DE LÁ PARA CÁ: TENTATIVAS DE RESOLUÇÃO DA QUADRATURA DO CÍRCULO E SUAS POTENCIALIDADES

Luiza Camile Rosa da Silva
Universidade Estadual de Londrina
luiza24816@gmail.com

Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho
Universidade Estadual de Londrina
peresbi@gmail.com

Resumo:
O projeto "Interfaces entre Tópicos da Álgebra e Educação Básica", que atualmente está em andamento, tem como um de seus objetivos estabelecer relações entre conceitos de Álgebra moderna e a Educação Básica. Nesta comunicação, apresentamos uma revisão bibliográfica sobre o problema da Quadratura do Círculo. Embasados nesta perspectiva histórica, percebe-se a potencialidade do problema. Traçamos um percurso que vai desde considerações sobre o conhecimento matemáticos dos egípcios até as técnicas atuais propostas pela Álgebra, que asseguram a impossibilidade de resolução do problema por meio dos instrumentos utilizados pelos gregos (régua não graduada e compasso). Um dos resultados parciais que obtivemos é perceber a possibilidade de realizar com recursos computacionais, como a utilização do Geogebra, atividades que permitem a exploração em sala de aula da Educação Básica de tópicos relacionados ao problema.
Palavras-chave: História da Matemática. Quadratura do Círculo. Trissetriz de Hípias. Teoria de Galois.

1 Introdução

A Geometria é, certamente, um dos ramos mais fascinantes e presentes no cotidiano da Matemática. Formas e figuras geométricas estão ao nosso redor, criando a noção do belo e produzindo harmonia, influenciando a arquitetura, a construção civil, agronomia, artes plásticas, entre outros.

Para além da área matemática, Cornelli e Coelho (2007) defendem que a Geometria era preparatória e indispensável, na concepção grega, para a aprendizagem da Filosofia. Baseados em Platão, alegam que as "questões matemáticas estão presentes na discussão sobre os critérios para a aquisição de conhecimento verdadeiro" (CORNELLI e COELHO, 2007, p. 422), crucial para o pensamento filosófico e epistemológico. Ressaltam a importância, dentro do conhecimento matemático, da vertente geométrica.

> Galeno conta uma anedota que ilustra muito bem qual é a imbricação cultural das ciências matemáticas (e, de maneira especial, da geometria) no mundo grego: Aristipo teria sido jogado durante um naufrágio numa praia desconhecida, e vendo desenhadas na areia algumas figuras geométricas, teria ficado aliviado, pois, naquele momento, sabia não ter caído em terras bárbaras, e sim em terras gregas. (CORNELLI e COELHO, 2007, p. 423).

Por outro lado, D'Ámbrósio (2013) alerta para a importância do estudo da História da Matemática, valorizando a origem do pensamento matemático como inter-relacionado com a necessidade de sobrevivência das comunidades, permitindo que os povos, ao longo do tempo, desenvolvessem estratégias para elaboradas para a resolução de problemas práticos e teóricos. Para este autor, existem muitos motivos para que se ensine História da Matemática, entre os quais o fato que de a matemática é uma manifestação cultural e, como tal, deve ser resgatada e incorporada nas práticas curriculares e nas ações pedagógicas. Além disso, como afirma este autor, "Não se pode entender conhecimento sem se atentar para o ciclo completo do conhecimento, desde sua geração, organização intelectual e social, transmissão, expropriação, institucionalização e difusão" (D'AMBRÓSIO, 2013, 18).

Partimos, deste modo, de duas premissas. Primeiro, a de encarar Geometria e a matemática como *ciência das relações*, assumimos uma concepção que permite, por exemplo, pensarmos no famoso Teorema de Pitágoras como em seu enunciado clássico, (Se é dado um triângulo retângulo de catetos a e b e hipotenusa c, então temos que o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos, isto é $c^2 = a^2 + b^2$) ou como um resultado que permite relacionar um certo tipo de grandeza, qual seja, o conceito de ângulo (no caso, o triângulo é reto), com outro tipo de grandeza, qual seja, o comprimento dos catetos e hipotenusa. A segunda premissa é a de que, sendo criação humana, a matemática deve ser entendida como produto inacabado, sujeito a novas descobertas e interpretações.

