MODELAGEM MATEMÁTICA E CONHECIMENTO MATEMÁTICO: UMA ANÁLISE DE MISCONCEPÇÕES

Thiago Fernando Mendes
Universidade Estadual de Londrina
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Cornélio Procópio
thiagofmendes@utfpr.edu.br

Bárbara Nivalda Palharini Alvim Sousa
Universidade Estadual do Norte do Paraná – Cornélio Procópio
barbara.palharini@uenp.edu.br

Lourdes Maria Werle de Almeida
Universidade Estadual de Londrina
lourdes@uel.br

Resumo:
Neste artigo, temos por objetivo investigar o que evidenciam as atividades de modelagem matemática em relação ao conhecimento matemático dos estudantes, mais especificamente em relação às misconcepções apresentadas pelos mesmos sobre diferentes conhecimentos matemáticos. Dados foram coletados na disciplina de Introdução à Modelagem Matemática em uma Universidade Pública do Norte do Paraná com onze alunos regularmente matriculados no quarto ano de um curso de Licenciatura em Matemática. O conjunto de dados advém de registros escritos dos alunos e gravações em áudio e vídeo dos mesmos durante o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Por meio de uma análise qualitativa e interpretativa a pesquisa mostra que atividades de modelagem matemática podem ser úteis para que os alunos mobilizem misconcepções em relação aos conceitos matemáticos utilizados nas atividades, e se configuram como possibilidades para o trabalho de sistematização de conceitos matemáticos por parte dos professores.
Palavras-chave: Educação Matemática, Modelagem Matemática, Misconcepções, Conhecimento Matemático.

Introdução

O grande número de repetências e evasões nos diferentes cursos universitários mostra que é necessária uma discussão a respeito das causas das dificuldades apresentadas pelos estudantes destes cursos e buscar estratégias para superá-las.

Com relação a isso, Lachini (2001) comenta que:

> A análise de provas e de exercícios resolvidos mostra um déficit linguístico por parte do aluno que chega à universidade; mal alfabetizados em matemática, muitos alunos têm dificuldade em perguntar, apresentar dúvidas ou defender soluções encontradas. Tal déficit, por certo, pode explicar a ausência de diálogo [...] entre professores e alunos (LACHINI, 2001, p. 171).

Assim, a análise das concepções equivocadas apresentadas pelos estudantes, empregada com o objetivo de explorar as dificuldades e aproveitá-las para um questionamento mais aprofundado dos problemas dos alunos, pode ser uma das vias para o estabelecimento desse debate. A essas concepções equivocadas dá-se o nome de misconcepções.

Além disso, identificar as misconcepções e explorá-las pode possibilitar novas descobertas sobre as dificuldades dos estudantes. As causas de erros em um determinado conteúdo estão relacionadas, principalmente, com as dificuldades nos conceitos básicos para a aprendizagem do mesmo (CURY, 1990).

Esta pesquisa tem como objetivo investigar o que evidenciam as atividades de modelagem matemática em relação ao conhecimento matemático dos estudantes, mais especificamente em relação às misconcepções apresentadas pelos mesmos sobre diferentes conhecimentos matemáticos. Neste caso, os sujeitos de pesquisa são estudantes matriculados no quarto ano do curso de Licenciatura em Matemática na disciplina de Introdução à Modelagem Matemática.

Sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática

A perspectiva da Modelagem Matemática na Educação Matemática data de mais de trinta anos e contempla diferentes propósitos. Em diferentes níveis de escolaridade a pesquisa em Modelagem Matemática tem se tornado proeminente no âmbito nacional. Desde a década de 1990 documentos oficiais direcionam o uso de alternativas pedagógicas para o ensino de Matemática de modo que os estudantes possam desenvolver habilidades e competências associadas à resolução de problemas do dia a dia por meio de conceitos matemáticos (BRASIL, 1997; PARANÁ, 2008).

Pesquisas com ênfase na formação de professores, seja ela inicial ou continuada, buscam investigar como professores em formação entram em contato com a Modelagem Matemática, aprendem a fazer modelagem matemática e aprendem a ministrar aulas por meio do uso de atividades de modelagem matemática. Para Almeida, Silva e Vertuan (2012), o conhecimento sobre Modelagem Matemática é construído a partir do momento que o sujeito, lê sobre Modelagem Matemática, vivencia atividades de modelagem matemática como alunos e desenvolve atividades de modelagem matemática como professores.

