O CASO DA LAGOA DAS LÁGRIMAS: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE NOÇÕES DE CÁLCULO INTEGRAL COM O AUXÍLIO DE *SOFTWARES*

Renata Grossko
Universidade Estadual do Centro-Oeste
re.grossko@yahooo.com.br

Márcio André Martins
Universidade Estadual do Centro-Oeste
mandre@unicentro.br

Dhyonatan Cais
Universidade Estadual do Centro-Oeste
dhyonatancais@hotmail.com

Resumo:
O Cálculo Integral é um conteúdo raramente visto por alunos no ensino básico, além de ser intitulado por muitos como difícil. Apresentamos aqui uma proposta de sequência didática, cujo objetivo é mostrar como o Cálculo Integral pode ser inserido no ensino básico, desde que seja trabalhado adequadamente. A proposta, cujo tema é a Lagoa das Lágrimas, localizada no centro de Guarapuava-PR, se desenvolve para responder a questão: Quanto deve chover para a Lagoa transbordar? Esta questão se abre em várias outras que são respondidas ao longo do texto. Para isso, será calculada a área da superfície da Lagoa, o que demanda recursos do Cálculo Integral e o auxílio *softwares* matemáticos. Por fim, ao encontrar a área, podemos calcular o volume de chuva necessário para a Lagoa transbordar. Este trabalho resulta em algo prático e dinâmico para ser desenvolvido em sala de aula, de forma contextualizada, dando assim significado ao conteúdo.
Palavras-chave: Área. Cálculo Integral. Ensino Básico.

Introdução

Quando criança todos escutaram histórias que nos encantavam, varias delas eram contos urbanos locais que são passados de geração em geração, de forma oral ou escrita, sobre a região em que moramos e sobre pessoas que habitaram lá no passado. De acordo com Darnton “[...] os contos populares são documentos históricos. Surgiram ao longo de muitos séculos e sofreram diferentes transformações, em diferentes tradições culturais”. (DARNTON, 1986, p. 26). A cidade de Guarapuava, localizada no estado do Paraná, possui algumas lendas populares na região, sendo uma delas a lenda da Lagoa das lágrimas. Esta conta a história de uma índia, cujo noivo foi lutar na guerra, porém ele acaba falecendo nela, inconsolada a índia chora demasiadamente, e das lágrimas surge um lago, assim, originou o nome da lagoa[1]. Esta é uma das varias versões existentes da lenda, pois como todo conto urbano, ela tem oscilações de uma para a outra.

A proposta que será apresentada está na perspectiva de resolução de problema, como retrata as Diretrizes Curriculares da Educação Básica de Matemática e os Paramentos Curriculares Nacionais. Sua flexibilidade de desenvolvimento possibilita ao aluno aplicar vários métodos e caminhos para solucionar um determinado problema, saindo da suposição que existe apenas um meio de resolvê-lo; explora a diversidade de pensamentos da sala de aula; e pode abordar vários conteúdos em apenas um problema, podendo haver até interdisciplinaridade.

> [...] a presente metodologia de ensino visa o desenvolvimento de habilidades metacognitivas, favorecendo a reflexão e o questionamento. O aluno aprende a pensar por si mesmo, levantando hipóteses, testando-as, tirando conclusões e até discutindo-as com os colegas. (MENDES, 2009, p.71)
>
> [...] A resolução de problemas é encarada como uma metodologia de ensino em que o professor propõe ao aluno situações-problema caracterizadas pela investigação e exploração de novos conceitos. (MENDES, 2009, p.71)

Esta proposta de sequência didática tem como alvo o professor de modo que ele possa realizar a conexão dos alunos com a cultura de sua cidade, evidenciando a riqueza histórica que esta possui; mostrar que os conteúdos ensinados em sala têm uma aplicação prática e também propiciar o ensino de novos conteúdos. De acordo com Mendes (2009, p.91) "[...] a investigação histórica pode contribuir para que o processo de cognição matemática, em sala de aula, se desenvolva de maneira significativa". Neste sentido, dentro desse panorama, usando um contexto histórico, proporemos o estudo do caso da Lagoa das Lágrimas, apresentando um questionamento que provoque o interesse aos alunos, um problema que cause uma busca pela resposta e uma investigação matemática. "*Quanto deve chover para a Lagoa das Lágrimas transbordar?*"

[1] A versão completa da lenda da Lagoa das Lágrimas encontra-se nos sites: http://oproximoroteiro.blogspot.com.br/2010/09/lagoa-das-lagrimas-uma-historia-de-amor.html.http://binoculobrasil.besaba.com/cultura/guarapuava-e-suas-lendas-a-lenda-da-lagoa-das-lagrimas/.

