

UM PRIMEIRO OLHAR SOBRE MONÔMIOS E POLINÔMIOS

Dayane Moara Coutinho
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
daymoara@gmail.com

Claudete Cargnin
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
cargnin@utfpr.edu.br

Resumo:

O presente trabalho discute os resultados de uma investigação preliminar sobre os conteúdos de monômio e polinômio, em alguns livros didáticos de Matemática utilizados no Ensino Fundamental, com objetivo de analisar a diversidade de registros de representação semióticos apresentados, bem como conversão de representações, considerados como fatores relevantes para a aprendizagem dos conceitos em tela. A análise qualitativa dos livros baseou-se na Teoria de Registro de Representação Semiótica. Nesse primeiro olhar, por meio da investigação, que abrangeu cinco livros didáticos, destinados ao oitavo ano, antiga sétima série, constatamos que embora haja diversidade e conversões de representações nos cinco livros analisados, ainda é deficiente sua abordagem, pois se restringem basicamente às apresentações do conteúdo e não são utilizadas no decorrer do estudo.

Palavras-chave: Álgebra. Livros didáticos. Monômios. Teoria de Registro de Representação Semiótica.

Introdução

No presente trabalho estudamos a abordagem do conteúdo de monômios e polinômios em livros didáticos, focando na análise da diversidade e conversão de representações semióticas apresentados nesses materiais didáticos. A necessidade da pesquisa surgiu da dificuldade de compreensão do tema, tanto em termos de ensino quanto de aprendizagem, devido ao grande nível de abstração para tal conteúdo estruturante.

Analisar a forma que o conteúdo de Álgebra vem sendo tratado nos livros didáticos é de suma importância, visto que a diversidade de representações e suas conversões “não é somente mudar de modo de tratamento, é também explicar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto” (DUVAL, 2003, p. 22).

Para Cargnin (2015, p. 23), “Na matemática, o desenvolvimento cognitivo requer especificidades diferentes de outros domínios [...] Aí entram as representações semióticas (símbolos, signos, códigos, tabelas, gráficos, etc.), como meio de acesso e reconhecimento dos objetos matemáticos”.

Tal pensamento vem ao encontro com o que Duval (2003) acredita: quando há variação entre suas representações, diminui-se o risco do aluno confundir os objetos matemáticos com suas diferentes representações, devido ao fato de acreditar-se que o aluno tenha compreendido o objeto matemático e não somente a sua representação.

Sendo assim, realizamos um estudo sobre alguns conteúdos (especificamente monômios e polinômios) sugeridos nos PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais - 1997) e nas DCE (Diretrizes Curriculares Estaduais - 2008) para o conteúdo estruturante Álgebra. Em seguida fizemos uma análise quanto à utilização de diversos registros de representação semiótica em diferentes livros didáticos para o ensino de tais conteúdos.

Essa análise é um primeiro olhar para cinco livros didáticos, com o objetivo de verificar a presença de múltiplos registros de representação para o tema monômios e polinômios, parte integrante da álgebra, e tema de pesquisa da dissertação de mestrado recentemente iniciado.

Dificuldades na aprendizagem

Há algum tempo, alguns autores, tais como Booth (1995), Socas et al (1996), Tinoco et al (2008), Enfedaque (1990), se veem preocupados com as dificuldades dos alunos no ensino de Álgebra, as quais podem ser facilmente percebidas em resultados de avaliações internas, avaliações externas e até mesmo no dia a dia, dentro da sala de aula.

Segundo Booth (1995), diferentemente da aritmética, que os alunos estavam acostumados, a Álgebra tem outro objetivo: “Em aritmética, o foco da atividade é encontrar determinadas respostas numéricas particulares. Na álgebra, porém, é diferente. Na álgebra o foco é estabelecer procedimentos e relações e expressá-los numa forma simplificada geral.” (BOOTH, 1995, p.24).