De modo geral, entendemos a Modelagem Matemática na Educação Matemática na perspectiva destes autores, que a consideram uma alternativa pedagógica para o ensino de

Matemática por meio de situações não essencialmente matemáticas. Neste contexto, uma atividade de modelagem matemática parte de uma situação inicial, que envolve uma problemática, para uma situação final, em que respondemos a problemática declarada na situação inicial. Da situação inicial à situação final os alunos se envolvem com diferentes procedimentos:

> [...] a busca de informações, a identificação e seleção de variáveis, a elaboração de hipóteses, a simplificação, a obtenção de uma representação matemática (modelo matemático), a resolução do problema por meio de procedimentos adequados e a análise da solução que implica numa validação, identificando a sua aceitabilidade ou não (ALMEIDA; FERRUZZI , 2009, p. 121).

Estes procedimentos são mobilizados quando os sujeitos se inteiram da situação inicial, formulam uma situação-problema, utilizam a matematização para traduzir as informações da linguagem natural para a linguagem matemática, resolvem a situação-problema por meio de artifícios matemáticos (nesse momento faz-se o uso de modelos matemáticos), interpretam e validam os resultados matemáticos com vistas à situação-problema inicial (ALMEIDA, SILVA, VERTUAN, 2012).

Quando envolvidos com tais procedimentos os sujeitos mobilizam conhecimentos matemáticos já apreendidos ou em construção, os quais podem estar para eles sólidos ou não. Entendemos que no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática os alunos podem explicitar entendimentos, equivocados ou não, dos conceitos matemáticos, visto que, como sinaliza Pollak (1979, p. 240, tradução nossa) "experiências com modelagem são muito valiosas para os alunos, pois, além de seu valor pedagógico, se constituem como uma antecipação precisa de aplicações matemáticas no mundo real".

Como sinalizado, no âmbito da sala de aula, professores de Matemática são incentivados a utilizar a alternativa pedagógica da Modelagem Matemática para o ensino de Matemática. A Galbraith (2012) denomina este uso da modelagem matemática como *veículo* para o ensino de conceitos matemáticos. No contexto da modelagem matemática como veículo, alguns usos de atividades de modelagem matemática são corriqueiros e emergem em diferentes pesquisas: o uso de problemas contextualizados para motivar o estudo de conceitos matemáticos; o uso de situações-problema reais para o incentivo de processos de abstração; a modelagem emergente – cujo foco está na emergência de modelos matemáticos a partir de situações reais e complexas; a modelagem como ajuste de curvas; o recurso aos problemas de palavras.

De modo geral cada uma dessas versões para modelagem matemática como veículo, tem sua aplicabilidade e perigos envolvidos, os quais irão depender do nível de escolaridade e objetivos do professor em sala de aula.

Sobre as misconcepções na Educação Matemática

O termo misconcepção é utilizado quando pretende-se referir a existência de uma regra de orientação equivocada (NESHER, 1987), isto é, uma regra aprendida equivocadamente pelo estudante e que irá refletir em sua aprendizagem de outros assuntos. As informações fornecidas por livros didáticos, por exemplo, ou até mesmo pelo professor no desenvolvimento de suas aulas, podem ser importantes fatores de misconcepções pois determinam aquilo que o estudante possivelmente aprenderá.

Uegatani (2014) define misconcepção, a partir de uma perspectiva construtivista, como o resultado da encapsulação[1] de um processo inadequado.

Dada a interferência (negativa) que uma misconcepção tem na construção do conhecimento dos estudantes, alguns pesquisadores têm abordado essa temática em suas pesquisas buscando identificar tais misconcepções no desenvolvimento de atividades matemáticas.

Fandiño Pinilla e D'Amore (2006), por exemplo, discutem misconcepções apresentadas por estudantes em casos em que os mesmos devem estabelecer relações entre áreas e perímetros de figuras geométricas. Tais misconcepções se dão, dentre outros motivos, pela existência de invariantes semióticos[2] de tipo escolar nas representações de tais figuras.

