O FRACTAL HEXÁGONO DE DURER E SUAS POTENCIALIDADES PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA: UMA INVESTIGAÇÃO COM ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Thais Michele Martires
Universidade Estadual do Paraná – Campo Mourão
thais.martires@gmail.com

Veridiana Rezende
Universidade Estadual do Paraná – Campo Mourão
rezendeveridiana@gmail.com

Resumo:
O estudo de elementos da Geometria dos Fractais na disciplina de Matemática propicia o desenvolvimento do pensamento geométrico, o estudo de diferentes conceitos matemáticos por meio de construções geométricas que, geralmente, são atrativas aos alunos devido à beleza presente nos fractais. Neste trabalho, descrevemos os resultados de uma pesquisa cujo objetivo principal foi analisar o desempenho de 17 alunos do 3º Ano do Ensino Médio em tarefas matemáticas elaboradas com base no fractal Hexágono de Durer, com respaldo na teoria dos Registros de Representação Semiótica. Em relação a esta teoria, procuramos explorar as representações figural, linguagem natural e simbólica (numérica). A coleta de dados e reflexões acerca de nosso trabalho foi feita por meio de observações, registros das falas dos alunos em diário de campo e análise das tarefas propostas aos alunos. A pesquisa revelou que, apesar de os alunos apresentarem algumas dificuldades principalmente relacionadas aos cálculos numéricos, concluímos baseadas em Duval, que os alunos associaram as diferentes Representações referentes ao fractal de Durer, que contribuiu para a compreensão dos conceitos matemáticos trabalhados.
Palavras-chave: Ensino de Matemática. Geometria dos Fractais. Registros de Representação Semiótica.

Introdução

Neste trabalho, buscamos articular a Geometria dos Fractais ao ensino de conceitos matemáticos. Almeida (2006) argumenta que a Geometria dos Fractais vêm se destacando em estudos e pesquisas e que, aos poucos, está sendo inserida no contexto escolar. Conforme Médice Júnior (2014), o uso da Geometria dos Fractais tem ocorrido em diferentes áreas de conhecimento e tem atraído interesse científico e educacional devido à sua potencialidade, versatilidade e fascínio inerente de sua beleza.

Dentre as potencialidades para o ensino de Matemática, notamos que esta Geometria permite auxiliar no desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático do aluno, estimula a criatividade, desperta o interesse no aluno pela beleza e complexidade existentes nos fractais. Além disso, sua abordagem permite tanto iniciar os estudos de um conceito matemático quanto para relembrar, construir ou reconstruir conceitos já estudados pelos alunos.

Os fractais possuem algumas características próprias, sendo que as principais são: a autossimilaridade, a complexidade infinita e a dimensão fracionária. Segundo Carvalho (2005), a autossimilaridade refere-se ao comando de ampliação ou redução do fractal. Cada parte do fractal por menor que seja é semelhante à figura inicial. Neste caso, existem dois tipos: a autossimilaridade exata e a aproximada ou estatística (CARVALHO, 2005). Um exemplo de autossimilaridade exata é o Fractal Hexágono de Durer. Na autossimilaridade aproximada, os padrões não se repetem com exatidão, como por exemplo, os ramos de uma planta, conforme ilustram as figuras 1 e 2.

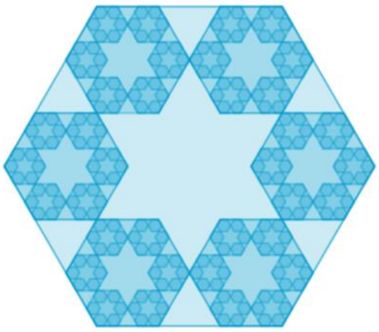


Figura 1: Fractal Hexágono de Durer.
Fonte: Autoras

Figura 2: Ramos de uma folha de samambaia.
Fonte: Nunes (2017, p.33)

Em relação à complexidade infinita, segundo Carvalho (2005), qualquer que seja o número de iterações realizadas sobre uma figura fractal, nunca se obterá a imagem final, sempre é possível realizar mais iterações, resultando em uma estrutura complexa. A dimensão fracionária trata-se de um número real não inteiro e está relacionada ao grau de irregularidade ou fragmentação.