O referido autor ainda elenca alguns fatores que acredita contribuir negativamente à aprendizagem dos alunos (BOOTH,1995):

- **Interpretação:** Os alunos entendem os sinais de adição, subtração, multiplicação, divisão e igual, como algo que deva ser somado, subtraído, multiplicado, dividido e isso tudo tem que resultar em um valor numérico, o que na Álgebra não ocorre.
- **Resultado Numérico:** não aceitam uma expressão algébrica como resultado de um exemplo e/ou exercício, visto que para eles o resultado numérico de uma equação é o que importa e não o processo de aprendizagem e manipulação. E “muitos alunos não percebem isso e continuam achando que devem dar uma resposta numérica” (BOOTH, 1995, p. 24)

- Concepções errôneas de aritmética, que atrapalham o ensino de álgebra. Booth (1995) exemplificou com uma atividade referente ao cálculo de área de um retângulo, no qual um dos lados tinha medida p e o outro lado tinha medida $a + m$.

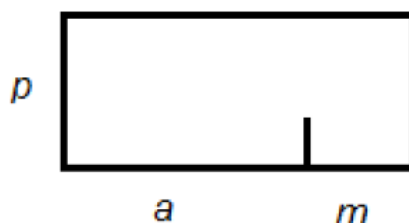


Figura 1- Cálculo de Área

Fonte: Booth (1995, p.33).

No exemplo da Figura 1, a área correspondente ao retângulo seria $p \cdot (a + m)$, porém, o cálculo de área a partir de $p \cdot a + m$ estaria incorreto, o que, na visão de Booth, o erro está mais em aritmética do que realmente em álgebra.

Consequentemente, escrevem-se incorretamente expressões algébricas que necessitam de parênteses (por exemplo, $p \times a + m$ em vez de $p \times (a + m)$), o que pode acarretar outros erros quando a expressão é simplificada (por exemplo, $p \times a + m$ poderá então ser reescrita, erradamente nesse contexto, como $pa + m$). Nesse caso o erro é fruto menos de concepções algébricas erradas do que de uma visão incorreta da representação aritmética (BOOTH, 1995, p. 34).

- O significado das letras e das variáveis: uma das diferenças que Booth (1995) considera entre a aritmética e a álgebra é a utilização de letras na álgebra para indicar valores, o que na aritmética não ocorre, nesse caso aparecem letras para indicar unidade de medidas. A letra m , por exemplo, pode ser utilizada em aritmética para representar ‘metros’, mas não para representar o número de metros, como em álgebra.

Embora haja muitas dificuldades, Lins & Gimenez (1997) acreditam que a álgebra se faz necessário no ensino, pois “pensar algebricamente é produzir significado para situações em termos de números e operações aritméticas (e igualdades ou desigualdades) e, com base nisso, transformar as expressões obtidas” (LINS & GIMENEZ, 1997, p. 151).

Além das dificuldades conteudistas, não podemos deixar de falar de outros fatores externos ao âmbito educacional. De acordo com Marturano et al (1993), as dificuldades de aprendizagem, muitas vezes, provêm de outros aspectos, tais como: comportamentais e

emocionais. Por exemplo, os alunos que possuem problemas financeiros e/ou que não tem um suporte emocional, que não tem um hábito saudável de estudar, tem maiores chances de apresentarem dificuldades ao longo de sua vida acadêmica.

Na concepção de Piaget (1998), a aprendizagem se dá por meio do processo de desenvolvimento intelectual, que forma-se através de “uma equilibrção progressiva, uma passagem contínua de um estado de menos equilíbrio para um estado de equilíbrio superior” (PIAGET, 1998, p.13).

Nesse contexto, acredita-se que devemos criar um ambiente profícuo à aprendizagem, dentre os quais podem ser citados diversos tipos de representações de um mesmo objeto matemático, e também o contexto do aluno fora do âmbito educacional, entre outras alternativas.

Os registros de representação semiótica

A Teoria de Registro de Representação Semiótica (TRRS) foi desenvolvida por Raymond Duval (2003), a partir de estudos da psicologia cognitiva, que procura conhecer a maneira que o aluno adquire o conhecimento. De acordo com a TRRS, os objetos matemáticos podem ser acessados por meio de representações semióticas, que segundo Duval (2012), “[...] são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento” (DUVAL, 2012, p.269).

Um erro comum é achar que as representações semióticas são apenas um meio de acessar um objeto. “Ora, este ponto de vista é enganoso. As representações não são somente necessárias para fins de comunicação, elas são igualmente essenciais à atividade cognitiva do pensamento” (DUVAL, 2003, p.39). Segundo Duval (2003), as representações semióticas valorizam diversas funções cognitivas, a produção de conhecimento e o desenvolvimento das representações mentais.