Figura 1: A Lagoa das Lágrimas
Fonte: Google imagens

Esta questão acarreta em outras que devemos responder parar solucionar a inicial. Qual o volume de água necessário para que a Lagoa das Lágrimas transborde? Para estimarmos o volume precisaremos da área. Como a área pode ser obtida? Esta é uma premissa que deve ser investigada com os alunos. Devemos ressaltar que se trata de uma figura irregular. Como achar a área de uma figura irregular? Neste sentido, ao considerarmos a formação em Licenciatura em Matemática, propomos como questão provocadora e direcionada ao professor da sala de aula: os seus conhecimentos em Cálculo Integral possibilitam uma abordagem pedagógica desta natureza em nível de Ensino Básico?

Metodologia

A questão central esta na possibilidade de a Lagoa das Lágrimas transbordar. Para investigar esta situação é necessário se estudar o volume, e por consequência a área de figuras irregulares. “O conceito de área é uma noção matemática que permite comparar e medir a parte ocupada pelas superfícies” (BALTAR *apud* TELES, 2007, p.27). É um conteúdo suscetível a criatividade, que pode envolver muitas atividades dinâmicas, lúdicas e contextualizadas. A área de figuras planas é comumente abordada no ensino básico, como exemplo a área do quadrado e do retângulo, são determinadas pela expressão como ilustrado na figura abaixo, $A = b.h$ (produto da base pela altura).

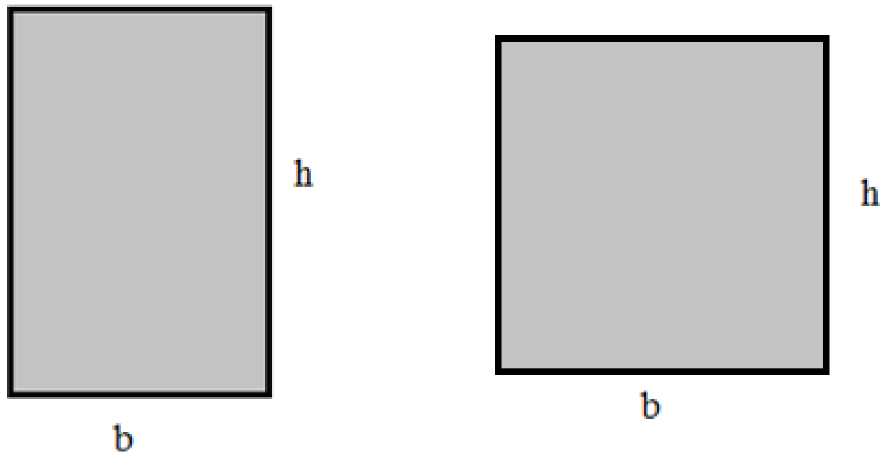

Figura 2: Retângulo e quadrado
Fonte: Autor

Entretanto, a área de figuras irregulares não é abordada com frequência. Para calcularmos a área da Lagoa das Lágrimas utilizamos esta abordagem. Uma forma é por meio da representação da Figura 1 na Figura 3, e em seguida constrói-se uma sobreposição de quadrados (Figura 4) ou retângulos (Figura 5). Todas as representações da Lagoa encontradas aqui estão em escala real.