Compreendemos que utilizar a Geometria Fractal em sala de aula de Matemática, aliada a conteúdos provenientes de Geometria Euclidiana, contribui para um melhor ensino e aprendizagem, e cabe ao professor verificar as potencialidades que esta Geometria dispõe de modo a diferenciar suas ações, não restringindo-se a exercícios mecânicos e em toda formalidade que permeia a disciplina.

Sendo assim, procuramos elaborar tarefas matemáticas referentes a essa Geometria, uma vez que a Geometria dos Fractais é uma das Geometrias não Euclidianas que, de acordo com os documentos que orientam o ensino de Matemática do Paraná – as Diretrizes

Curriculares do Estado do Paraná - DCE (PARANÁ, 2008), é vista como conteúdo estruturante para a rede básica de ensino paranaense.

Neste trabalho, apresentamos os resultados de uma pesquisa que teve como objetivo principal analisar o desempenho de alunos do 3º Ano do Ensino Médio de uma escola pública do interior do Paraná em tarefas matemáticas que dizem respeito ao fractal Hexágono de Durer e suas diferentes Representações Semióticas.

A seção a seguir apresenta alguns aspectos da teoria dos Registros de Representação Semiótica que serviram de base para o desenvolvimento de nossa pesquisa.

Os Registros de Representação Semiótica e a Geometria dos Fractais

Para este trabalho, relacionado à Geometria dos Fractais, buscamos aliar as contribuições de Raymond Duval, que destaca a importância das diferentes Representações Semióticas para o ensino de Matemática. Segundo Duval (2012, p.270), "[...] é essencial, na atividade matemática, poder mobilizar diferentes Registros de Representação Semiótica (figuras, gráficos, escrituras simbólicas, língua natural, etc...) no decorrer de um mesmo passo, poder escolher um registro no lugar de outro".

Duval (2012) ressalta que as diferentes Representações relacionadas a um mesmo objeto matemático não devem ser confundidas com as suas Representações. Esse fato nos remete a ideia de que não existe uma única Representação que satisfaça a compreensão de um determinado conceito, mas que cada Representação traz um significado diferente para o aluno, a partir do mesmo objeto matemático. Ou seja, faz-se necessário que o aluno coordene diferentes Representações considerando o mesmo objeto matemático. De fato, a distinção entre o objeto matemático e sua Representação é determinante para a compreensão daquilo que é proposto, visto que, cada Representação tem seu significado. Colombo *et al.* (2008, p. 05) explicam que:

> [...] Cada registro apresenta certas limitações representativas específicas, surgindo daí a necessidade da utilização de outros sistemas de expressão e de representação, além da linguagem natural e das imagens, como sistemas de escrita para os números, notações simbólicas para os objetos, escrita algébrica, escrita lógica, figuras geométricas, representações em perspectiva, gráficos cartesianos, redes, diagramas, esquemas, etc.

Conforme Duval (2012), para um aprendizado significativo de um determinado conceito matemático, o aluno deve articular pelo menos dois Registros de Representação, sendo que, quanto mais registros forem explorados de um mesmo objeto matemático, melhor será a compreensão do objeto.

Neste contexto, ao refletirmos sobre a aprendizagem de Matemática, no sentido de adquirir conhecimentos, as Representações Semióticas se tornam essenciais para a atividade cognitiva do sujeito que a utiliza.

Nesta teoria, no decorrer dos estudos de um determinado objeto matemático, consideram-se dois tipos de transformação: O tratamento e a conversão. Conforme Duval (2012), o tratamento é quando ocorre uma transformação interna no mesmo Registro de Representação, (por exemplo, realizar uma mudança em um determinado número do sistema fracionário para o sistema decimal).

A conversão é a transformação de uma Representação em outro Registro conservando o objeto inicial. Por exemplo, a frase "o dobro de um número mais dois", está representado em língua natural. Ao representarmos esta frase em linguagem algébrica estamos realizando uma conversão.

Neste sentido, destacamos a importância da coordenação entre os Registros e a compreensão por parte dos alunos de que existem diferentes Representações a partir do mesmo objeto matemático, ou seja, nenhuma das Representações é o objeto em si. Do ponto de vista de Duval (2012), esta coordenação auxiliará no que diz respeito a diferenciar o objeto da sua Representação indicando, portanto, aprendizagens relacionadas ao conceito.

