UMA ABORDAGEM PARA O CONCEITO MODERNO DE SIMETRIA (ADRIEN-MARIE LEGENDRE)

Alan Machado Pizzo
SEED
alanpizzo@seed.pr.gov.br

Regina Célia Guapo Pasquini
UEL
rcgpasq@uel.br

Resumo:
O conceito moderno de *simetria* é aplicado por várias ciências como Artes, Física, Química e Cristalografia. E, embora tenha relevância em outras áreas de conhecimento, sua abordagem por vezes não é capaz de mostrar quais os pilares sob os quais ele se sustenta: transformação, isometria e invariância. Este minicurso tem por objetivo apresentar um tratamento para *simetria* no Ensino Médio, segundo o conceito moderno, cuja gênese deve a Adrien-Marie Legendre (séc. XIX). Para isso, apresentamos algumas atividades que exploram a definição de simetria. Apresentamos as distinções de alguns usos da palavra *simetria*, empregada em diferentes contextos e épocas da história que vão além da Matemática. Nossa proposta está amparada na utilização do software *GeoGebra*, trazendo atividades diferenciadas que tratam do conteúdo, por exemplo, dos livros didáticos deste nível de ensino.
Palavras-chave: Simetria. GeoGebra. História da Simetria.

Simetria: o conceito moderno

Simetria é um conceito que foi desenvolvido ao longo dos tempos e possui diversas aplicações que transcendem a Matemática. O desenvolvimento do conceito de *simetria* é objeto de pesquisa para diversos autores como Mainzer (1988), Yaglom (1988), Brading e Castellani (2003), Darvas (2007), Hon e Goldstein (2008), Stewart (2012) e, Pasquini e Bortolossi (2015).

Pasquini e Bortolossi (2016) citam três significados associados à *simetria* para ilustrar a evolução do conceito moderno de *simetria:*

i) *Comensurabilidade* – como no Livro X dos *Elementos* de Euclides (300 a.C.);
ii) *Proporção adequada* – como na obra *Os Dez Livros sobre Arquitetura* de Marcus Vitruvius Pollio (c. 80-70 a.C. – c. 15 a.C.).

iii) *O conceito moderno de simetria* – cuja gênese se deu com Adrien-Marie Legendre (1752-1833) e foi apresentado em sua obra *Élements de Géometrie.*

Neste minicurso iremos enfatizar o conceito moderno de *simetria,* que é aplicado em diversas áreas de conhecimento como Física, Química, Cristalografia e Artes.

Pasquini e Bortolossi (2016) definem simetria da seguinte forma:

> Seja $\boldsymbol{X}$ um subconjunto não vazio do plano euclidiano $\mathbb{R}^2$. Dizemos que uma função $\boldsymbol{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma "*simetria"* do conjunto $\boldsymbol{X}$ se $\boldsymbol{F}$ satisfaz as duas condições seguintes.
> **1.** $\boldsymbol{F}$ é uma *isometria*, isto é, $\boldsymbol{F}$ preserva distâncias. Mais precisamente, quaisquer que sejam os pontos $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{Q}$ em $\mathbb{R}^2$, a distância de $\boldsymbol{P}$ a $\boldsymbol{Q}$ (no domínio de $\boldsymbol{F}$) é sempre igual a distância de $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{P})$ a $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Q})$ (no contradomínio de $\boldsymbol{F}$).
> **2.** $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$, isto é, $\boldsymbol{X}$ é invariante por $\boldsymbol{F}$ (a imagem do conjunto $\boldsymbol{X}$ pela função $\boldsymbol{F}$ é o próprio conjunto $\boldsymbol{X}$).

Com uma breve leitura desta definição, notamos que o conceito moderno de simetria está atrelado à três ideias principais: transformação (função), isometria e invariância.

Apesar de ser um conceito bem definido, e como já dissemos nos parágrafos anteriores, aplicado por outras áreas de conhecimento, verificamos que, no contexto escolar, por vezes, *simetria* é associada a usos não-científicos da palavra. Como por exemplo, ao sentido estético de proporção adequada seguindo a tradição "vitruviana". Ou ainda, mesmo em livros textos de Matemática para a Educação Básica, notamos tratamentos que trazem *simetria* como sinônimo de reflexão, desprezando a condição de invariância que define o conceito (MENDES, 2014; PASQUINI; BORTOLOSSI, 2015; MENDES; BORTOLOSSI, 2014).

Ainda sobre as abordagens propostas, "(...) Os livros didáticos, apesar de contemplarem muito do que é estabelecido pelos documentos oficiais, não tratam da questão da *simetria* no espaço e nem da *simetria* por translações no plano (...)" (PIZZO, 2017).

Neste contexto, propomos este minicurso com a intenção de promover ecos na Educação Básica, especificamente no Ensino Médio. Nossa intenção é explorar o conceito moderno de *simetria* com nossos participantes e apontar uma alternativa de abordagem para *simetria* no Ensino Médio. E ainda, para aqueles que se dedicam a formação de professores, que possam conhecer o modo pelo qual a simetria vem sendo estudada e as consequências e confusões acerca da "palavra × conceito".