Uegatani (2014), focando no conceito de função, analisa dois livros didáticos japoneneses objetivando analisar se as informações contidas em tais livros contribuem para que os alunos encapsulem inadequadamente um processo matemático. Este autor conclui, dentre outras coisas, que os exemplos utilizados pelos autores de livros didáticos são muito limitados, impossibilitando que os estudantes aprendam uma definição completa do conceito de função.

[1] De acordo com Dubinsky (1991), encapsulação é a conversão de um processo (dinâmico) em um objeto (estático). É um processo cognitivo indispensável para a aprendizagem do indivíduo.

[2] Godino et. al (2003) definem invariante semiótico como uma correspondência entre uma expressão linguística e determinadas ações, condições de realização dessas ações e seus respectivos resultados.

D'Amore (2015), por sua vez, além de abordar algumas representações semióticas redundantes apresentadas em livros didáticos, faz uma discussão de como fatores semióticos tornam impossível construir cognitivamente, corretamente, objetos matemáticos.

Assim, considerando que nosso objetivo é investigar o que evidenciam as atividades de modelagem matemática em relação ao conhecimento matemático dos estudantes, focaremos, aqui, nas misconcepções apresentadas pelos mesmos sobre diferentes conhecimentos matemáticos. Os aspectos metodológicos e análise da atividade são apresentados na sequência.

Aspectos metodológicos

Trata-se de uma pesquisa de cunho qualitativo, uma vez que, como afirma Godoy (1995), indo a campo, o pesquisador busca captar o fenômeno estudado a partir da perspectiva das pessoas nele envolvidas. Além disso, o ambiente é considerado como principal fonte de dados, tendo um caráter descritivo em que o foco é a análise dos dados e não os produtos e resultados.

Neste contexto, tendo em vista o objetivo proposto para este trabalho, desenvolvemos um estudo na perspectiva qualitativa interpretativa, uma vez que nossos resultados surgiram a partir da compreensão e das interpretações das concepções apresentadas pelos sujeitos da pesquisa.

Assim, a pesquisa qualitativa tem como objetivo principal investigar o processo na sua ocorrência, envolvendo compreensões, descrições, observações e significados, assim como hipóteses construídas após observação e não pré-concebidas (BOGDAN; BIKLEN, 1994).

Neste encaminhamento, essa pesquisa consistiu, inicialmente, de uma pesquisa bibliográfica sobre o tema em questão, sendo que, a elaboração do material empírico foi feita por meio do desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática em uma turma do quarto ano do curso de Licenciatura em Matemática na disciplina de Introdução à Modelagem Matemática.

A atividade em questão foi desenvolvida por 11 estudantes em quatro aulas da supracitada disciplina. Para o desenvolvimento da mesma, os estudantes se dividiram em três grupos, sendo um deles composto por três integrantes, e os demais por quatro.

No desenvolvimento da atividade, todos os grupos produziram registros escritos que serão aqui analisados. Além disso, a professora da disciplina dirigiu algumas discussões referentes aos assuntos matemáticos abordados na atividade. Tal discussão foi gravada em vídeo e áudio.

Assim, tanto os registros escritos dos estudantes, quanto as gravações em vídeo e áudio serão utilizados para a análise descrita a seguir.

Discussão de uma atividade de modelagem matemática

A análise que realizamos neste artigo considera as misconcepções evidenciadas por um grupo de onze alunos do 4º ano de um curso de Licenciatura em Matemática no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática na disciplina de Introdução à Modelagem Matemática.

Para isso, levamos em consideração os registros escritos, e os registros gravados em áudio e vídeo, com o consentimento de todos os participantes, no desenvolvimento da referida atividade. Para fazermos menção aos participantes desta investigação utilizaremos os códigos E1, E2, E3, e assim sucessivamente até o E11.

Durantes as discussões houve ainda a participação de dois professores, autores deste artigo, que estavam acompanhando a turma neste dia, a estes nos referiremos com os códigos P1 e P2. Nosso foco aqui não está essencialmente na atividade de modelagem matemática em si, mas sim nas discussões advindas da atividade.

