

O ENSINO DE FRACTAIS NO ENSINO FUNDAMENTAL I: UM ESTUDO NOS DOCUMENTOS OFICIAIS DO PARANÁ

Fernando Henrique Silva
UENP/CCP
fernandoh12@hotmail.com

Flávia Keiko Siviero Simada
UENP/CCP
flavia.shimada@hotmail.com

Simone Luccas
UENP/CCP
simoneluccas@uenp.edu.br

Resumo:

O presente trabalho trata de uma análise dos documentos oficiais do Estado do Paraná a respeito da Geometria Fractal e a inserção da mesma na Educação Básica. A motivação do presente trabalho surge a partir de pesquisas realizadas em periódicos da área de Matemática, nas quais nota-se a falta de trabalhos relacionados ao assunto voltados para o Ensino Fundamental I. O objetivo do trabalho é investigar como os documentos oficiais orientam a inserção da Geometria Não-Euclidiana, mais especificamente dos Fractais na Educação Básica. É apresentada uma breve fundamentação teórica da Geometria Não Euclidiana e da Geometria dos Fractais com enfoque histórico. Esta pesquisa é qualitativa de cunho documental. Foram analisados os documentos oficiais: Ensino Fundamental de nove anos orientações pedagógicas para os anos iniciais, Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná e Parâmetros Curriculares Nacionais. Foi possível notar que o ensino dos Fractais e, conseqüentemente da Geometria Não Euclidiana não são indicados pelos documentos oficiais para serem ensinados no Ensino Fundamental I, mas sim a partir do Fundamental II e Ensino Médio.

Palavras-chave: Educação matemática nos anos iniciais. Geometria Não Euclidiana. Fractais. Documentos Oficiais.

Introdução

O interesse pelo desenvolvimento desse trabalho surgiu a partir da busca por pesquisas em periódicos da área de Matemática que trabalhassem o ensino da Geometria Não-Euclidiana no Ensino Fundamental I, mais especificamente os Fractais. A partir dessa pesquisa notou-se a existência de poucos de trabalhos relacionados a esse assunto, diante disso despertou-se o interesse em desenvolver uma pesquisa que abordasse os Fractais nos anos iniciais da Educação Básica.

Tendo em vista que os conceitos básicos dos Fractais estão previstos para serem trabalhados na Educação Básica, com o intuito de que os alunos tenham um conhecimento

mais amplo das noções e conceitos geométricos, pois de acordo com Barbosa (2005), citado nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Paraná (2008, p.57)

Na geometria dos fractais, pode-se explorar o floco de neve e a curva de Koch, [...] conduzindo o aluno a refletir e observar o senso estético presente nessas entidades geométricas, estendendo para as suas propriedades, através da "regularidade harmoniosa nas suas próprias irregularidades" (BARBOSA, 2005, p.14).

Nesse sentido, entende-se que a ideia presente no ensino dos Fractais aos alunos da Educação Básica, é ampliar o conhecimento dos alunos relativo à Geometria. Assim, o objetivo deste trabalho é *investigar como os documentos oficiais orientam a inserção da Geometria Não-Euclidiana, mais especificamente, os Fractais na Educação Básica.*

A seguir é apresentado um referencial teórico que trata da Geometria não Euclidiana e, mais detalhadamente, dos Fractais.

Introdução à Geometria Não-Euclidiana

Diante das necessidades do homem em medir suas terras, surgiu o estudo da Geometria. Eudemo de Rodas, um grande filósofo do século IV a.C., considerado um dos primeiros historiadores, relata que os egípcios faziam a medição de suas terras para acompanhar o processo de inundações anuais do rio Nilo que implicavam em pagamento de impostos.

Em meados de 600 a.C. os filósofos gregos começaram a sistematizar seus conhecimentos, tais como Tales de Mileto (624-558 a.C.), Pitágoras (570-495 a.C.), entre outros outros. Entre esses matemáticos, o grego Euclides, por volta de 300 anos a.C., escreveu uma obra de 13 volumes, denominada "Os Elementos", dos quais nove eram destinados à Geometria, dando forma, coesão e lógica à mesma.

Na obra "Os Elementos", Euclides enuncia definições, noções comuns e postulados, nos quais se baseia para sistematizar as proposições que demonstra.

- I. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
- II. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
- III. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
- IV. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
- V. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado do qual estão os menores do que dois retos (EUCLIDES, 2009, p. 98).