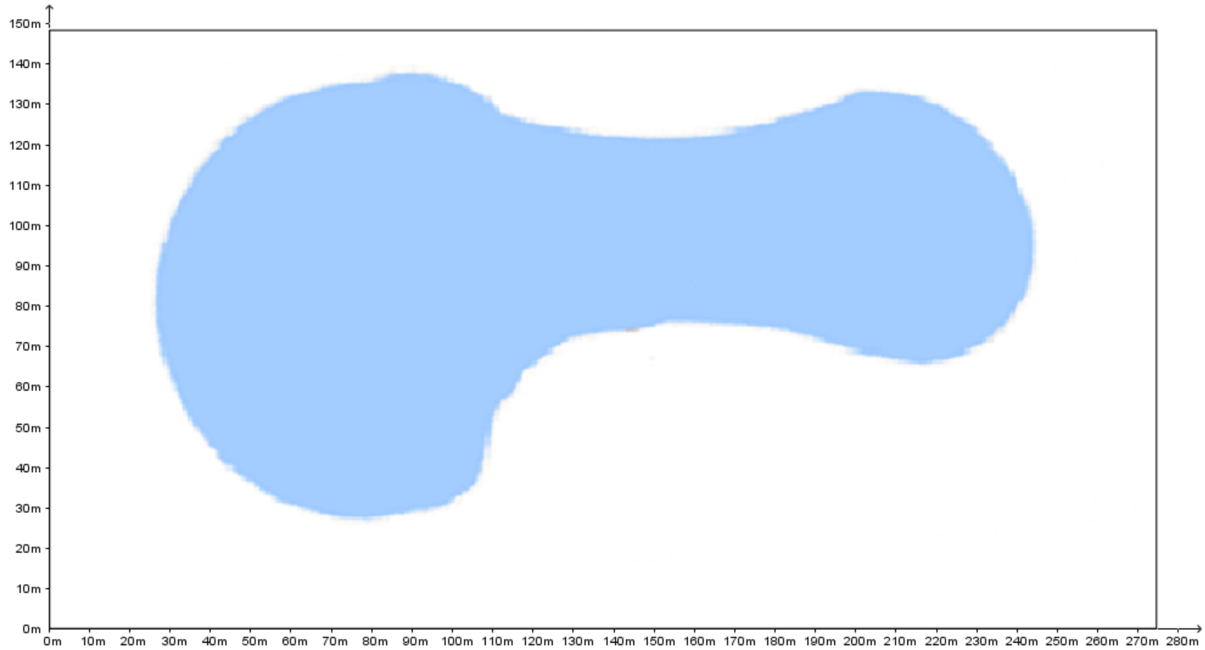

Figura 3: Representação da Lagoa das Lágrimas
Fonte: Autor

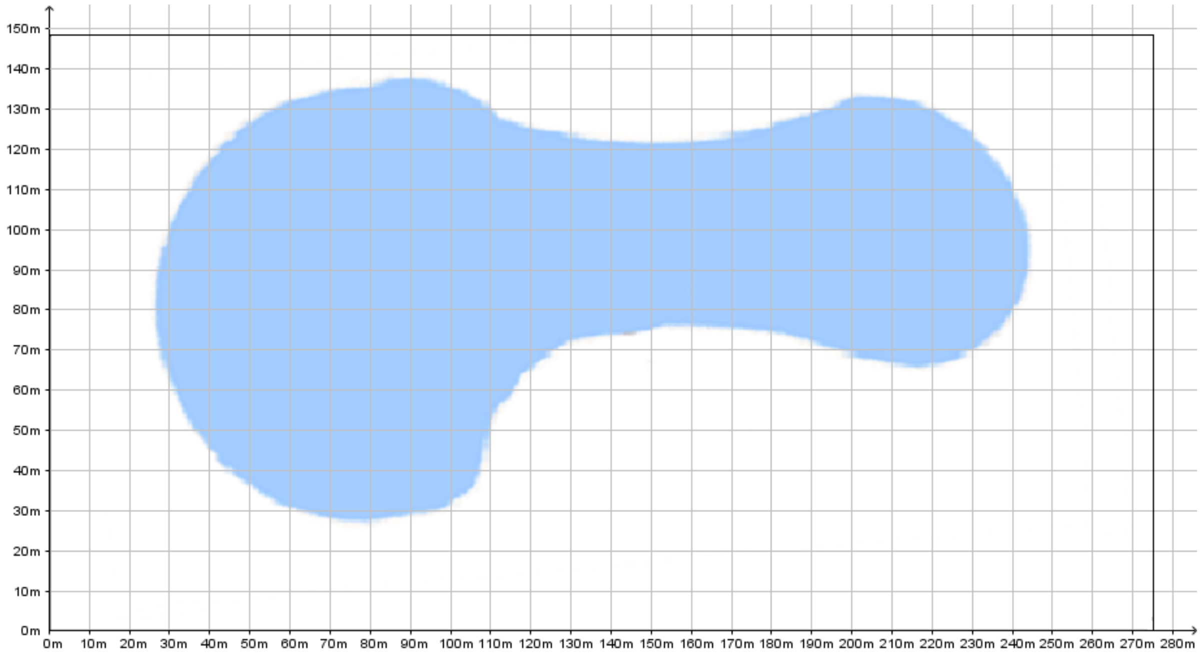

Figura 4: Divisão da Lagoa em partes iguais, quadrados
Fonte: Autor

Na Figura 4, contamos 181 quadrados que sobrepõem a Lagoa das Lágrimas, cada quadrado equivale a 100m², pois o lado do quadrado mede 10m e como vimos (Figura 2) a área é dada pelo produto da base pela altura e todos possuem a mesma área, assim, multiplicamos o número de quadrados pela sua área. O valor encontrado será 18.100 m², ou seja, é uma área aproximada para a área da Lagoa. Vamos chamar de área A, ressaltando que é um valor numérico maior que a área real.

Agora, com a sobreposição de retângulos (Figura 5), podemos encontrar outra aproximação para a área da Lagoa das Lágrimas. Como vimos anteriormente à área de um retângulo é o produto da base pela altura, calculando assim a área de cada retângulo e somando todas ao final iremos obter uma área aproximada para a Lagoa de 29.224,9m², chamaremos de área B. Comparando com a área A observamos que a área B será uma aproximação com um valor numérico muito maior que o método anterior, então para diminuir esse erro iremos fazer novamente outra sobreposição de retângulos, agora na parte inferior da Lagoa das Lágrimas, como observamos na Figura 6. Para encontrar a área da parte inferior, calcularemos a área de cada retângulo inferior e somando todas ao final o valor será de aproximadamente 12.954,1m², chamaremos de área C. Logo, basta subtrair a área B pela área C, encontrando a aproximação de 16.270,8m² para a área da Lagoa das Lágrimas, chamaremos de área D.

Comparando a área A com a área D, sabemos que a diferença entre elas é de 1.829,2m², como ainda não sabemos qual a área real não podemos afirmar qual dos métodos é mais preciso.