Almeida, Silva e Vertuan (2012) colocam que uma atividade de modelagem matemática pode ser entendida em termos de uma situação inicial (problemática) e uma situação final (solução para a problemática) e, para se obter a situação final, tem-se um conjunto de procedimentos caracterizados pelos autores como inteiração, matematização, resolução, interpretação e validação dos resultados.

As discussões aqui analisadas ocorrem no momento da matematização, ou seja, no momento de reescrever a situação problema da linguagem natural, na qual foi apresentada, para uma linguagem matemática (ALMEIDA, SILVA, VERTUAN, 2012).

O tema da atividade foi *"Internautas Brasileiros"* e foi apresentada aos alunos, além de dois textos introdutórios ao assunto, uma tabela contendo a número de usuários de internet no Brasil nos últimos 11 anos (de 2006 a 2016). Uma das situações-problema levantadas na atividade foi determinar a quantidade de usuários de internet no Brasil no ano de 2038. A tabela com os dados e a situação-problema podem ser vistas na Figura 1.

Ano	Domicílios com acesso à internet (em milhões)
2006	13,26
2007	14,67
2008	16,20
2009	18,96
2010	19,81
2011	22,49
2012	24,14
2013	26,36
2014	28,34
2015	30,32
2016	32,29

Questão 1

Quantas pessoas terão acesso à internet em 2038?

1º hipótese: Supondo que a partir da razão tomou três usuários em cada domicílio

Figura 1: Informações sobre a situação e definição do problema
Fonte: Relatório dos estudantes.

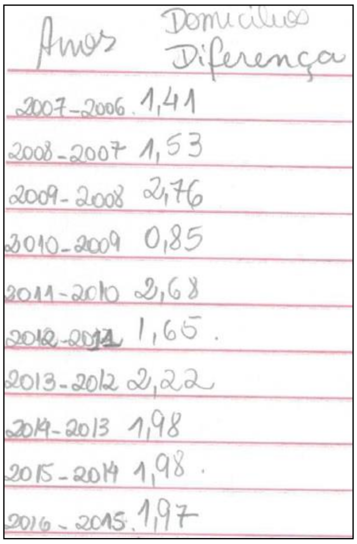
Para obter uma solução para o problema, os estudantes decidiram deduzir um modelo matemático que representasse a situação. Para isso, foram orientados a analisarem o comportamento dos dados para definirem a estrutura do modelo que os representariam.

P1: Como o grupo 1 está trabalhando?
E1: Nós achamos a média da quantidade de pessoas por domicílio – de 3 a 4 pessoas, depois a gente fez uma média de domicílios com acesso, 11 anos, agora a gente achou uma média da taxa de crescimento de um ano para o outro, de 2006 a 2007, de 2007 a 2008, depois a gente fechou uma média da razão desses 10 anos;
P2: E como vocês calcularam esse valor?
E2: Subtraindo 2007 de 2006, depois 2008 de 2007 e assim por diante;
P1: E o que isso significa? Por que a média?
E2: Porque aí a gente pode usar como parâmetro para 2038;
P1: Mas a média indica que tipo de comportamento?
E1: Exponencial.

Com a fala de E1 é possível notar que os estudantes deste grupo não possuíam naquele momento uma ideia clara do conceito de razão, uma vez que o que estava sendo calculado era a diferença entre um ano e seu anterior e não a divisão entre um termo e outro.

Além disso, calculando-se uma diferença entre os valores e, encontrando-se um valor que se aproximasse de uma constante, o que os alunos teriam seria um comportamento linear, e não exponencial como expresso por E1.

Na Figura 2 está o cálculo da taxa de crescimento de E2.



Anos	Domicílios Diferença
2007-2006	1,41
2008-2007	1,53
2009-2008	2,76
2010-2009	0,85
2011-2010	2,68
2012-2011	1,65
2013-2012	2,22
2014-2013	1,98
2015-2014	1,98
2016-2015	1,97

Figura 2: Cálculo da taxa de variação dos dados de E2
Fonte: Relatório dos estudantes.