Procedimentos metodológicos

Diante do objetivo principal desta pesquisa, que foi analisar o desempenho de estudantes do Ensino Médio em tarefas matemáticas que envolvem Geometria Fractal e suas diferentes Representações, realizamos primeiramente, um estudo sobre as possibilidades de fractais que poderiam ser contemplados em nossas tarefas. Ressaltamos que nosso objetivo não foi verificar os tipos de registros que pudessem aparecer nas resoluções dos alunos, mas sim diversificar as tarefas a serem implementadas considerando os Registros de Representação Semiótica.

Pretendíamos selecionar um fractal geométrico que pudesse ser construído com materiais de desenho como régua e compasso, e também que tivesse a possibilidade de serem explorados vários conceitos matemáticos condizentes com o currículo escolar do Ensino Médio. Assim, de acordo com esses critérios e estudos, optamos por elaborar tarefas matemáticas relacionadas ao Fractal Geométrico Hexágono de Durer, nas quais foi possível explorar o uso de régua e compasso, e conceitos matemáticos como área, perímetro, e outros que surgem direta ou indiretamente como operações com frações, radiciação, razão, etc.

As tarefas foram implementadas com uma turma de 17 alunos do 3º ano do Ensino Médio. O desenvolvimento das tarefas foi realizado durante quatro horas/aulas em período diurno em uma escola pública situada na cidade de Peabiru, no Paraná.

A primeira tarefa trata-se da construção do fractal de Durer com régua e compasso, e que consiste da Representação Figural do fractal estudado. Esta tarefa foi desenvolvida individualmente pelos alunos, seguida de uma questão dissertativa sobre a sua construção, contemplando a Representação em Linguagem Natural.

A segunda tarefa consistiu no preenchimento de uma tabela envolvendo alguns conceitos e elementos matemáticos relacionados ao fractal de Durer, tais como medida do lado, área e perímetro do hexágono em suas diferentes etapas, contemplando a Representação Numérica. A figura do hexágono apresentado aos alunos consistia da etapa 0 até a etapa 3. Esta tarefa foi desenvolvida em dupla, visto que envolvem diversos cálculos e conhecimentos matemáticos, e os alunos poderiam discutir, relembrar, e estabelecer um diálogo, contribuindo uns com outros no processo de resolução.

A coleta de dados deste trabalho foi feita por meio de observação, registros das falas dos alunos em diário de campo e análise das respostas dos alunos. Todas as tarefas foram implementadas em etapas, sendo feita as considerações cabíveis em cada uma delas e corrigidas ao término de cada etapa deste trabalho.

A fim de exemplificar as análises e considerações feitas a partir destas, apresentaremos as tarefas elaboradas e algumas respostas fornecidas pelos alunos. Ressaltamos que as análises foram realizadas considerando erros e acertos, em conformidade com cada Registro de Representação Semiótica realizado nas tarefas. Para preservar a identidade dos sujeitos da pesquisa os identificaremos como A1, A2, A3, e assim sucessivamente.

Descrição da implementação de cada tarefa e análises

1ª tarefa

A primeira tarefa teve duração de uma hora/aula, e consistiu da construção do Fractal Geométrico Hexágono de Durer utilizando materiais de desenho, sendo estes régua e compasso e, na sequência, os alunos deveriam descrever com suas palavras (registro linguagem natural) os passos de construção do fractal. Sendo assim, esta tarefa consistiu em explorar duas representações: figural e linguagem natural.

Para isso, foram distribuídos aos alunos folhas sulfite A4, régua e compasso. Treze alunos estavam presentes nesta aula, e optamos por desenvolver esta tarefa individualmente. Para introduzir a referida construção, começamos com uma pergunta simples, a ser respondida oralmente pelos alunos sobre quais figuras geométricas os alunos conheciam. A maioria dos alunos respondeu quadrado, retângulo, triângulo e circunferência. Nenhum deles mencionou outras figuras como trapézio, pentágono, hexágono etc. Acreditamos que isto ocorreu pelo fato de os alunos não terem "familiaridade" com outras figuras, sendo as mais conhecidas às figuras citadas por eles.

Além dos materiais, foi entregue uma folha com a figura do fractal Hexágono de Durer. A (primeira autora deste trabalho) conduziu a construção no quadro, auxiliando quando necessário, enquanto os alunos acompanhavam o processo e construíam os seus próprios fractais. Com relação ao domínio dos materiais de desenho, pôde-se observar que alguns alunos apresentam dificuldades em manusear o compasso.