Tomar a concepção de matemática, como ciência das relações, parece-nos interessante porque permite (re)pensar o ensino e a aprendizagem de matemática não como processos estanques, quer sejam temporalmente, quer sejam quando se fazem referências aos conteúdos abordados, isto é, em suas diversas áreas, geometria, álgebra, cálculo, aplicações, etc., quer, ainda, quando a matemática é pensada como instrumento para estabelecer relações de compreensão do sujeito com o meio que o entorna.

Outra concepção fundamental é a posição daqueles que agem embasados numa premissa de uma Educação Matemática compreendida de forma ampla. Concordamos neste aspecto, por exemplo, com Fiorentini e Lorenzato, ao entenderem que o educador matemático, na consideração entre as ciências matemáticas e a educação, "tende a colocar a matemática a serviço da educação, priorizando, portanto, esta última, mas sem estabelecer uma dicotomia entre elas" (FIORENTINI e LORENZATO, 2006, p. 4).

O projeto "Interfaces entre Tópicos de Álgebra e Educação Matemática" privilegia estas duas últimas concepções, valorizando o conhecimento matemático avançado e colocando-o como conhecimento basilar do futuro professor de matemática, para que possa, a partir dele, desenvolver práticas pedagógicas e didáticas para serem utilizadas na Educação Básica e que estejam alinhadas com a Educação Matemática.

Neste trabalho, apresentamos algumas considerações parciais advindas do projeto, sobre a possibilidade de mesclar elementos oriundos da Teoria de Galois e tópicos de História da Matemática que podem ser interseccionados com os ensinamentos da Educação Básica. Acreditamos, como D'Ámbrósio (2013), que é possível tornar a matemática escolar menos obsoleta, mais interessante e útil.

Elegemos como temática principal, neste momento, os problemas clássicos da antiguidade e os números construtíveis. Este tema serve sobremaneira para os nossos propósitos, pois exemplifica de maneira cabal a necessidade de assumirmos a matemática como ciência investigativa sujeita às necessidades humanas, sujeita às práticas sociais mais amplas, às aspirações humanas e limitada, portanto, por essa mesma conjuntura.

São três os problemas que ficaram conhecidos como problemas clássicos da antiguidade:

1. Quadratura do círculo: determinar um quadrado cuja área fosse igual à de um círculo de raio dado.
2. Duplicação do cubo: determinar a aresta de um cubo cujo volume fosse o dobro do de outro cubo aresta dada;
3. Trissecção do ângulo: dividir um dado ângulo em três partes iguais.

Para Yates (1971), estes problemas

> persistiram com vigor impressionante durante mais de dois mil anos. [...] Estes três problemas, solidamente inexpugnáveis malgrado todas as tentativas usando geometria plana, o método matemático dos antigos gregos, fizeram com que os matemáticos ficassem fascinados

> e construíssem novas técnicas e teoremas para sua solução. Por meio deste estímulo surgiu parte das estruturas atuais da álgebra e geometria (YATES, 1971, p.4; apud CARVALHO, 2007, p.92).

Neste momento, a pesquisa assume uma natureza predominantemente bibliográfica, situação na qual inúmeras obras são analisadas, tanto as que se relacionam com o conteúdo matemático envolvido, quanto com relação à bibliografia referente ao percurso histórico abordado. Além destas vertentes, referências técnicas correlatas à Educação Matemática também foram consideradas.

No que seguirá, procuraremos expor alguns aspectos históricos relacionados ao primeiro dos três problemas e alguns resultados de Álgebra relacionados aos números construtíveis, dentro da Teoria de Galois, que permitirão examinar porque nenhum dos problemas admite solução, pensada esta, como solução obtida com o uso do compasso e da régua não graduada (como proposta pelos gregos antigos).

A interseção com as práticas da Educação Básica dá-se pelo desenvolvimento de atividades que podem ser realizadas no Ensino Médio. Uma delas será indicada aqui e trata da construção mecânica realizada por Hípias para solucionar o problema.