Sendo questionados a respeito do comportamento dos dados a partir dos cálculos que os mesmos estavam apresentando:

P1: Então, mas quando você determina a diferença entre um ano e outro, tira uma média e supõe que isso vai crescer o mesmo tanto a cada ano, isso não é exponencial. É o que?
E3: Função seno.
P1: Por que função seno?
E3: Porque faz assim (neste momento E3 faz movimentos com as mãos como se desenhasse o gráfico da função $f(x) = sen(x)$ no ar)

Diante dos valores calculados por E2 (Figura 2), E3 afirma que pode ser que uma função seno represente a situação, uma vez que a mesma parece "crescer" e "diminuir" com o tempo, o que evidencia uma misconcepção de E2 com relação ao conhecimento matemático função seno.

Os professores passaram a questionar o segundo grupo com relação à atividade:

P1: E vocês, como estão trabalhando?
E4: Nós construímos o gráfico no excel. Daí a função logarítimica chegou mais perto de 1, por isso, a gente considerar que o gráfico será logarítmico;
P1: Mas vocês construíram o gráfico para que?
E5: Pra analisar qual função que seria;
E4: Mas exponencial também chegou bem perto de 1;

Quando E4 afirma que a função logarítmica "chegou mais perto de 1", ele está se referindo ao coeficiente de correlação linear de Pearson (R^2) mostrado pelo *software* Excel no momento em que o grupo postou os dados na planilha eletrônica, construiu o gráfico de dispersão dos dados e inseriu uma linha de tendência no gráfico. Segundo os mesmos, o R^2 da função exponencial também chegou bem perto de 1, no entanto, como o da função logarítmica foi maior, essa é a função que decidem ajustar (Figura 3).

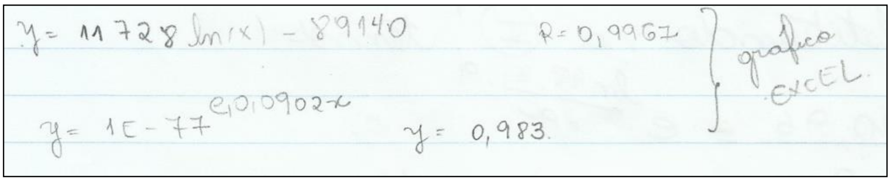

$y = 11728 \ln(x) - 89140$ $R = 0,9967$ } gráfico Excel.
$y = 1E-77 e^{0,0902x}$ $y = 0,983.$

Figura 3: Dados obtidos pelo grupo 2 ao plotar os pontos no *software* Excel
Fonte: Relatório dos estudantes.

Nesse momento, fica evidenciado a misconcepção de E4 com relação ao ajuste de função. Aparentemente, para os estudantes deste grupo, analisar apenas o R^2 do ajuste é suficiente para determinar qual o comportamento mais adequado para a situação. O uso de ajuste de curvas para determinar uma curva que melhor se ajusta aos dados é 'perigoso' no sentido de que a curva que melhor se ajusta aos dados pode não ser a que melhor representa o fenômeno, não servindo, por exemplo, para realizar previsões com base nos modelos matemáticos (GALBRAITH, 2012).

A investigação das variações mobiliza os alunos no uso das funções logarítmica e exponencial. Questionados pelos professores a respeito das características das funções logarítmica e exponencial, o grupo decide trabalhar com o segundo tipo de comportamento.

E6: Depois nós vamos analisar as variáveis dependente e independente e tentar achar uma porcentagem...
E5: Porcentagem que foi crescendo em cada ano para a gente poder ver mais ou menos o que cresceu por ano.
P1: Mas vocês disseram que pretendem trabalhar com uma função exponencial. Para que vão usar essa porcentagem?
E6: A gente vai calcular esse percentual que vai ser a taxa de crescimento... vamos tirar uma média de todos os anos e usar como parâmetro da função.

Com as colocações de E5 e E6 e os registros escritos do grupo 2 (Figura 4) podemos inferir que os mesmos pretendem ajustar uma função exponencial do tipo $f(x) = a \, . \, e^{k \, . x}$, e, calculando o a taxa de crescimento dos dados ($P_{n+1} - P_n$, sendo $P(n)$ o número de usuários de internet e n o tempo em anos) terão o valor do parâmetro k. Temos aqui outra misconcepção relacionada à estrutura matemática da função exponencial.