Segundo STRUIK (1989, p. 32), o quinto postulado do livro I não é muito claro em Euclides

[...] denomina “axioma das paralelas”, de acordo com o qual, por um ponto passa uma reta paralela dada uma só. Diante das tentativas de reduzir esse axioma a um teorema conduziram, no século XIX, a uma apreciação completa de sensatez do ponto de vista de Euclides ao adapta-lo em um axioma e levaram à descoberta das chamadas geometrias não euclidianas.

Diante do raciocínio das tentativas em provar se o 5º postulado de Euclides era de fato um postulado ou um teorema, os matemáticos Bolyai (1802-1860), Lobachevsky (1792-1856), Riemann (1826-1866), e Gauss (1777-1855), acabaram desenvolvendo novos conceitos e ideias que extrapolavam a Geometria Euclidiana, resultando na Geometria Hiperbólica e na Geometria Elíptica. Outra Geometria Não-Euclidiana que também se desenvolveu foi a Fractal, tema deste trabalho.

Introdução à Geometria Fractal

Definir fractal é um problema que ainda está em aberto na Matemática, *fractus* é um adjetivo cujo verbo *frangere*, cujo significado é quebrar, ou seja, criar fragmentos irregulares, fragmentar. Não existe ao certo algo que defina o que é fractal, aqueles que tentaram definir deixaram algumas dúvidas, seu sistematizador foi Benoit Mandelbrot (1924-2010), e segundo Barbosa (2002, p. 9)

[...] essas formas geométricas possuem, entre outras, uma propriedade especial, que pode ser considerada característica. Esses entes constituem uma imagem de si, própria em cada uma de suas partes. Segue que suas partes lhe são semelhantes. Propriedade conhecida como auto-similaridade.

Pode-se dizer que a Geometria Fractal é considerada uma ciência do CAOS, cujo desenvolvimento foi potencialmente estimulado pelo avanço tecnológico. Barbosa (2002, p.19), reforçando os dizeres de Mandelbrot, afirma que:

[...] o conceito de fractal ainda deixa muito a desejar, principalmente no caso de se querer uma definição formal, que caiba ao ser ao só ser. Entretanto, essa dificuldade não deve ser obstáculo na Educação, a qual pode simplesmente convir com uma conceituação simples e de fácil entendimento. Bastará considerarmos a auto-similaridade.

A Geometria Fractal pode representar diversos fenômenos naturais, e ainda ser aplicada a fenômenos sociais; contudo cabe afirmar que os Fractais são formas geométricas em que uma parte se assemelha ao todo, ou seja, ela é obtida por meio de um processo de

iteração, em que estes processos não alteram o formato original, sendo representado em escalas distintas.

Os fractais podem ser encontrados em todo o universo natural e em quase toda Ciência, desde os aspectos das nuvens, montanhas, árvores, brócolis, couve-flor, relâmpagos, na arte e na Matemática, como apresentam as figuras abaixo.

Figura 1: folha da samambaia



Fonte¹

Figura 2: couve-flor



Fonte²

As Figuras 1 e 2, são representações de fractais naturais. É possível encontrar na natureza diversas representações como estas.

Janos (2008, p. 1) apresenta logo na introdução de seu livro que

[...] o que os matemáticos descobriram é que este fenômeno de semelhança está provavelmente muito mais presente na natureza do que o leitor talvez imagine. Isto ocorre nas estruturas das plantas, das montanhas, do cosmos, do cérebro, etc. Na verdade, poucas são as formas regulares na natureza, como por exemplo, a laranja, a melancia e o olho humano.

Considerando a presença abundante dos Fractais na natureza entende-se, neste trabalho, que o ensino dos Fractais para alunos da Educação Básica torna-se algo natural, podendo ser prazeroso e interessante saber que a brócolis, a folha de samambaia, os flocos de neve, entre outras, constituem representações de formas geométricas do nosso entorno, presentes no dia a dia.