Para Duval (2003), privar o aluno de ter acesso a diversos registros de representação pode limitar sua habilidade de reconhecimento do mesmo objeto matemático. “Existe um ‘enclausuramento’ de registro que impede o aluno de reconhecer o mesmo objeto matemático em duas de suas representações bem diferentes” (DUVAL, 2003, p. 21).

Nesse viés, Duval (2003, p.21) faz o seguinte questionamento: “Como podemos não confundir um objeto e sua representação se não temos acesso a esse objeto a não ser por meio de sua representação?”.

A resposta a esse questionamento é dada pelo próprio autor, que expõe sobre a importância das atividades cognitivas de tratamento e conversão entre representações. Chama-se tratamento às modificações nas representações de um mesmo registro. Por exemplo, para se chegar à igualdade $(x + 3)(x + 1) = x^2 + 4x + 3$, houve um tratamento dentro do registro de representação algébrico, nos passos indicados na Flecha III da Figura 2. Também podemos considerar um tratamento, mas agora no registro figural, a decomposição do retângulo inicial em partes (Flecha I da Figura 2, na qual o retângulo inicial foi considerado em partes que são os retângulos coloridos). Já a conversão requer a mudança de registro de representação, como por exemplo, do figural para o algébrico, como mostram as Flecha II e IV da Figura 2.

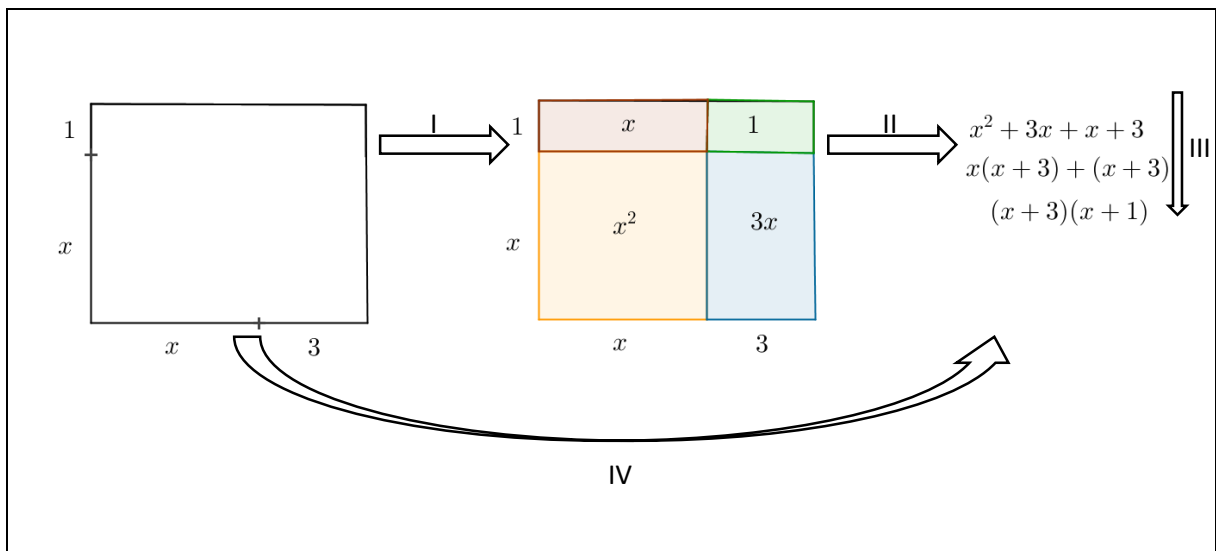


Figura 2 – exemplo de tratamento e conversão na multiplicação de binômios.

Fonte: as autoras

Tendo isso em vista, é imprescindível utilizar conversão entre vários registros de representação, até mesmo porque “a compreensão em matemática implica a capacidade de mudar de registro” (DUVAL, 2003, p. 21). Dentre os registros de representação, Duval menciona: numérico, geométrico, língua natural¹ e algébrico. Para o autor, é justamente a coordenação entre dois ou mais desses registros que permite o acesso ao objeto matemático.