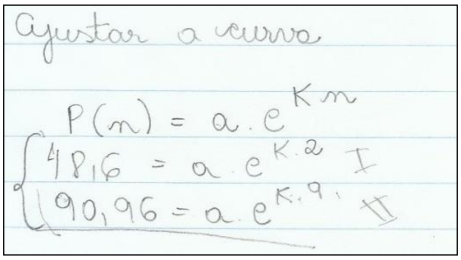
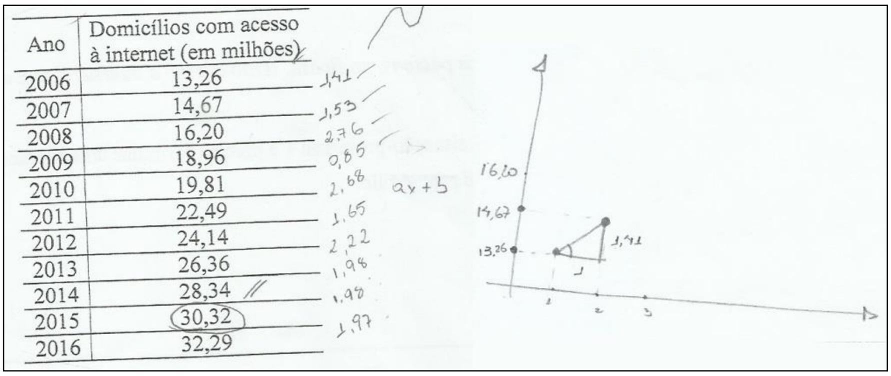


Figura 4 :Cálculos apresentados pelo grupo de E5 e E6
Fonte: Relatório dos estudantes.

De acordo com os registros escritos do grupo 3 (Figura 5) é possível inferir que, de forma semelhante com os demais grupos os mesmos também calcularam a diferença do número de usuários entre um ano e seu anterior. Por isso, P1 faz alguns questionamentos com relação ao modelo que os mesmos pretendiam definir.



Ano	Domicílios com acesso à internet (em milhões)
2006	13,26
2007	14,67
2008	16,20
2009	18,96
2010	19,81
2011	22,49
2012	24,14
2013	26,36
2014	28,34
2015	30,32
2016	32,29

Figura 5: Cálculo da diferença feito pelo estudante E7
Fonte: Relatório dos estudantes.

P1: em termos de relação matemática, lá no livro de vocês (referindo-se ao livro didático entregue a cada um dos grupos logo após o início da atividade), *do que é chamado esse crescimento em cada intervalo de tempo na função de primeiro grau?*
E7: coeficiente.
P1: que coeficiente?
E7: Coeficiente Linear.

Com a fala de E7 fica evidenciada uma misconcepção a respeito da função de primeiro grau. Neste caso, a concepção equivada refere-se aos coeficientes angular e linear. P1 discutiu com todo o grupo os parâmetros da função com o intuito de esclarecer as propriedades de cada um dos parâmetros da função de primeiro grau.

Nesse contexto, por meio do desenvolvimento da atividade de modelagem matemática emergiram misconcepções dos alunos referentes conceitos matemáticos e a mesma se transformou em uma possibilidade para os professores retomarem e sistematizarem os conceitos matemáticos nos quais os alunos apresentaram fragilidades quanto ao entendimento.

Algumas considerações

Apresentamos no presente artigo uma análise das misconcepções evidenciadas por estudantes no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática objetivando investigar o que tais atividades demonstram a respeito do conhecimento matemático daqueles que a desenvolvem.

Pautando-nos na modelagem matemática como alternativa pedagógica, com a análise dos dados, considerando registros escritos e gravados em áudio e vídeo de um grupo de estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática podemos inferir que, no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática, são evidenciados diversos aspectos referentes ao conhecimento matemático dos modeladores.