2 O problema da quadratura do círculo

Os geômetras gregos interessavam-se por construções geométricas realizadas com o uso de apenas dois instrumentos, o compasso e a régua (sem marcas, não graduada). Construir com régua e compasso exige que algumas regras sejam cumpridas. Com o auxílio da régua é permitido traçar uma reta de comprimento indefinido passando por dois pontos distintos conhecidos. Com o compasso é possível traçar uma circunferência com centro em um ponto passando por um segundo ponto qualquer. Para Eves (2004, p.134), se pensarmos as construções geométricas como um jogo em que são obedecidas estas duas regras, obteremos um dos jogos mais fascinantes e absorventes inventados.

Os postulados dos *Elementos* de Euclides determinam o uso da régua e compasso seguindo as regras anteriores, de forma que tais instrumentos ficaram conhecidos como instrumentos euclidianos. A régua utilizada não possuía escala e o compasso de Euclides desmontava-se quando um dos seus braços era retirado do papel, diferenciando-os dos compassos atuais, entretanto estes instrumentos são equivalentes.

Os gregos descobriram que assim procedendo era possível transformar qualquer triângulo em um quadrado de área equivalente; traçar uma perpendicular a uma reta conhecida, passando por um ponto qualquer; dado um ângulo qualquer, dividi-lo em duas partes iguais; e dado um segmento de reta qualquer, dividi-lo em partes iguais.

Segundo Baron (1985), os geômetras gregos sabiam que era possível, através de uma sequência de transformações geométricas, reduzir *qualquer figura poligonal* a um triângulo com igual área; o triângulo torna-se então um paralelogramo, o paralelogramo torna-se um retângulo e finalmente o retângulo torna-se um quadrado. Esta autora ressalta que estes resultados encontram-se já em Euclides, livro II. (BARON (1985, p.32).

O problema de redução de figuras curvas a quadrados equivalentes foi muito difícil. Regiões de formatos lunares deram origem às primeiras tentativas de determinações de áreas de figuras curvas, Hipócrates de Quios (430.a.C.) dedicou-se ao estudo destas questões. Independente de seu método, Hipócrates parece ter demonstrado um teorema importante para a quadratura de círculos, isto é, as áreas de círculos estão para si, assim como os quadrados de seus diâmetros (Euclides, XII, 2) (BARON, 1985, v.1, p.33).

Particularmente, o problema da Quadratura do Círculo consiste em construir um quadrado a partir de um círculo dado, com instrumentos euclidianos, tal que o quadrado venha a possuir a mesma área que o círculo.

Algebricamente, sabemos hoje em dia que, quando a área de um Círculo (Ac) é igual a de um Quadrado (Aq), sendo r o raio do círculo e l o lado do quadrado, temos a relação $Ac = Aq$ => $r^2\pi = l^2$ => $l = \sqrt{\pi}\, r$.

Explicitamente, o lado do quadrado deve ser $\sqrt{\pi}\, r$. Mais particularmente, quando o raio do círculo for 1, temos que o lado do quadrado é $l = \sqrt{\pi}$, ou seja, para construir o quadrado, temos que construir um segmento com esse valor de medida.

Há indícios que já no papiro de Rhind, datado de aproximadamente 1600 a.C., havia problemas relacionados à área do círculo. Este papiro foi adquirido por Alexander Henry Rhind, um escocês que o comprou por volta de 1850. Escrito em hierático, tem aproximadamente 6m de comprimento. Tal documento também ficou conhecido por papiro de Ahmes, por causa do escriba que o copiou, possui 85 problemas de Matemática compostos por trigonometria, sistemas lineares, frações e entre outros atualmente encontra-se no Museu Britânico (STRUIK, 1989; ROQUE e CARVALHO, 2012; SANCHO e JOFRE, 2008).

Embora as pirâmides construídas no Egito sejam monumentos que exigiram muitas habilidades, há dúvidas sobre o quê, de fato, os egípcios conheciam no tocante ao que hoje denominamos Geometria. Roque e Carvalho (2012) alegam que o caráter da geometria era predominantemente métrico, isto é, voltado para o cálculo de áreas e volumes.