Alguns tipos de Fractais

¹ GUEDES, Franciely. **Fractal**. [2013?]. Figura 1. Disponível em: < <http://escolakids.uol.com.br/fractais.htm> > Acesso em: 27 Abr. 2017

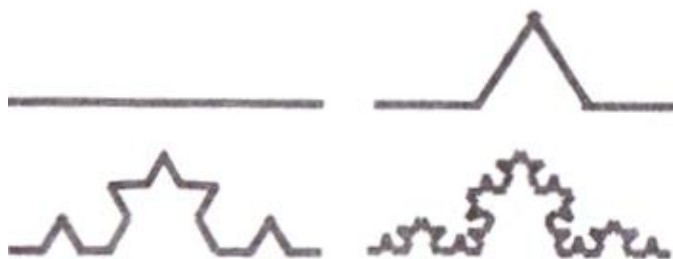
² GUEDES, Franciely. **Fractal**. [2013?]. Figura 2. Disponível em: < <http://escolakids.uol.com.br/fractais.htm> > Acesso em: 27 Abr. 2017

Segundo Janos (2008, p.3) "Mandelbrot é considerado o pai da geometria fractal, antes dele, matemáticos criaram figuras estranhas que desafiavam o enquadramento nas definições convencionais da geometria euclidiana".

Há diversos tipos de fractais, contudo, neste trabalho procurou-se dar ênfase em construções que tivessem maior apelo visual, o que pode facilitar o entendimento desse conhecimento, sobretudo para alunos do Ensino Fundamental I.

A curva de Koch, recebeu esse nome por ter sido introduzida por um polonês conhecido como Helge Von Koch (1904-1906), em sua estrutura podem ser observadas curvas sem tangente, sua construção é bem simples: divida um segmento de reta em três partes iguais, retire o segundo e substitua-o por dois segmentos congruentes aos demais, repita esse procedimento em cada um dos quatro segmentos e, assim sucessivamente continue a fazer iterações, como apresentado na Figura 3.

Figura 3: Curva de Koch



Fonte³

É notório que a curva de Koch é gerada por meio de cópias e cópias, ocasionando a auto-semelhança e que num determinado momento, uma pequena parte dessa iteração representará o todo, sem que se altere a forma, atingindo dimensões em escalas distintas. Ao imaginar que por meio de um polígono regular possa seguir a mesma iteração de ambos os lados da figura, tem-se a Ilha de Koch, segundo Barbosa (2002, p.39) "[...] merece especial atenção, a figura obtida a partir do triângulo equilátero, que aparenta um floco de neve, uma formação cristalina, daí ser denominado " Floco de Neve."

O matemático também polonês Waclaw Sierpinski (1882-1969), desenvolveu um dos mais famosos fractais batizado como Triângulo de Sierpinski, mas citado por Jano (2008, p.31), como "Cesta de Sierpinski" no qual o autor apresenta a seguinte construção:

³ BARBOSA, M. Ruy. **Descobrendo a Geometria Fractal para sala de aula**. 2002. Figura 3

(i) marque os pontos médios dos três lados; (ii) em conjunto com os vértices do triângulo inicial, estes pontos definem quatro novos triângulos iguais, dos quais eliminamos o triângulo central. [...] após o 1º passo, temos três triângulos iguais com lados iguais à metade do lado do triângulo inicial; após o 2º passo temos nove triângulos iguais com lados de $\frac{1}{4}$ do triângulo original e assim indefinidamente.

Figura 4: Cesta de Sierpinski



Fonte⁴

Assim como no fractal anterior, a cada iteração obtemos figuras semelhantes à anterior, só que numa escala reduzida, caracterizando também a auto-similarança.

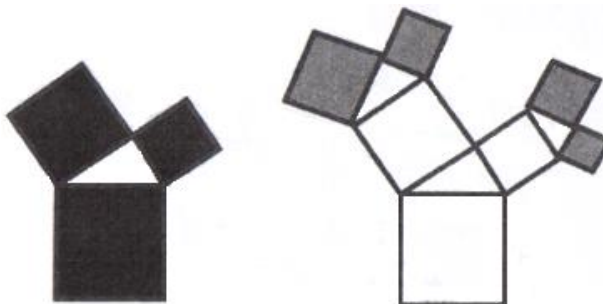
Outro fractal interessante é a "árvore pitagórica fundamental". Sua construção envolve um triângulo retângulo e os quadrados dos catetos e da hipotenusa gerando o termo pitagórico.

Barbosa (2002, p. 62), descreve sua construção como:

[...] sobre seus catetos e hipotenusa construir os quadrados respectivos (Fig. III-14a). O triângulo retângulo e os quadrados dos catetos constituem o iniciador-gerador. O quadrado da hipotenusa será o tronco inicial. Para a obtenção do nível do fractal, (Fig. III-14b) construir sobre o lado de cada quadrado oposto ao respectivo cateto, novo triângulo retângulo, tendo por hipotenusa justamente esse lado [...].

Assim para obter a auto-similaridade os novos triângulos devem ser semelhantes ao inicial, observe a Figura 5.