Duval (2003) cita dois tipos de transformações de representação: tratamento e conversão. A diferença entre eles consiste na mudança, ou não, do tipo de registro usado para a representação de saída e a de chegada. Quando a representação de saída e de chegada está num mesmo tipo de registro de representação, essa transformação é chamada de tratamento;

¹ Entendemos por Língua Natural, também chamada de Língua Materna, a forma de comunicação oral e escrita.

enquanto que quando ocorre a mudança de registro entre a representação de saída e de chegada, a transformação é chamada de conversão.

Um estudo referente a Monômios e Polinômios

Num primeiro momento, para classificar o eixo norteador do qual faz parte os monômios e polinômios, foi realizada uma pesquisa documental, nas Diretrizes Curriculares do Paraná, a qual indica que o ensino de Números e Álgebra no Ensino Fundamental, deve contemplar os seguintes conteúdos: Equação e Inequação do 1º grau; Razão e proporção; Regra de três simples; Sistemas de Equações do 1º grau; Potências; Monômios e Polinômios; Produtos Notáveis; Propriedades dos radicais; Equação do 2º grau; Teorema de Pitágoras; Equações Irracionais; Equações Biquadradas; Regra de Três Composta.

Essa classificação é importante por permitir conhecer todo o entorno associado ao tema de estudo.

Foram analisados os seguintes livros didáticos, escolhidos por serem referência nas escolas fundamentais da região das autoras desse artigo: LD1) Matemática: ideias e desafios, de Iracema Mori Dulce Satiko Onaga; LD2) Matemática: teoria e contexto, de Marília Centurión e José Jakubovic; LD3) Matemática e Realidade, dos autores Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antônio Machado; LD4) Matemática, do autor Edwaldo Bianchini; e o último livro, LD5) Praticando Matemática, dos autores Álvaro Andrini e Maria José Vasconcelos. Para facilitar, ao longo do texto iremos denominá-los pela sigla LD seguido de um número para sua identificação.

Monômios e Polinômios

O livro didático LD1, com data de 2009, é indicado para o 8º ano do Ensino Fundamental, e tem seção específica para monômios e polinômios. Neste livro didático, há várias transições da representação algébrica para a geométrica. No final da seção dedicada a monômios, o livro traz algumas questões denominadas de “aprender mais”, no qual várias delas são contextualizadas e apresentam representação geométrica. Uma dessas questões pode ser vista na Figura 3, a seguir:

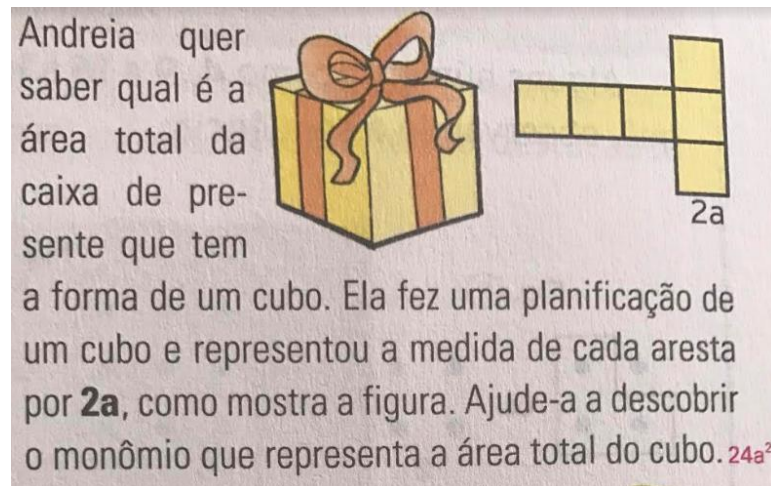


Figura 3 - Exemplo de representação algébrica e geométrica

Fonte: Mori e Onaga (2009, p.91).

No livro didático LD2, de 2012, indicado para o 8º ano do Ensino Fundamental, entre os conteúdos sugeridos para tal ano está o estudo de monômios e polinômios, que apresenta definições, exemplos e exercícios. Mas antes de começar conceitos para monômios, o autor traz uma seção referente a expressões algébricas e outro para utilizar variáveis em generalizações.

Já para introduzir o conceito de monômios, o autor utilizou a Língua Materna, seguida de representações algébricas, no qual se percebeu que apenas uma representação geométrica estava presente nos exemplos, geralmente eram os exercícios que continham representações geométricas no enunciado e/ou que solicitavam ao aluno conversão da língua materna para a representação geométrica.