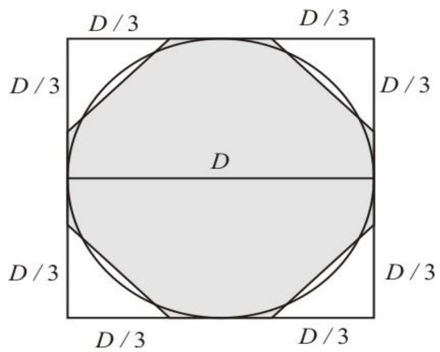
De acordo com Hobson (1913, p. 13), no papiro de Rhind, há um problema precursor do problema da Quadratura do Círculo. Os egípcios consideravam a área de um círculo igual a de um quadrado, cujo lado era o diâmetro do círculo subtraído de 1/9 (HOBSON, 1913, p. 13). Roque e Carvalho (2012) alegam que a constante "1/9 devia ser aprendida e utilizada pelos egípcios, sempre que quisessem calcular a área de um círculo", no entanto não parece haver indícios do motivo. Usando a fórmula egípcia, obtemos um valor para $\pi = 3{,}16$ aproximadamente.

Isto é, sempre que se queria calcular a área de um círculo, bastava multiplicar o diâmetro por 1/9, subtrair do todo. O resultado obtido deveria ser elevado ao quadrado.

Se o diâmetro fosse 9, por exemplo, deveríamos fazer, (1/9).9 e subtrair de 9, obtendo 8. O resultado procurado seria 8 vezes 8, ou seja 64.

Kilhian (2011, s/p) apresenta uma justificativa, alegando que havia uma aproximação realizada por meio de uma figura auxiliar, o octógono.

Figura 1 – Quadratura do Círculo para os Egípcios



Fonte: KILHIAN, 2011.

A partir do quadrado de lado D, o nosso objetivo é encontrar o valor da área do círculo, cujo diâmetro é D. Então vamos dividir cada suposto lado em três, sendo cada medida D/3. Desse modo, conseguimos criar um octógono. Consequentemente, temos 4 triângulos. Vamos encontrar a área desses triângulos, denotada por A_t:

$$A_t = \frac{l.\square}{2} = \frac{\frac{D}{3}\frac{D}{3}}{2} = \frac{D^2}{18}$$

Como temos 4 triângulos, a área total é: $4A_t = \frac{2D^2}{9}$

Como sabemos que a área do quadrado é $A_q = D^2$, temos que a área do octógono A_o, é de $A_o = A_q - 4A_t = D^2 - \frac{2D^2}{9} = \frac{7D^2}{9}$ (i).

Supondo que o círculo tinha diâmetro 9, então substituindo em (i), temos que a área do octógono é 63. O método exposto no papiro, de acordo com Kilhian (2011, s/p), afirma que aqui é feita uma aproximação para 64, que é um quadrado perfeito, obtendo uma área aproximada para o círculo.

Comparando o método empregado com nosso conhecimento atual, sabemos que a área do círculo é dada por $A_c = \pi r^2$, assim, dado um octógono de diâmetro 9, cuja área se aproxima de um quadrado de lado 8, obtemos uma aproximação para π. De fato,

$64 = \pi(\frac{9}{2})^2$, então temos que $\sqrt{\pi} \sim 1,7777...$, o que fornece $\pi \approx 3,16$.

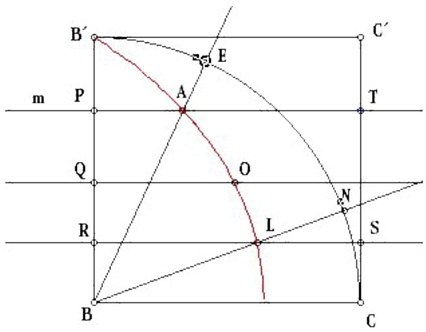
Os gregos foram os primeiros, de fato a tentar construir o problema usando somente régua não graduada e compasso.

Para Santana (2015), o percursor do problema foi Anaxágoras de Atenas (499-417a.C.) que, por ter uma mente muito à frente do seu tempo, fora preso e, durante o tempo na prisão dedicou-se para o problema da Quadratura do Círculo.

Hípias de Élis (443-399 a.C.) também teria se dedicado ao problema. Sua contribuição para a Quadratura do Círculo foi criar uma curva mecânica, a Trissetriz de Hipias, que nos dá 100% de aproximação da área do Círculo para o Quadrado. Esta primeira grande tentativa de resolver o problema data de aproximadamente 425 a.C. Este geômetra, no entanto, teria utilizado curvas e construções que não podem ser feitas apenas com régua e compasso (Carvalho, 2007, p.122).