Figura 5: Formação da árvore pitagórica



Fonte⁵

⁴ JANO, Michel. **Geometria Fractal**. 2008. Figura 4

Importante observar que para a construção da árvore pitagórica, são necessários pré-requisitos matemáticos, com os quais, o aluno provavelmente terá contato somente no Ensino Fundamental II, mas isto não impede que o professor trabalhe com as formas geométricas como triângulos, quadrados, altura, entre outros.

Abordagem metodológica de pesquisa

As investigações realizadas neste trabalho a definem como qualitativa, de cunho documental. Para Gil, (2008, p. 51), a pesquisa documental aproxima-se bastante da bibliográfica.

A única diferença entre ambas está na natureza das fontes. Enquanto a pesquisa bibliográfica se utiliza fundamentalmente das contribuições dos diversos autores sobre determinado assunto, a pesquisa documental vale-se de materiais que não receberam ainda um tratamento analítico, ou que ainda podem ser reelaborados de acordo com os objetivos da pesquisa.

Com relação aos passos desenvolvidos para a realização de uma pesquisa documental Gil (2008), argumenta que:

[...] há que se considerar que o primeiro passo consiste na exploração das fontes documentais, que são em grande número. Existem, de um lado, os documentos de primeira mão, que não receberam qualquer tratamento analítico, tais como: documentos oficiais, reportagens de jornal, cartas, contratos, diários, filmes, fotografias, gravações, etc. De outro lado, existem os documentos de segunda mão, que de alguma forma já foram analisados, tais como: relatórios de pesquisa, relatórios de empresas, tabelas estatísticas, etc.(GIL, 2008, p. 51).

As fontes utilizadas para esta pesquisa foram os documentos oficiais da Educação Básica, tanto nacionais quanto estaduais, a saber, Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), Diretrizes Curriculares do Paraná (2008) e Ensino Fundamental de nove anos orientações pedagógicas para os anos iniciais (2010).

O que dizem os Documentos Oficiais

A Secretaria de Educação Fundamental do Ministério de Educação e do Desporto, no ano de 1998, lançou os Parâmetros Curriculares Nacionais, nos quais fornece orientações

⁵ BARBOSA, M. Ruy. **Descobrimo a Geometria Fractal para sala de aula**. 2002. Figura 5

para o ensino de cada área do conhecimento no âmbito do Ensino Fundamental. Em se tratando da Matemática e, mais especificamente da Geometria, o documento apresenta que “embora os conteúdos geométricos propiciem um campo fértil para a exploração dos raciocínios dedutivos, o desenvolvimento dessa capacidade não deve restringir-se apenas a esses conteúdos” (BRASIL, 1998, p. 86).

Vê-se que com relação à Geometria, os Parâmetros tratam seus conteúdos como sendo propícios para o desenvolvimento do raciocínio dedutivo, contudo para as séries iniciais, o documento direciona para atividades relativas à Geometria Euclidiana.

Já no estado do Paraná, com a implantação das Diretrizes Curriculares do Paraná, publicada em 2008, as Geometrias Não-Euclidianas foram inseridas gradativamente. No Ensino Fundamental II o conteúdo estruturante Geometrias, defende que a referência para o aluno é o espaço, cabendo a ele perceber, analisar e representa-lo. Nesse nível de ensino, espera-se que o aluno tenha compreensão de:

[...] noções de geometrias não-euclidianas: geometria projetiva (pontos de fuga e linhas do horizonte); geometria topológica (conceitos de interior, exterior, fronteira, vizinhança, conexidade, curvas e conjuntos abertos e fechados) e **noções de geometria dos fractais** (PARANÁ, 2008, p. 56)(Grifo dos autores).

No Ensino Médio, a Diretriz orienta para que o estudo das noções das Geometrias Não Euclidianas seja aprofundado, especificamente no que tange ao ensino dos Fractais, o documento defende que:

[...] ao abordar a geometria dos fractais, pode-se explorar: o floco de neve e a curva de Koch; o triângulo e tapete de Sierpinski, conduzindo o aluno a refletir e observar o senso estético, presente nessas entidades geométricas, estendendo para as suas propriedades, através da “regularidade harmoniosa nas suas próprias irregularidades (PARANÁ, 2008, p. 57).