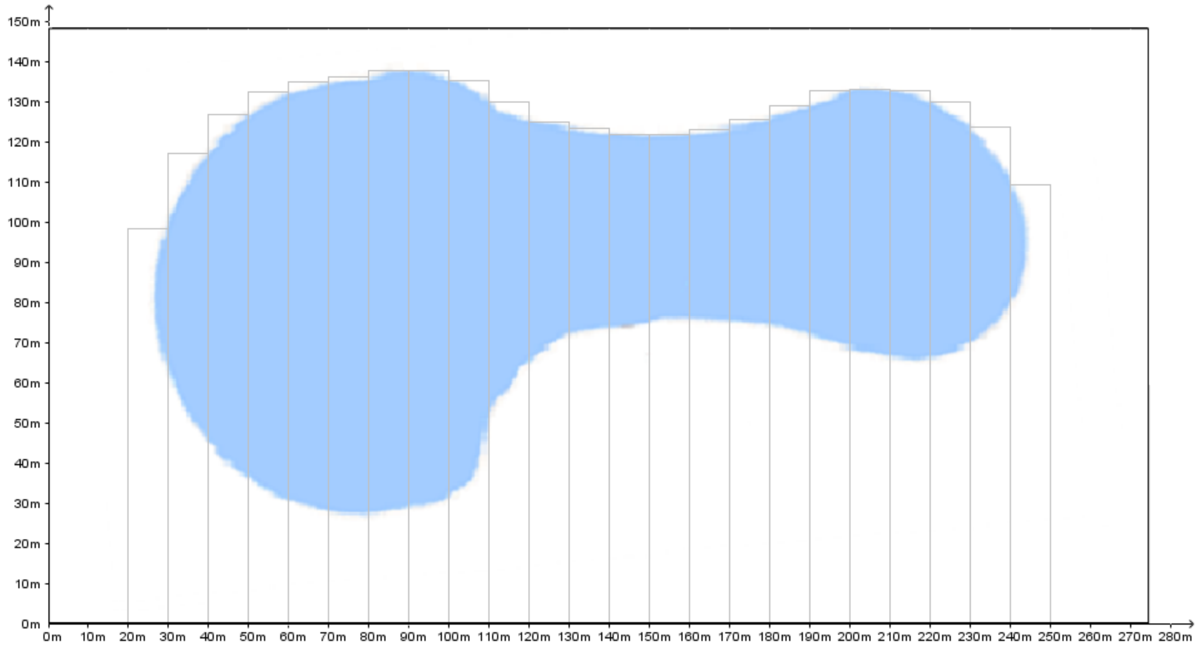

Figura 5: Divisão da Lagoa em partes iguais, retângulos
Fonte: Autor

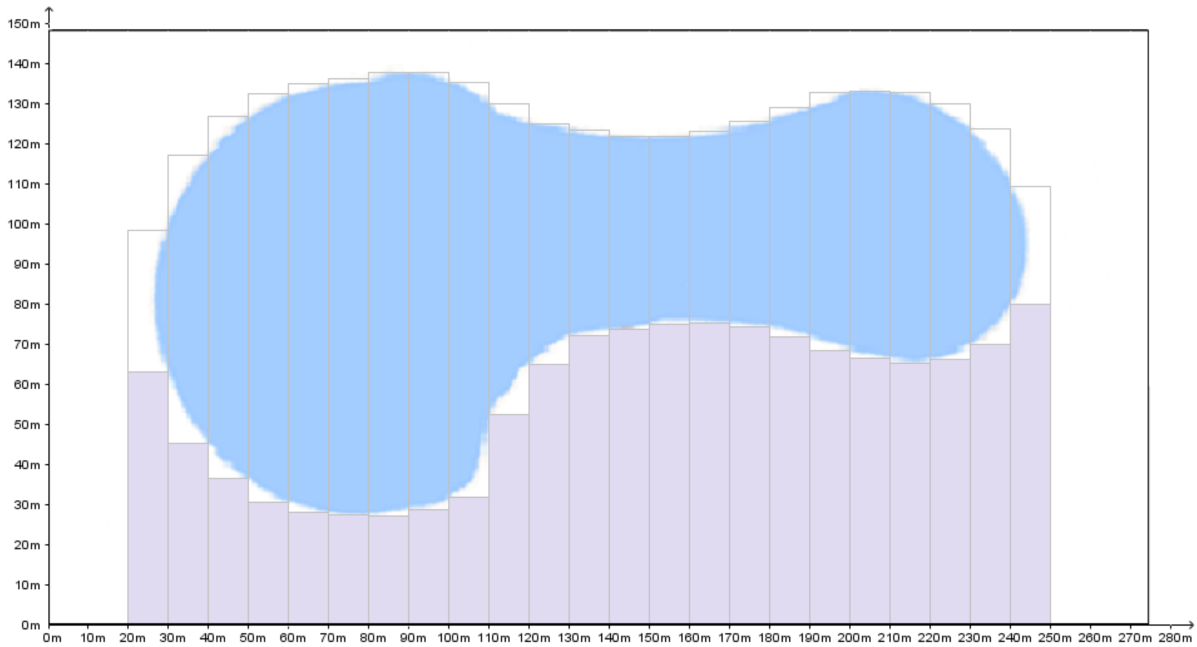

Figura 6: Divisão da Lagoa em duas partes
Fonte: Autor

Os processos utilizados anteriormente são aproximações da área da Lagoa das Lágrimas usando basicamente o Método da Exaustão, que de acordo com Guedes (2013, P.30)

"[...] consiste em buscar aproximações sucessivas da área a ser medida, por falta ou por excesso, a partir de outras já conhecidas", porém dividimos a Lagoa das Lágrimas apenas uma vez em partes iguais, e o método consiste em dividi-la novamente em mais partes do que a vez anterior, assim, chegando a uma aproximação cada vez mais perto da real.

Cálculo Integral

O conceito de Cálculo é muito antigo, Arquimedes, um grande matemático grego, possuidor de uma inteligência incrível, avançou muito no Cálculo Integral, muito antes de Leibniz e Newton, considerados os criadores do Cálculo (GUEDES, 2013, p.27).