Em um dos exemplos que consta em LD2, é solicitado ao aluno para indicar com monômios a área de três retângulos, ou seja, pede-se a conversão da representação geométrica para a representação algébrica. Vejamos na Figura 4 a representação geométrica, juntamente com a representação algébrica, que representa o tamanho dos lados dos retângulos:

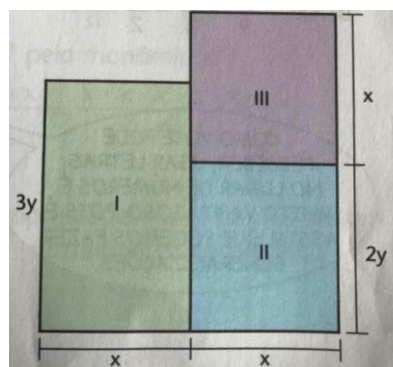


Figura 4 - Representação geométrica

Fonte: Centurión e Jakubovic (2012, p.75).

E embora a diversidade de representações não fosse tão ampla, o LD2 aborda exemplos/exercícios que solicitam ao aluno, identificar polinômios e monômios e efetuar operações com eles, que é uma das sugestões que as DCE recomendam para tal serie. É bom lembrar que nesse processo, ocorre uma transformação de representação que pode ser denominada tratamento ou conversão, de acordo com o contexto.

Para introduzir o conceito de adição de monômios, desejava-se encontrar a expressão algébrica que determinava a área de uma figura formada de quadrados e retângulos (vide Figura 5). Para isso, foi necessário uma conversão para substituir o registro geométrico por um registro algébrico e também tratamentos para escrever a área como uma expressão algébrica simplificada.

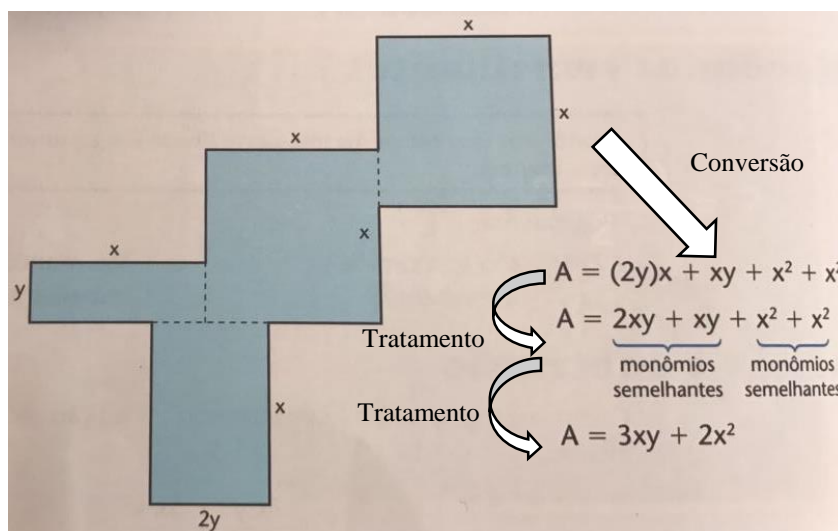


Figura 5 – Exemplo de Conversão e Tratamento

Fonte: Adaptado de Centurión e Jakubovic (2012)

Ainda referente ao livro didático LD2, na seção referente à adição e subtração de polinômios, o conteúdo está disposto por meio da Língua Materna e representação algébrica, a representação geométrica somente aparece em três exercícios de um total de treze. No exercício mostrado na Figura 6, a representação que consta no enunciado é a Língua Materna, porém solicita ao aluno que responda a questão utilizando um polinômio, ou seja, para usar a representação algébrica, isto, de acordo com a Teoria de Registro de Representação Semiótica é uma conversão de representações, na qual o registro de saída é a Língua Materna e o Registro de Chegada é a Língua Natural.