Papus de Alexandria (300 d.C.) no livro IV da sua *Colecção Matemática*, descreve esta tentativa de solução que é uma das mais antigas curvas da matemática posterior apenas à reta e a circunferência. A descrição dada por Papus sobre a principal propriedade desta curva torna bastante admissível que esta tenha sido inventada durante as tentativas da trissecção do ângulo. Esta curva foi posteriormente usada por Dinostrato para a quadratura do círculo e passou a ser chamada algumas vezes de trissectriz, outras vezes quadratriz. Arquimedes também explorou a solução do problema utilizando-se de *neusis* ou construção por ajustamento, que consiste em ajustar um segmento dado entre duas curvas dadas.

Figura 3 – Trissetriz de Hipias



Fonte: SOUZA, 2003.

A curva é construída da seguinte maneira: o segmento BB’, com uma certa taxa, caminha até BC, criando o arco B’C. O segmento B’C’, com a mesma taxa do outro segmento, desce verticalmente até BC de tal forma que a intersecção entre a curva e criada anteriormente e o segmento B’C’ forme a curva destacada em vermelho[1].

Antes de prosseguirmos com a revisão bibliográfica que ora apresentamos, vamos nos deter um pouco mais nesta solução de Hípias e na trissetriz.

Usamos o Geogebra para construir esta curva durante uma exposição que realizamos sobre o problema. Embora, neste primeiro momento, esta atividade tenha sido aplicada à alunos do Ensino Superior, acreditamos que pode ser realizada por estudantes do Ensino Médio. Assim, numa próxima etapa do projeto, estaremos aplicando a atividade em salas de aula da Educação Básica. Esta percepção, que consideramos um primeiro resultado parcial da pesquisa, não teria ocorrido sem a cuidadosa revisão histórica/bibliográfica que fizemos, ressaltando a importância do conhecimento de História da Matemática para o futuro professor de matemática.

Arquimedes (287 a.C. ?) em sua obra Medição do Círculo (Proposição 1) mostrará que a relação entre a área da circunferência e o raio obedece à Área = ½

[1] Os detalhes da demonstração da construção da Trissetriz fogem ao escopo deste trabalho, mas podem ser encontrados no vídeo “Trissectriz de Hípias”, disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=tk2AgMZANKU>.

circunferência x raio. Arquimedes usou uma demonstração por redução ao absurdo, na verdade um absurdo duplo: querendo provar que C=K, prova-se que C>K e C<K nos leva a uma contradição. O termo *exaustão* foi introduzido por Grégoire de Saint-Vicent (1647) para descrever essa forma de demonstração (BARON, 1985, v.1, p.37).

Com as ideias de Anaxágoras, Arquimedes tentou resolver o problema usando média geométrica. Primeiramente, ele provou a seguinte proposição "A área de um círculo é igual a de um triângulo retângulo quando a base deste retângulo possui a medida igual ao raio e a altura respectiva a esta base possui a medida igual a da circunferência". Esta proposição gerou a construção da Triangulatura do Círculo, contudo a construção da Quadratura do Círculo por este método veio mais tarde (SANTANA, 2015).

Durante muitos séculos com a Europa no seu "período de trevas", mais conhecido como Idade Média, muitos conhecimentos científicos foram desconsiderados. No século XVI, no Iluminismo, muitos cientistas voltaram a atuar na Matemática com um aspecto mais teórico do que havia antes com outros povos.

Leonardo da Vinci (1452 – 1519), deste período, é outro nome associado a este problema da quadratura do círculo, em seu famoso *O Homem de Vitrúvio*, constata-se que o círculo e o quadrado, de área desigual, são completados por um novo círculo, respectivamente, em que as medidas das áreas passam a ser "iguais" em cada par círculo-quadrado.[2]

Nesse novo contexto cultural a impossibilidade de existir a demonstração da Quadratura do Círculo, por meio da utilização de instrumentos gregos (régua não graduada e compasso) começou a ser identificada.

