO, Regina Célia. **O Conhecimento Matemático E O Uso De Jogos Na Sala De Aula.** 2000. 239 f. Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas.

MARCONI, M. A; LAKATOS, E. M. **Técnicas de Pesquisa: planejamento e execução de pesquisas, amostragens e técnicas de pesquisa, elaboração, análise e interpretação de dados.** 7. ed. 7. reimpr. São Paulo: Atlas, 2013.

MUNIZ, C. A. **Brincar e jogar: enlaces teóricos e metodológicos no campo da educação matemática.** Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.

PONTE, J. P; BROCARDO, J; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula.** 3.ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013.

SAMPAIO, J. C. V; MALAGUTTI, P. L. A. **Mágicas, Matemática e Outros Mistérios.** São Carlos: EdUFSCar, 2008.

OBMEP. **12ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas: Nível 1 - 6ºe 7º**

**anos do Ensino Fundamental - 1ª Fase.** [s.l][1]: 2016. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas_static/pf1n1-2016.pdf> Acesso em 13 mai. 2017.

[1] sem local específico, pois é aplicada em escala nacional.