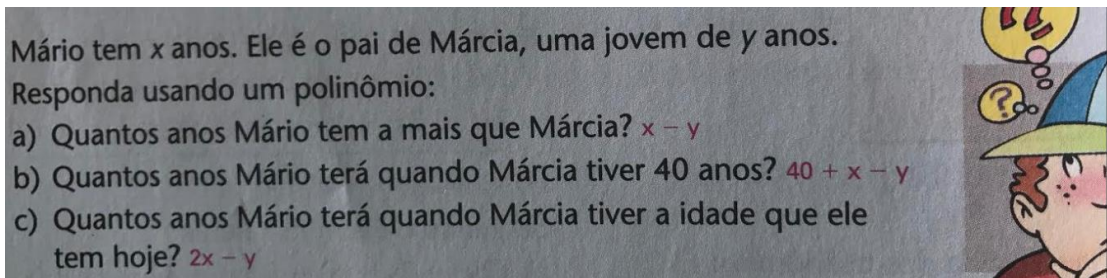


Figura 6 - Exercício de conversão da linguagem natural para a algébrica

Fonte: Centurión e Jakubovic (2012, p.84).

Já na seção dedicada à multiplicação, percebe-se um número muito grande de exercícios que em seu enunciado pedia apenas para “calcular” e “efetuar” (vide Figura 7), exercícios como esses, são considerados exercícios fechados, e segundo Costa e Moreira (1997), não favorecem a reflexão dos alunos, sendo meramente um processo mecânico: “a realização das atividades e tarefas em contextos muito definidos e fechados fazem com que os alunos realizem de modo mecânico as atividades, sem envolver-se muito no processo” (COSTA & MOREIRA, 1997, p. 155).

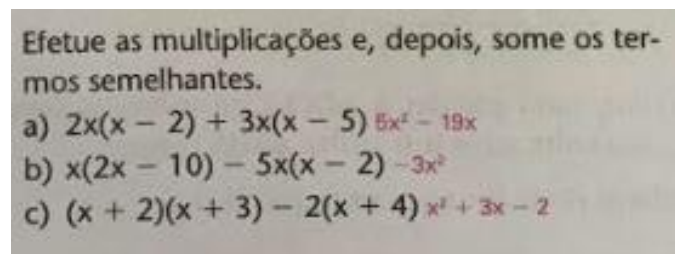


Figura 7 - Exercícios de Reprodução

Fonte: Centurión e Jakubovic (2012, p.220).

O LD3, em sua 5ª edição no ano de 2005, recomendado para a 7ª série, atual 8º ano, diferentemente do LD2, não traz uma seção somente para monômios, os autores apenas começam recordar o que é um monômio, seguida da definição de polinômios. Nesse livro didático, além da língua natural, o autor faz várias conversões entre representações algébricas e representações geométricas, como pode ser observado na Figura 8.

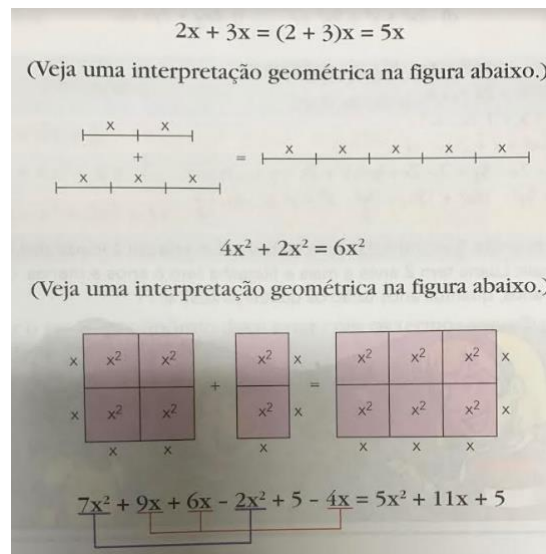


Figura 8- Diferentes Representações

Fonte: Iezzi, Dolce, e Machado (2005, p. 167).

O LD4, em sua 8ª edição com ano de 2011, para iniciar os cálculos algébricos, o autor faz uso de polígonos e de perímetro. Após as definições, apesar de alguns exemplos e exercícios de fixação (vide figura 9), o autor propõe vários outros que solicitam conversões entre as representações e também alguns exercícios os quais valorizam o raciocínio. Na figura 10, o exercício requer conversão da língua materna para a representação algébrica.

27 Efetue.

- a) $(-10x) + (+6x) = -4x$
- b) $(0,8x^2y) + (-3,5x^2y) = -2,7x^2y$
- c) $\left(-\frac{2}{5}ab\right) + \left(-\frac{3}{10}ab\right) = -\frac{7}{10}ab$

Figura 9 – Exercício de fixação

Fonte: Bianchini (2011, p. 50).