Um primeiro passo importante nesta direção foi a construção de polígonos de n lados. Gauss, com 19 anos, conseguiu construir um polígono de 17 lados. Segundo DIAS (2008, p.1), para tanto, demonstrou o seguinte teorema:

Teorema 1: Se o número de lados de um polígono for escrito da forma n= $2^{2^k}+1$, então o polígono pode ser construído com régua não graduada e compasso.

Os números da forma $2^{2^k}+1$ são, atualmente, conhecidos como primos de Fermat. Todavia, nem todos os números escritos assim são primos, fato que Gauss

[2] http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/davinci/matematico.htm. Acesso em 05/05/2009.

provou para $k = 5$. Os números onde $0 \leq k \leq 4$, de fato, são primos. (SANTOS, 2012)

Antes de concluir este teorema, Gauss afirmou que as raízes de um polinômio escrito da forma $x^p = 1$, com p primo, podem ser determinadas a partir de uma sequência de polinômios particulares, nos quais o grau dos fatores são fatores primos e são decompostos d do fator $p - 1$.

Um exemplo é, $p = 2^m + 1$, onde temos que $p - 1 = 2^m$. Ou seja, o único fator primo de $p - 1$ é 2. A respeito do m, ele pode ser um não primo, ou seja, existe r e $s \in N$ tal que $m = r.s$. Disto, podemos escrever $p - 1 = 2^{rs} = (2^r)^s$ então $p = (2^r)^s + 1$. (COLE, 2013). Em particular, se temos $r = 2$, temos a forma de um Primo de Fermat.

Outra etapa importante relaciona-se à teoria dos números algébricos e transcendentes. Necessitamos de algumas definições. Nossa referência neste ponto é Monteiro (1969).

Seja E um subconjunto do plano R^2 e suponhamos que E possua pelo menos dois pontos. Toda reta que passa por dois pontos de E é chamada reta construtível a partir de E. Toda circunferência que tem como centro um ponto de E e que passa por um ponto de E é chamada circunferência construtível a partir de E. Todo ponto de R^2 que é a intersecção de duas retas, ou, de uma reta e uma circunferência, ou, de duas circunferências construtíveis a partir de E é denominado ponto construtível a partir de E. Indicaremos por s(E) o conjunto de todos os pontos construtíveis a partir de E.

Notemos que $E \subset s(E)$. De fato, se p é um ponto qualquer de E, então existe $q \in E$ tal que $p \neq q$, sendo assim, a reta L determinada por p e q é construtível a partir de E, e o mesmo acontece com a circunferência r de centro q e que passa pelo ponto p. Como $p \in L \cap r$, podemos concluir que p é construtível a partir de E, logo $p \in s(E)$ e então $E \subset s(E)$.

Consideremos o subconjunto $E_0 = \{(0,0), (1,0)\}$ do plano R^2 e para todo número natural n ponhamos $E_{n+1} = s(E_n)$.

$E_0 = \{(0,0), (1,0)\}$, n = 0

$E_1 = s(E_0)$, ou seja: conjunto dos pontos construtíveis a partir de E_0.

$E_2 = s(E_1)$, ou seja: conjunto dos pontos construtíveis a partir de E_1.

$\vdots$

$E_{n+1} = s(E_n)$.

Conforme visto anteriormente $E_n \subset E_{n+1}$ e $E_n \neq E_{n+1}$.

O seguinte teorema é fundamental neste contexto: Todo ponto do conjunto H = $\bigcup_{n\in N} En$ é denominado ponto construtível. Toda reta/circunferência construtível a partir de H é denominada reta/circunferência construtível.

O objetivo do problema geral de construção geométrica com auxílio de régua e o compasso é descrever o conjunto H de todos os pontos construtíveis do plano R^2.

Um resultado importante neste contexto é o teorema o qual afirma que "Um número real *u* é construtível se, e somente se, existe uma seqüência $(Kj)_{0\leq j\leq m}$ de subcorpos de R tal que: 1) $K_o = Q \subset K_1 \subset ... \subset K_{m-1} \subset K_m$; 2) $[K_j : K_{j-1}] \leq 2$ para j = 1, 2, ..., m; 3) $u \in K_m$". (MONTEIRO, 1969, p. 67).

Chamamos de número algébrico qualquer solução de uma equação polinomial da forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$, onde os a_i´s são números inteiros. Um número real que não é algébrico chama-se transcendente.