Conforme aumentavam as iterações do fractal, eram notórias as dificuldades dos alunos no manuseio dos materiais, por isso pautamos a exploração com régua e compasso em um hexágono de cada etapa. A seguir, apresentamos algumas construções realizadas pelos alunos.

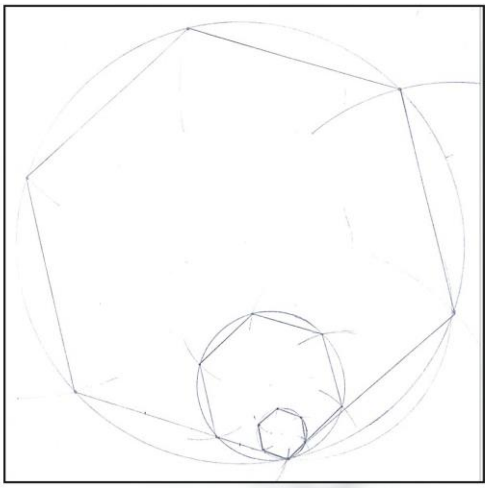


Figura 3: Construção do fractal Hexágono de Durer realizado pela aluna A17.
Fonte: Autoras

É possível notar uma facilidade por parte da aluna A17 em desenhar, sendo que a mesma relatou: *“Adoro desenhos, não tenho dificuldade nenhuma”*.

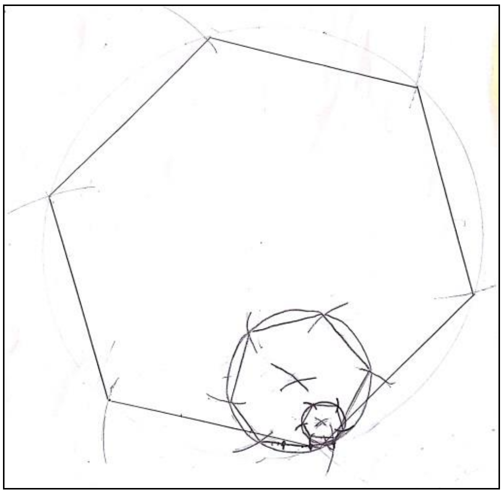


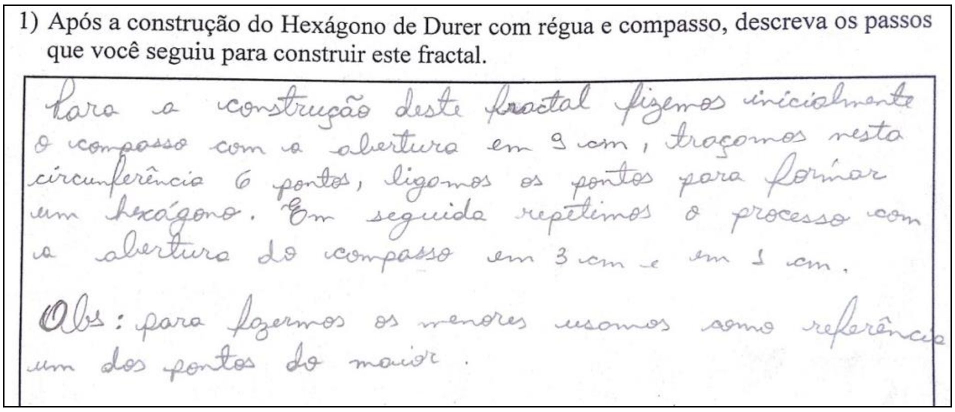
Figura 4: Construção do fractal Hexágono de Durer realizado pelo aluno A9.
Fonte: Autoras

Na figura 4, podemos observar, a partir da primeira iteração, alguns erros nas medidas e traçados. O aluno A9 relatou que havia utilizado o compasso uma única vez em sala de aula, e que não tinha prática com régua e compasso.

Mesmo com poucas iterações realizadas, os alunos perceberam que o tamanho dos hexágonos tende a diminuir a cada iteração. Foi possível, ainda, introduzir a ideia de autossimilaridade com os alunos, devido ao processo de repetição de um padrão em cada iteração seguindo uma proporção.