33 Observe esta figura.



Indicando a distância do menino até a árvore por y , determine:

- o monômio que representa a distância entre a árvore e a porta da casa, sabendo que essa distância é o dobro da distância do menino até a árvore; $2y$
- o monômio que representa a distância entre a porta da casa e o cachorro, sabendo que essa distância é $\frac{2}{3}$ da distância do menino até a árvore; $\frac{2}{3}y$
- o monômio que representa a distância do menino até o cachorro; $\frac{11}{3}y$
- a distância do menino até a casa, se y for igual a 6,24 metros. $18,72 \text{ m}$

Figura 10 – Exercício que solicita conversões

Fonte: Bianchini (2011, p.50).

O livro LD5 é o livro adotado pelos colégios estaduais pertencentes ao Núcleo Regional de Educação – Campo Mourão no ano de 2017. Tal livro didático pede muitos exercícios de fixação, que exigem menos raciocínio, priorizando um processo mais mecânico, do tipo “calcule”, “simplifique”, “efetue e simplifique”, e assim por diante.

Porém, posteriormente, o livro LD5 traz uma sequência de atividades que, a nosso ver, valoriza o pensamento algébrico do aluno, com diversas representações geométricas e figurais, proporcionando ao aluno um momento no qual é preciso pensar, e não somente o processo mecânico. Um exemplo do LD5 está mostrado na Figura 11, na qual é solicitada uma conversão, pois o enunciado está representado pela linguagem natural e solicita ao aluno a conversão para a representação algébrica.

75 Uma fábrica produz apenas camisetas e bolas. A primeira com custo de R\$ 20,00 por unidade e a segunda com custo de R\$ 15,00 por unidade. Se chamarmos de x a quantidade produzida de camisetas e de y a quantidade produzida de bolas, qual será a expressão algébrica do custo desses dois artigos? Qual será o custo se forem produzidas 300 e 500 unidades, respectivamente? $20x + 15y$; R\$ 13.500,00

Figura 11 - Conversão Da Língua Materna para a representação algébrica

Fonte: Andrini e Vasconcelos (2012, p.93).

Finalizando, dos cinco livros analisados, restritos aos conteúdos de monômios e polinômios, todos apresentam mais de uma Representação Semiótica ao longo do livro, o que na visão de Duval (2003), tem sua importância, visto que a construção do conhecimento se dá por meio de conversões estabelecidas por dois ou mais registros diferentes.

Aliás, todos os cinco livros didáticos solicitam ao aluno para realizar pelo menos uma conversão de representação, que também faz com que o aluno tenha maior compreensão do conteúdo a ser estudado, e não fique preso somente em sua representação.

Quadro 1 Tipos de Representações e Conversões utilizadas nos livros didáticos

	Qtd livros	Exemplos de representações utilizadas
Utiliza pelo menos 2 representações	5	- Algébrica - Geométrica - Língua natural
Solicita ao aluno realizar conversões	5	- Língua natural para representação algébrica.

		- Representação geométrica para algébrica.
--	--	--------------------------------------------

Fonte: as autoras

Entretanto, é válido ressaltar que não é apenas a realização de uma única conversão, ou algumas, que favorecem o aprendizado, pois passar de uma representação para outra é muito mais que apenas uma mudança, é também estudar sobre o próprio objeto matemático em si. Quanto às conversões, o sentido também deve ser levado em consideração, pois o nível de dificuldade em realizá-la também é influenciado por essa ordem.

Em suma, apesar da existência de conversões e diversidade de representações em livros didáticos, elas ainda são escassas, especialmente em relação às operações, e devido ao alto grau de abstração exigido na álgebra, é importante pensar em conversões de representação em dois sentidos, como por exemplo, do registro algébrico ou língua natural para o geométrico, ou do algébrico para a língua natural, sentido pouco usual nas aulas de Matemática.

Considerações finais

Ao término dessa pesquisa, podemos perceber a necessidade e importância de ensinar por meio de diferentes registros de representação semiótica, bem como realizar/solicitar conversões entre os registros. Dessa maneira, estaríamos favorecendo, ao aluno, o conhecimento e acesso ao objeto matemático em si, e não apenas sua representação.