O ponto importante aqui é que todo número real construtível é algébrico sobre Q e o grau de u sobre Q é uma potência de 2, resultado demonstrado somente em 1837.

Finalmente, com a Teoria de Galois, feita por Évariste Galois (1811-1832), Carl von Lindemann provou, em 1874 que π é um número transcendente (Figueiredo, 1990). Finalmente, com a teoria dos números transcendentes, em 1934, Gelfond e depois, Schneider em 1935, demonstraram de forma independente o 7º. Problema de Hilbert, sobre transcendência de números como $2^{\sqrt{2}}$.

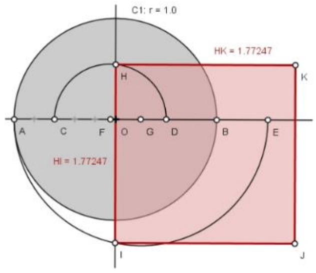
Após 1990, com estes resultados obtidos, encontramos algumas construções que aproximam em mais de 99% a área do círculo com a área de um quarado dado.

Dentre os matemáticos modernos que se dedicaram ao problema, destaca-se Ramanujan, cuja vida é relatada no recente filme "O homem que viu o infinito". Sobre trabalhos relacionados ao problema da Quadratura do Círculo, Ramanujan concluiu que o lado do quadrado deve ser $\frac{\sqrt{355}}{\sqrt{113}}$, o que, comparado com $l = \sqrt{\pi}$ chega a uma aproximação de 99,9999915...%[3].

[3] A construção de Srinivasa Ramanujan e os resultados podem ser encontrados como "Método de Srinivasa Ramanujan" em: <https://www.geogebra.org/m/WHsPjWnj>. Acesso em 28/04/2017

Hobson (1913) fez várias contribuições matemáticas, como um estudo em Convergência de Séries de Funções Ortogonais. A publicação "Squaring the Circle: a history of the problem" em 1913 (ROBSON, 1913) oferece uma construção[4] que se aproximou em 99,998467...% comparado com (1). Consideremos um esboço da demonstração.

Figura 4 – Método de Ernest Hobson



Fonte: Kilhian (2012, s/p).

O nosso objetivo é encontrar o segmento HI, ou seja, o lado do quadrado. Então, para facilitar, vamos considerar um círculo de raio 1.

Por construção, OA=1, OC=3/5, OD=1/2. Vamos tentar encontrar a medida HF, que é o raio do semicírculo menor. Então:

O diâmetro CD: CD=OC+OD=11/10. Assim temos que FC=FD=11/2

O segmento OF é dado por: OF=OC-FC=3/5-11/20=1/20

Aplicando o Teorema de Pitágoras em FOH:

$(FO)^2+(OH)^2=(FH)^2 \Rightarrow OH=\sqrt{\frac{3}{10}}$ (1)

Da mesma forma, vamos encontrar a medida GI(raio) para o semicírculo maior:

Por construção: AB=2 e BE=1/2

O diâmetro do semicírculo é AE=AB+BE=5/2 e temos que AO=OE=5/4

O segmento OG=OE-GE=1/4

Aplicando o Teoremaa de Pitágoras em GOI:

$(GI)^2=(OI)^2+(OG)^2 \Rightarrow (OI)^2==3/2 \Rightarrow OI=\sqrt{\frac{3}{2}}$ (2)

Então, como queríamos HI=OH+OI => HI= 1,77246742..., concluímos que o lado do quadrado é aproximadamente $l=\sqrt{\pi}$.

[4] A construção e o resultado citado acima pode ser encontrados na homepage "Método de Ernest Hobson": <https://www.geogebra.org/m/Df6dyRc7>. Acesso em 28/04/2017

3 Considerações Finais

Apresentamos neste trabalho resultados sobre a revisão bibliográfica que realizamos sobre o problema da Quadratura do Círculo, um dos três problemas clássicos da antiguidade. Passando por considerações que abarcaram desde a época dos egípcios, passando por matemáticos gregos como Hípias e Arquimedes, detivemo-nos em Gauss e a constatação do resultado de este problema relaciona-se ao grau de uma extensão algébrica. Sendo π um número transcendente, o problema não possui solução se utilizados como instrumentos apenas régua não graduada e compasso.