O intervalo [a,b] em que a área da Lagoa se encontra é [27,1;243,33], usando a sobreposição de retângulos dividimos esse intervalo em vários retângulos, agora imagine dividi-lo em n retângulos $(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_k)$, assim, a soma da área será dada por $n.f(x_1) + n.f(x_2) + n.f(x_3) + n.f(x_4) + \cdots + n.f(x_k)$. Podemos escrever essa soma desse modo, $n.[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + \cdots + f(x_k)]$, como queremos encontrar uma área cada vez mais próxima da real, faremos n tendendo a zero ($n \to 0$), pois quanto menor o retângulo, mais a soma de todos eles dará uma área aproximada da real. Usando a Soma de Riemann para representar essa soma $f(x)$ obtemos $n.\sum f(x_i)$, com $i = 1;\ 2;\ 3; \dots;\ k.$, isto é, tendendo ao infinito temos um limite, $\lim\limits_{i\to\infty} \sum f(x_i)$. Assim a área será definida por A $= \lim\limits_{i\to\infty} \sum f(x_i)$, e essa área é denominada Integral $A = \int_a^b f(x_i)dx$, "Esta notação foi introduzida por Leibniz. O símbolo ∫ é denominado Sinal de Integral e nada mais é do que a letra S "alongada"."(LUÍS, 2013, P.27)

A curva da Lagoa das Lágrimas (margem) é dada por duas funções $f(x)$, simplesmente para facilitar os cálculos, pois como veremos são funções exponenciais, assim, para encontramos tais funções iremos nos auxiliar no uso do *software Graph*. "O *Graph* é um aplicativo *open source* usado para desenhar gráficos matemáticos em um sistema de coordenadas. [...]. O programa torna muito fácil visualizar uma função e colá-la em outro programa" (*Graph* traçando funções matemáticas, 2017)[2].

Primeiro entramos com vários pontos que margeiam a Lagoa das Lágrimas inferiormente formando a Série 1, depois com pontos superiores, Série 2 (Figura 7). Em

[2] Disponível em http://www.padowan.dk/. Acesso em: 02 de maio de 2017.

seguida encontramos a $f(x)$ que fornece a curva que melhor se adequa aos pontos de cada série.