Em 2010, o estado do Paraná lançou o documento Ensino Fundamental de Nove Anos Orientações Pedagógicas para os Anos Iniciais. Esse documento ressalta que deve-se observar a apropriação dos conceitos matemáticos que o aluno faz, por exemplo:

[...] se faz uso da linguagem e simbologia matemática (primeiro/segundo- $1^{\circ}/2^{\circ}$...; maior/menor \rightarrow/\leftarrow . Organização das informações- tabelas, gráficos), se evidenciam noções de grandezas, medidas e de topologia (tamanhos, proporcionalidades, localização espacial,...) [...]. (PARANÁ, 2010, p. 160)

De um modo geral as orientações, tanto nacionais quanto estaduais, para os anos iniciais do Ensino Fundamental, remetem à Geometria Euclidiana e, para os anos finais do Ensino Fundamental (Fundamental II) e Ensino Médio, essas orientações são ampliadas também para as Geometrias Não Euclidianas, incluindo os Fractais.

Considerações finais

O presente trabalho procurou investigar, como os documentos oficiais nacionais e estaduais, orientam o ensino da Geometria na Educação Básica. Especificamente, se analisou como eles direcionam o trabalho com os Fractais, que correspondem a um tipo de Geometria Não Euclidiana.

Notou-se que os documentos reconhecem a importância desse assunto no ensino, como apontam os Parâmetros Curriculares Nacionais:

Fruto da criação e invenção humanas, a Matemática não evoluiu de forma linear e logicamente organizada. Desenvolveu-se com movimentos de idas e vindas, com rupturas de paradigmas. Frequentemente, um conhecimento foi amplamente utilizado na ciência ou na tecnologia antes de ser incorporado a um dos sistemas lógicos formais do corpo da Matemática. [...]. Uma instância importante de mudança de paradigma ocorreu quando se superou a visão de uma única geometria do real, a geometria euclidiana, para aceitação de uma pluralidade de modelos geométricos, logicamente consistentes, que podem modelar a realidade do espaço físico. (BRASIL, 1998, p. 25)

E ainda,

O advento posterior de uma multiplicidade de sistemas matemáticos – teorias matemáticas – evidenciou, por outro lado, que não há uma via única ligando a Matemática e o mundo físico. Os sistemas axiomáticos euclidiano e hiperbólico na Geometria, equivalentes sob o ponto de vista da consistência lógica, são dois possíveis modelos da realidade física. Além disso, essa multiplicidade amplia-se, no tempo presente, com o tratamento cada vez mais importante dos fenômenos que envolvem o acaso – a Estatística e a probabilidade – e daqueles relacionados com as noções matemáticas de caos e de conjuntos fractais. (BRASIL, 1998, p. 25)

As Diretrizes Curriculares Estaduais do Paraná (2008) apontam que "As abordagens das Geometrias: fractal, hiperbólica e elíptica não se encerram, unicamente, nos conteúdos aqui elencados. Desde que explore conceitos básicos, o professor tem a liberdade de investigar e realizar outras abordagens" (PARANÁ, 2008, p. 57).

Embora os documentos que direcionem o ensino das Geometrias reconheçam a importância das Geometrias Não Euclidianas e, especificamente dos Fractais, eles indicam o

estudo desse conteúdo a partir das séries finais do Ensino Fundamental, ou seja, no Fundamental II e Ensino Médio. Tal fato mostra-se contraditório, tendo em vista que cabe aos anos iniciais, introduzir os alunos às noções geométricas que serão estudadas e aprofundadas nos anos seguintes, possibilitando aos mesmos chegarem aos anos finais do Ensino de Fundamental ou Ensino Médio, com algum conhecimento do que venha a ser a Geometria Não Euclidiana e, especialmente, os Fractais.

Referências

BARBOSA, R. M. **Descobrendo a Geometria Fractal para sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2002. 142 p.

BARBOSA, R. M. **Descobrendo a Geometria Fractal para sala de aula**. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. (1998). **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental Matemática**. - Brasília: MEC/ SEF.

EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução de I. Bicudo. São Paulo: Editora Unesp, 2009.

GIL, A. C. **Métodos e Técnicas de Pesquisa Social**. 6 ed. São Paulo: Atlas, 2008.

PARANÁ Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes curriculares da educação básica do estado do Paraná: matemática**. Curitiba. SEED, 2008. p.82.

PARANÁ. Secretariada Educação. **Ensino Fundamental de nove anos orientações pedagógicas para os anos iniciais**. 22. Ed. Curitiba. SEED, 2010. p.176.

STRUIK, J. Dirk. **História Consisa das Matemáticas**. Tradução de João Cosme Santos. Editora, Gradiva, 1989. p. 395.