No caso deste artigo, nosso olhar estava voltado para as misconcepções evidenciadas pelos mesmos. Analisando os dados, conforme descrito acima, foram evidenciados conceitos equivocados referentes a diferentes assuntos matemáticos, a saber:

- Progressão aritmética e geométrica: mais especificamente no que se refere ao comportamento de tais progressões (linear e exponencial, respectivamente).
- Funções trigonométricas: quando o estudante infere que o comportamento estudado poderia ser representado por meio de uma função senóide por sua característica de "crescer" e "decrescer" em função do tempo;
- Função exponencial: neste caso a misconcepção foi evidenciada no momento em que os estudantes relataram que definiriam a taxa de crescimento da função exponencial subtraindo o valor da imagem de um ponto de seu antecessor;
- Parâmetros da função de primeiro grau: quando o estudante afirma que, em uma função de primeiro grau, o coeficiente responsável pelo crescimento da mesma é o coeficiente linear.

Identificar tais misconcepções possibilitou que a professora da turma abordasse, nas discussões, esses conceitos de modo a mostrar aos estudantes que as concepções apresentadas por eles com relação a esses conteúdos eram equivocadas e que desenvolvesse trabalhos no sentido de esclarecê-las e no sentido de contribuir para sua formação profissional.

Inicialmente, os estudantes apresentaram dificuldades para desenvolver a atividade de modelagem matemática e a evidência de tais misconcepções foi ao encontro daquilo colocado por Cury (1990) quando a autora diz que, muitas vezes, os erros em determinados conteúdos relacionam-se com dificuldades em conceitos básicos.

Assim, inferimos que atividades de modelagem matemática podem possibilitar que as misconcepções dos alunos sejam evidenciadas, o que permite que trabalhemos para corrigir e colaborar com os processos de ensino e de aprendizagem.

Referências

ALMEIDA, L. M. W.; FERRUZZI, E. Uma aproximação socioepistemologica para a Modelagem matemática. **Alexandria Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v.2, n. 2, p. 117-134, jul 2009.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**. Portugal: Porto Editora, 1994.

BRASIL. Secretária de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília: MEC/SEF, 1997.

CURY, H. N. **Erros em soluções de problemas de cálculo diferencial e integral**: análise, classificação e tentativas de superação. Porto Alegre: PUCRS, Instituto de Matemática, 1990.

D'AMORE, B. **Primeiros elementos de semiótica**: sua presença e sua importância no processo de ensino-aprendizagem da matemática. D'Amore, B.; FANDIÑO PINILLA, M. I.; IORI, M. (orgs). São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.

DUBINSKY, E. The constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics. *In:* (L.P. Steffe, ed). *In:* **Epistemological Foundations of Mathematical Experiences.** New York: Springer-Verlag, 1991.

FANDIÑO PINILLA, M. I.; D'AMORE, B. **Area e perímetro. Aspetti concettuali e didattici**. Trento: Erickson, 2006.

GALBRAITH, P. Models of Modelling: genres, purposes or perspectives. In: **Journal of Mathematical Modelling and Applications**. v, 1, n. 5, 3-16, 2012.

GODINO, J. et al. Recursos interactivos para el estudio de las fracciones. **XVIII Reunión del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de la Matemática**. SIIDM, Grupo DMDC-SEIEM, Córdoba, 2003.

GODOY, A. S. Pesquisa Qualitativa: tipos fundamentais. *In*: **Revista e Administração e Empresas**, v. 35, n. 3, p. 20-29. São Paulo, 1995.

LACHINI, J. Subsídios para explicar o fracasso de alunos em cálculo. In: LAUDARES, J.B., LACHINI, J. (Org.). **A prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo**. Belo Horizonte: FUMARC, 2001. p. 146-190.

NESHER, P. Towards an instructional theory: the role os student's misconceptions. For the Learning of Mathematics, 7(3), 33-40, 1987.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação do Paraná. Superintendência da Educação. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica**: Matemática. Curitiba: SEED, 2008, p. 1-81.

POLLAK, H. O. The interaction between Mathematics and other school subjects, **New Trends in Mathematics Teaching,** Volume IV, Paris: UNESKO, 1979.

UEGATANI, Yusuke. Possible misconceptions from Japanese mathematics textbooks with particular reference to the function concept. In: **Conference on Mathematics Textbook Research and Development (ICMT-2014)**. 2014. p. 465.