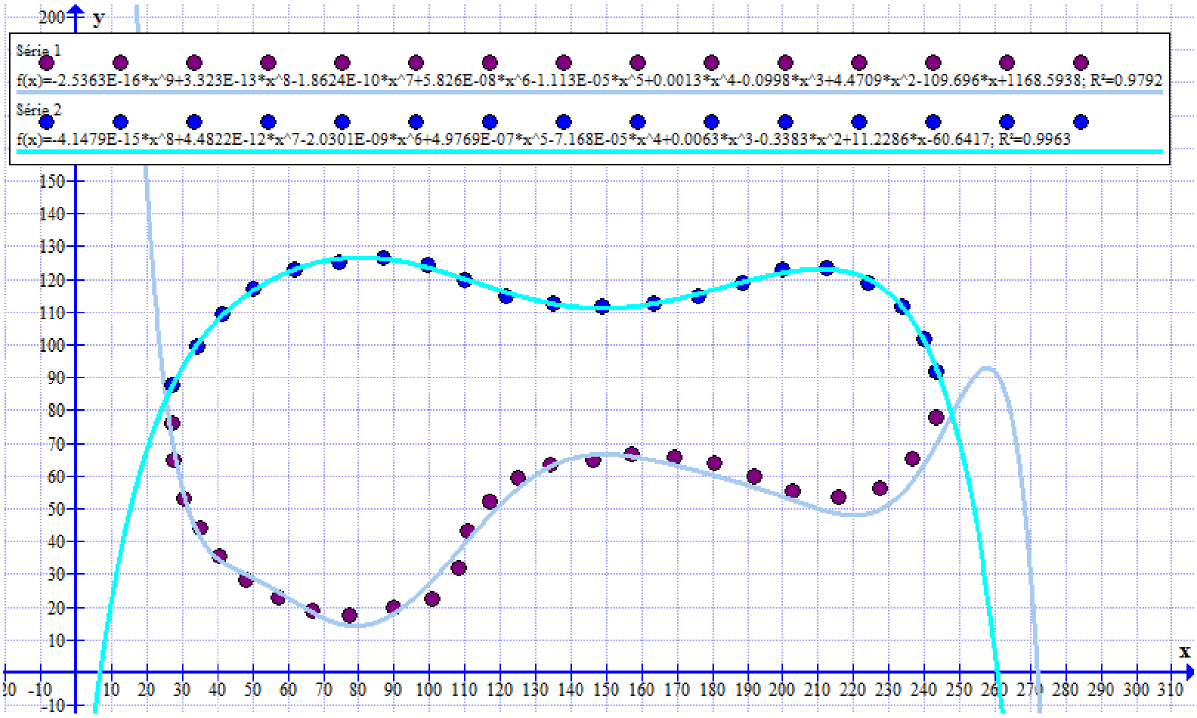

Figura 7: Funções da curva da Lagoa das Lágrimas
Fonte: Autor

Obtendo as funções, iremos encontrar a área da Lagoa das Lágrimas calculando as integrais de cada no intervalo [27,1;234,33], utilizando agora como auxílio o *software GeoGebra*. "O *GeoGebra* é um *software* dinâmico de matemática para todos os níveis de educação que reúne geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatísticas e cálculo em um pacote fácil de usar" (*GeoGebra*, 2017)[3]. Entraremos com as funções e o intervalo no *software*, logo teremos como resultado o valor numérico da área da Série 1 e da Série 2, separadamente (Figura 8), assim apenas devemos subtrair a área superior pela inferior obtendo o valor de 13.990,88m^2, ou seja, a área da Lagoa das Lágrimas. Podemos observar pela Figura 8 que existe um erro no cálculo da área, porém percebemos que encontramos uma área muito próxima da real e esse erro pode ser corrigido encontrando uma função mais apropriada, para isso seu grau será maior, oque pode ser feito no *software Graph*.

Fazendo uma comparação com a área A e com a área D encontradas anteriormente, constatamos uma diferença visível entre elas e a área encontrada com o auxílio dos *softwares*. O método de sobreposição de retângulos é mais eficaz em comparação a soma dos quadrados,

---

[3] Disponível em https://www.geogebra.org/home. Acesso em: 02 de maio de 2017.

porém utilizando o Cálculo Integral chegamos a um valor muito mais aproximado do valor real.