Optamos por desenvolver uma proposta, em grande parte, com o auxílio do *GeoGebra*, um software de Geometria Dinâmica Interativa (GDI) que possui "(...) a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem ente si” NASCIMENTO (2012). Entretanto, ressaltamos que não será necessário o uso de um laboratório computacional para isto.

Recursos necessários

Embora a utilização do software seja necessária para o desenvolvimento do minicurso, não necessitamos necessariamente de um laboratório. Mas, de uma sala com acesso a rede Wi-Fi. Nestes casos de utilização do software, utilizaremos *applets,* que são pequenos programas em linguagem JAVA™ e que podem ser acessados por navegadores de internet (DEITEL, H.; DEITEL, 2002). Estes *applets* foram desenvolvidos no software *GeoGebra* e estarão hospedados em uma “nuvem” que poderá ser acessada no momento do minicurso. O material poderá ser acessado por dispositivos pessoais como *tablets*, *smartphones* e *laptops.*

O minicurso: desenvolvimento

Iniciaremos o minicurso propondo aos participantes que preencham um pequeno texto a fim de diagnosticarmos as impressões, e ou concepções, que possuem de *simetria*. A seguir, pediremos que cada um identifique em alguns livros do Ensino Médio como o conceito de *simetria* é abordado. A partir desta etapa, faremos uma discussão trazendo alguns aspectos históricos da gênese do conceito de simetria ao longo dos anos. Para isso, faremos uma breve exposição a partir de estudos realizados anteriormente pelos autores deste trabalho.

Em seguida, proporemos uma sequência de atividades que leve em consideração os três pilares do conceito moderno de *simetria*: transformação, isometria e invariância.

Para o desenvolvimento destas atividades é necessário que nosso público alvo tenha um conhecimento mínimo do software GeoGebra. Caso alguns dos participantes não possuam tal conhecimento, iniciaremos com algumas atividades para familiarizá-los com o software e suas funcionalidades, ligadas especialmente às transformações.

Após esta etapa, desejamos desenvolver atividades que trabalhem especificamente com os pilares do conceito moderno de *simetria*. Em síntese, apresentamos a seguir um resumo de cada uma das atividades a serem propostas:

Atividade 1 – **Realizar transformações no GeoGebra: o uso da régua e compasso**. Desejamos nesta atividade apresentar as transformações geométricas, não em um enfoque analítico, em que se discuta o domínio e o contradomínio de uma transformação, o que faremos de forma intuitiva na atividade seguinte, mas sim, para destacar que os pontos do domínio sendo levados nos pontos do contradomínio (uma transformação), e de tal modo que seja possível a compreensão do que é uma rotação, uma reflexão ou uma translação ao realizar efetivamente o processo. Usaremos algumas transformações geométricas que não são *simetrias*, justamente para não alimentar a falsa ideia de que apenas os vértices permutam posição. Para nossos objetivos com esta atividade exploraremos as ferramentas de régua e compasso do GeoGebra.

Atividade 2 – **Translação e invariância do gráfico da função $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\boldsymbol{f(x) = cos(x)}$.**

É nossa intenção desenvolvermos a condição de invariância a partir da translação do gráfico de $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x)$. Para realizarmos esta atividade será necessário acessar o *applet* a seguir:

https://www.geogebra.org/m/AWXYw4tU

Os participantes deverão simular translações e anotar em que circunstâncias o gráfico de f pela transformação permanece invariante ou não, o que depende de quantas unidades o gráfico da função acima definida é deslocado. Destacamos aqui que a condição de invariância é satisfeita somente quando os conjuntos dos pontos do domínio e da imagem da transformação coincidem.

Ainda nesta etapa do minicurso propomos a atividade 3:

Atividade 3 – **Translação e isometria do gráfico da função $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\boldsymbol{f(x) = b\ cos(cx + }\mathrm{a})$.**

Essa atividade tem por objetivo trabalhar a condição de isometria no gráfico da função acima definida. Para a realização da mesma utilizaremos o *applet* a seguir:

https://ggbm.at/HwfTVUQr

Podemos verificar os efeitos produzidos no gráfico da função

$$f(x) = b\cos(cx + \mathrm{a}).$$

Quando os parâmetros b e c variam, o gráfico de f se alonga ou comprime verticalmente para $|b| \neq 1$ e horizontalmente para $|c| \neq 1$. Em termos mais precisos, alterar os parâmetros b e c implica em alterar a amplitude e o período de f.

Para este exemplo, após explorarmos diversas situações alterando os parâmetros de f, esperamos que o participante deste minicurso conclua que f é isométrica somente para $|b| = |c| = 1$.

Ao realizar estas atividades, esperamos que o grupo esteja apto para os próximos desenvolvimentos. Esperamos que até este ponto os participantes compreendam o conceito moderno de *simetria* e, na sequência, proporemos outras três atividades em que poderão aplicar o conceito de *simetria* tanto no plano, quanto no espaço.