Com a análise dos livros didáticos, que, na verdade, foi um primeiro olhar para sabermos como os conceitos de monômios e polinômios estão dispostos nos livros didáticos, percebemos que embora haja conversões nos registros, ainda há a necessidade de apresentar mais representações para os objetos estudados, pois alguns livros mostram-se deficientes quanto a quantidade de conversões e quanto ao sentido que realizam. Em geral, percebemos conversões apenas nos sentidos língua natural/geométrica para algébrica. Estudos mostram que o custo cognitivo para realizar uma conversão no sentido representação algébrica para língua natural/geométrica não é o mesmo, e conteúdos diferentes são mobilizados nesse sentido dessa conversão, por isso a necessidade dessa diversificação.

Em suma, geralmente os conteúdos estavam na sequência: definição, que utilizava-se com maior frequência a linguagem natural; exemplo, no qual as conversões mais corriqueiras

era da geométrica para a algébrica; e exercícios, que além dos exercícios de apenas fixação, apareciam conversões da linguagem natural para a algébrica, sem uma maior exploração dos demais sentidos de conversão, o que acarreta, segundo Duval, uma visão parcial do objeto de estudo.

Referente às representações, foi possível verificar que a maioria dos livros didáticos estudados tinha maior variedade de representações nos exercícios, enquanto que nos exemplos e definições a quantidade de variedade de representação era menor. Percebeu-se também, uma grande quantidade de exercícios de fixação e de questões fechadas, do tipo: “calcule”, “efetue”, “determine”. Além disso, os exercícios contextualizados apareciam esporadicamente.

Sabemos que o livro didático é praticamente a única fonte de informações de muitos docentes, entretanto, esperamos que professor proporcione ao aluno diferentes tarefas que utilizem diferentes tipos de representações para um mesmo objeto, fazendo conversões constantemente entre elas, e que não fique engessado somente no livro didático adotado, podendo procurar outros materiais, disponíveis na internet inclusive, para enriquecer sua aula, pensando prioritariamente na aprendizagem do aluno.

Referências

ANDRINI, A. ; VASCONCELOS, M. J. . **Praticando Matemática, 8.** São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática Bianchini.** São Paulo: Moderna, 2011.

BOOTH, L. R. **Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra.** As idéias da álgebra. Organizadores A. F. Coxford e A. P. Shulte; traduzido por Hygino H. Domingues. São Paulo: ed. Atual, 1995.

BRASIL. **Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental.** Parâmetros curriculares nacionais terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental. Brasília, DF: MEC/SEF, 1998.

XXXXX, Claudete; BARROS, Rui M. O. ; **Sequências e Séries: uma abordagem computacional com os softwares GeoGebra e WxMaxima.** Maringá, 2015.

CENTURIÓN, Marília; JAKUBOVIC, José. **Matemática: teoria e contexto.** São Paulo: Editora Saraiva, 2012

COSTA, S. S. C. & Moreira, M. A. (1997c). **Resolução de Problemas IV: Estratégias para Resolução de Problemas.** Investigações em Ensino de Ciências, 2(3), 153-184.

DUVAL, Raymond. **Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática**. In: MACHADO, S. D. A. (Org). Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papyrus, p. 11-33, 2003.

DUVAL, Raymond. **Registros De Representação Semiótica e Funcionamento Cognitivo Do Pensamento**. Florianópolis, v. 07, n. 2, p.266-297, 2012.

ENFEDAQUE, Jesús. **De los números a las letras**. SUMA, 5, pp. 23-34, 1990

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. **Matemática e Realidade**. São Paulo: Atual, 2005.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética a álgebra para o século XXI**. Campinas: Papyrus, 1997.

MARTURANO, E. M.; LINHARES, M.B.M; PARREIRA, V.L.C.. **Problemas emocionais e comportamentais associados a dificuldades na aprendizagem escolar**. Medicina Ribeirão Preto. 1993; 26(2):161-75.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. **Matemática: ideias e desafios**. São Paulo: SARAIVA, 2009.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação do. **Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica Matemática**. Curitiba, 2008.

PIAGET, J. **Seis estudos de Psicologia**. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1998.

SOCAS, M. M.; CAMACHO M.; PALAREA M.; HERNÁNDEZ J. **Iniciación al álgebra**. Madrid: Ed Síntesis, 1996.

TINOCO ET AL. **Caminho da álgebra na escola básica**. IV – SPEMRJ: Seminário de Pesquisa em Educação Matemática do Estado do Rio de Janeiro, 2008.