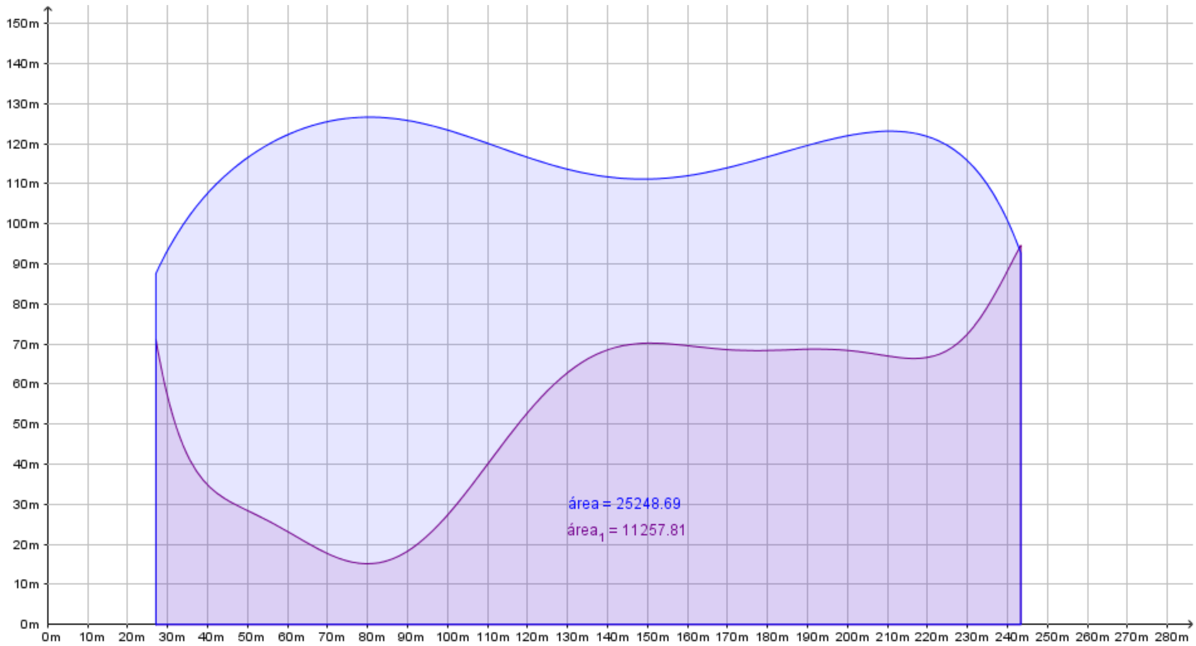

Figura 8: Área da Lagoa das Lágrima
Fonte: Autor

Concluído o cálculo da área da Lagoa, retornamos a nossa questão: Quanto deve chover para a Lagoa das Lágrimas transbordar? Para respondermos, ainda precisamos saber qual o volume de água necessário para que a Lagoa das Lágrimas transborde. O volume corresponde à capacidade e é dado pela relação $V = a_b \,.\, h$ (produto da área da base pela altura). O nível da água da Lagoa das Lágrimas se encontra em uma média de 0,4m abaixo da borda, "barranco", conforme medição realizada no local em pontos distintos. Embora não exista uma relação rígida de perpendicularidade ente o "barranco" e a lamina d'água, esta é considerada para efeito de cálculo, assim, basta calcularmos o volume usando a expressão dada, encontrando o valor de 5.569,352m^3, portanto para a Lagoa transbordar ela deve exceder esse volume.

O cálculo que utilizamos para determinar o volume é o mesmo conceito que o Pluviômetro utiliza. O Pluviômetro é um aparelho meteorológico destinado a medir, em milímetros, a altura da lâmina de água gerada pela chuva, essa altura de 1mm de chuva corresponde a 1 litro de chuva em 1m^2 de área. Ele utiliza da relação citada anteriormente ($V = a_b \,.\, h$).

O volume encontrado pode ser determinado em litros, sabendo que 1m^3 = 1000 litros, transformando esse volume em litros, temos 5.569,352m^3= 5.569.352 litros. Portanto, para a lagoa transbordar deve haver uma captação de água correspondente ao volume de 5.569.352 litros. Apesar disso ser pouco provável, pode-se considerar a possibilidade de escoamento, pelo fato da Lagoa ser abaixo do nível da rua. Podemos escrever que, para a Lagoa das Lágrimas transbordar precisa chover 5.569.352 mm, respondendo assim nossa questão inicial.

Considerações Finais

Este trabalho trouxe uma proposta para a aplicação do Cálculo Integral no ensino básico, tendo em vista os professores, de forma contextualizada e dinâmica, com o intuito de mostrar a aplicabilidade e a incomplexidade do conteúdo, se for apresentado de forma adequada no meio a ser inserido.

Cada etapa do desenvolvimento foram respondendo as questões formuladas inicialmente, tais questões surgiram para solucionar nosso problema inicial e nortearam o trabalho, para que este pudesse ser solucionado.

Evidenciamos que o Cálculo Integral possibilita resolver problemas reais, instigando a investigação e o desenvolvimento de raciocínio prático.

Referências

DARNTON, R. **O Grande Massacre de Gatos, e outros episódios da história cultural francesa**. Rio de Janeiro: Graal, 1986.

GUEDES, A. S. **Evolução no Cálculo de Áreas de Figuras Planas: de Arquimedes a Newton**. 2013.
Disponível em <http://tede.biblioteca.ufpb.br:8080/bitstream/tede/7550/5/arquivototal.pdf> acesso em 04/05/2017.

LUÍS, F. **Cálculo no Ensino Médio: área sob o gráfico de uma curva**. 2013

MENDES, I. A. **Matemática e investigação em sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem**. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

TELES, R. A. M. **Imbricações entre campos conceituais na matemática escolar: um estudo sobre as fórmulas de área de figuras geométricas planas.** 2007.
Disponível em:
<http://repositorio.ufpe.br/bitstream/handle/123456789/4125/arquivo5518_1.pdf?sequence=1&isAllowed=y> acesso 20/04/2017.