A seguir, partiremos para a quarta atividade.

Atividade 4 – **Simetrias do triângulo equilátero.**

Particularmente aqui, substituiremos o *GeoGebra* por um material manipulável que pode ser encontrado em Pasquini e Bortolossi (2015, p. 47-52). O objetivo da atividade será calcular as *simetrias* de um triângulo equilátero. O desenvolvimento da atividade se dará com a polígono representado por uma figura em transparências, com uma base impressa do triângulo, e de fácil utilização, que permitirá aos participantes realizar rotações e reflexões do triângulo equilátero, calculando as simetrias de um triângulo equilátero.

Atividade 5 – **Simetrias de rotação do tetraedro**.

Propormos que o grupo estude as *simetrias* geradas por eixos. O objetivo desta atividade é que o participante possa visualizar e calcular as *simetrias* por rotações em torno de uma reta do tetraedro no espaço. Para a realização da atividade, iremos utilizar o seguinte *applet* do *GeoGebra:*

https://ggbm.at/m9ZDr78y

Por meio desta construção interativa o participante poderá variar eixos e ângulos e verificar para que ângulos e eixos a transformação é uma *simetria* do tetraedro. As *simetrias* deverão ser apresentadas em um quadro.

Por fim, iremos propor a Atividade 6 - **Rotação do cubo em torno do eixo Ox**. Nosso objetivo com esta atividade é exibir uma aplicação para multiplicação de matrizes e geometria analítica na computação gráfica.

Considerações finais

Este minicurso decorre de estudos realizados a partir de uma pesquisa realizada em nível de mestrado (PIZZO, 2017). Avançamos na dissertação obtendo resultados que trazem diversas implicações na forma como o conceito de simetria vem sendo tratado na Educação Básica.

Sabemos que o conceito de simetria está amparado em três pilares: transformação, isometria e invariância. Entretanto nos manuais escolares que analisamos, para a Educação Básica, não verificamos esta ênfase.

Desenvolvemos um trabalho que traz este destaque e, para isso, utilizamos o software *GeoGebra*, que será base para o desenvolvimento das atividades deste minicurso. Seu caráter interativo permite-nos simular algumas situações, o que facilita o processo de ensino. Essencialmente em uma das atividades utilizaremos material manipulável.

Acreditamos que as ideias apresentadas neste minicurso, aliadas às referências aqui apresentadas, sejam capazes de promover ecos nas práticas daqueles que efetivamente poderão trabalhar, ou trabalham com o Ensino Médio.

Referências

DEITEL, H. M.; DEITEL P. J. **JAVA™ How to Program**. 4 ed. Prentice Hall, Inc. 2002.

FLORENCIO, M. P. **Transformações no Plano e Grupos de Simetria.** São Carlos: UFSCar, 2011. 49 f. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2011.

HON, G.; GOLDSTEIN, B. R. **From Summetria to Symmetry: The Making of A Revolutionary Scientific Concept.** Archimedes: New Studies in The History of Science and Technology, New York: Springer-Verlag, 2008.

LIMA, E. L. **Isometrias.** Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1996.

MENDES, C. O. de A. e S. **O Conceito Moderno de Simetria nos Livros Didáticos do Ensino Fundamental:** Uma Análise. Niterói: UFF, 2014. 48 f. Monografia (Trabalho de

Conclusão de Curso de Especialização em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2014.

MENDES, C. O. de A. e S.; BORTOLOSSI, H. J. **O Conceito Moderno de Simetria nos Livros Didáticos do Ensino Fundamental:** Uma Análise. Anais do VI Encontro Estadual de Educação Matemática do Rio de Janeiro, Niterói: Universidade Federal Fluminense, 2014. Disponível em: <http://eemat.sbemrj.com.br/wp-content/uploads/2014/10/CC45_Carlos_Humberto.pdf>. Acesso em: 25 nov. 2016.

NASCIMENTO, E. G. A. do; **Avaliação do Uso do Software GeoGebra no Ensino de Geometria:** Reflexão da Prática na Escola. < http://www.geogebra.org.uy/2012/actas/procesadas1370724062/67.pdf>

PASQUINI, R. C. G.; BORTOLOSSI, H. J. **Simetria: história de um conceito e suas implicações no contexto escolar.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015. – (Série História da Matemática para o ensino; v.9).

PASQUINI, R. C. G.; BORTOLOSSI, H. J. **O que é Simetria? Diferentes Usos da Palavra ao Longo da História da Matemática.** < http://seer.uece.br/?journal=BOCEHM&page=article&op=view&path%5B%5D=2371>.

PIZZO, A. M. **O Conceito Moderno de Simetria: uma proposta de abordagem para o Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Londrina. Londrina, 2017. 94 f.

WEYL, H.. **Symmetry.** Princeton University Press, 1952.

YAGLOM, I. M. **Felix Klein and Sophus Lie: Evolution of the Idea os Symmetry in the Nineteenth Century.** Tradução: Sergei Sossinsky. Harrisonburg: Birkhiiuser Boston, 1988.