Todavia, ao longo do percurso histórico que fizemos, pudemos conhecer resoluções propostas que eram mecânicas, isto é, consideravam, por exemplo, o deslizar de curvas umas sobre as outras.

Desta forma, usamos o Geogebra para construir a curva conhecida como a **Trissetriz de Hipias** durante uma exposição que realizamos sobre o problema. Embora, neste primeiro momento, esta atividade tenha sido aplicada à alunos do Ensino Superior, acreditamos que pode ser realizada por estudantes do Ensino Médio.

Assim, numa próxima etapa do projeto, estaremos aplicando a atividade em salas de aula da Educação Básica. Esta percepção, que consideramos um primeiro resultado parcial da pesquisa, não teria ocorrido sem a cuidadosa revisão histórica/bibliográfica que fizemos, ressaltando a importância do conhecimento de História da Matemática para o futuro professor de matemática.

4 Referências

BARON, Margareth. **Curso de História da Matemática** - A Matemática Grega, vol1, UNB, 1985.

CARNEIRO, J. P. Q. Construções Possíveis usando régua e compasso. *In:* Eduardo Wagner, **Construções Geométricas**, Coleção do Professor de Matemática, SBM, IMPA, 1993.

CARVALHO, João Pitombeira. **Os três problemas clássicos da Matemática Grega.** Programa de Iniciação Científica da OBMEP, IMPA, 2007.

COLE. B.S. Polígonos Estrelados Regulares. **(Dissertação)** Recife: Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2013

CORNELLI, G. ; COELHO, M.C.M. "Quem não é Geômetra não Entre!" Geometria, Filosofia e Platonismo. **Kriterion**.Belo Horizonte, nº 116, Dez, 2007, p. 417-435.

DIAS. C.H.B.B.; **Construção de um Polígono Regular de 17 lados**. Universidade Estadual de São Paulo, 2008.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática.** Campinas, Unicamp, 2004.

FIGUEIREDO, D. **Números Irracionais e Transcendentes.** Rio de Janeiro:SBM, IMPA, 1985.

FIORENTINI, Dario & LORENZATO, Sérgio. **Investigação em Educação Matemática – percursos teóricos e metodológicos.** Campinas: Autores Associados, 2006.

HOBSON, E. W. **Squaring the circle a history of the problem**. London: Cambridge University Press, 1913. Disponível em https://ia802604.us.archive.org/31/items/squaringcirclehi00hobsuoft/squaringcirclehi00hobsuoft.pdf Acesso em 13/05/2017.

KILIHAN, K.; **A Quadratura do Círculo Pelo Método de Ernest Hobson.** Novembro, 2009. Disponível em:<http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2012/09/a-quadratura-do-circulo-pelo-metodo-de.html> Acesso em: 28 abr. 17

KILIHAN, K.; **Aproximação de PI para os Egípcios.** Maio, 2011. Disponível em: http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2011/05/aproximacao-de-pi-pelos-egipcios.html Acesso em: 28 abr. 2017

MONTEIRO, Jacy. **Teoria de Galois.** IMPA, 7º. Colóquio Barsileiro de Matemática, 1969.

ROQUE, T; CARVALHO, J.B.P. **Tópicos de História da Matemática.** Coleção Profmat. Rio de Janeiro:SBM, IMPA, 2012.

SANCHO. J.A.A.; JOFRE. G; **Alexander Henry Rhind.** Julho 2008. Disponível em: < http://egiptologia.com/alexander-henry-rhind-de-sibster/> Acesso em: 29 abr. de 2017

SANTANA, R. S.. O problema da Quadratura do Círculo: Uma Abordagem Histórica Sob a Perpectiva Atual**. Dissertação** (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2015. Disponível em http://tede.ufam.edu.br/bitstream/tede/4551/2/Disserta%C3%A7%C3%A3o%20-%20Erivaldo%20Ribeiro%20Santana.pdf Acesso em 04/04/2017.

SANTOS, J.C. **Quadratura do Círculo.** Maio 2012 Disponível em: http://www.fc.up.pt/mp/jcsantos/quadratura.html Acesso em: 28 abr de 2017

STRUIK, D. **História Concisa das Matemáticas.** Lisboa: Gradiva, 1989.