Após a construção do fractal com régua e compasso, foi entregue uma ficha de tarefa solicitando que os alunos descrevessem os passos seguidos por eles na construção do fractal. A questão tinha por objetivo fazer com que os alunos refletissem a respeito do processo de construção do fractal feito com materiais de desenho, contemplando a Representação do fractal em Linguagem Natural.

Diante das respostas fornecidas pelos alunos a respeito de suas construções do Hexágono de Durer, observamos que os mesmos compreenderam os passos desta construção, e que os hexágonos construídos em cada etapa do fractal tendiam a ficar cada vez menores seguindo uma proporção. A seguir, apresentamos a resposta do aluno A16.


1) Após a construção do Hexágono de Durer com régua e compasso, descreva os passos que você seguiu para construir este fractal.

Para a construção deste fractal fizemos inicialmente o compasso com a abertura em 9 cm, traçamos nesta circunferência 6 pontos, ligamos os pontos para formar um hexágono. Em seguida repetimos o processo com a abertura do compasso em 3 cm e em 1 cm.

Obs: para fazermos os menores usamos como referência um dos pontos do maior.

Figura 5: Resposta apresentada pelo aluno A16
Fonte: Autoras

2ª tarefa

A segunda tarefa, intitulada "Explorando conceitos matemáticos no Fractal Hexágono de Durer", consistiu em uma tabela em que, tínhamos por objetivos reforçar e verificar a compreensão dos alunos em relação aos conteúdos de Matemática provenientes do fractal construído, explorando a Representação Simbólica (Numérica), conforme apresentamos a seguir:

2) Considerando o lado do hexágono inicial de medida de lado 9 cm, preencha o quadro a seguir:

Tabela 1- Em relação aos hexágonos formados[1]

Etapa	Número de hexágonos formados em cada etapa	Número de hexágonos formados no total	Medida do lado de cada hexágono (cm)	Area de cada hexágono (cm^2)	Perímetro de cada hexágono (cm)
0	1	1	9 cm	$\frac{243\sqrt{3}}{2}$ cm^2	54 cm
1	6	7	3 cm	$\frac{27\sqrt{3}}{2}$ cm^2	18 cm
2	36	43	1 cm	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm^2	6 cm
3	216	259	$\frac{1}{3}$ cm	$\frac{\sqrt{3}}{6}$ cm^2	2 cm

Fonte: Autoras

Esta etapa foi desenvolvida em dupla a fim de proporcionar um diálogo entre os alunos e posterior contribuição mutua. Dispusemos aos alunos calculadoras científicas, no

[1] Optamos por disponibilizar neste artigo a tabela preenchida, com os respectivos resultados solicitados. Informamos que a tabela foi entregue aos alunos sem o preenchimento, e coube a eles realizarem esta tarefa.

entanto, alguns optaram por realizarem os cálculos sem o uso deste instrumento. Dezesseis alunos participaram da implementação, sendo utilizadas 3 horas/aula para esta etapa.

No cálculo da área, sugerimos aos alunos que não utilizassem a fórmula da área do hexágono para efetuarem os cálculos, mas que pensassem sobre outras maneiras de calcular sem recorrer à fórmula da área do hexágono. Os alunos somente relataram sobre os triângulos que aparecem indiretamente no fractal, perguntaram se poderiam ser utilizados, e mencionaram, com um pouco de receio, o Teorema de Pitágoras.

A pretensão neste momento era de calcular a área primeiramente, traçando as diagonais do hexágono em cada etapa. Fazendo isto, o hexágono divide-se em seis triângulos equiláteros. Na sequência os alunos deveriam calcular a área de um dos seis triângulos, utilizando o Teorema de Pitágoras para encontrar a altura deste. Encontrada a altura, posteriormente, utilizariam a fórmula da área de um triângulo retângulo, pois o hexágono é constituído de seis triângulos equiláteros em que, ao traçar a altura de cada um, dividem-se em dois triângulos retângulos. Assim, os alunos encontrariam a área do triângulo retângulo e, por fim, multiplicariam o resultado por dois e, depois por seis.

Nosso objetivo era mostrar caminhos diferentes possíveis de alcançar o resultado desejado. Percebemos dificuldades por parte dos alunos principalmente relacionadas à Matemática básica, como em relação à multiplicação, adição e divisão de frações, radiciação, potenciação e fatoração.

Diante das dificuldades apresentadas, percebemos que a figura fractal da maneira que expomos na tarefa elaborada não contribuiu muito no que diz respeito à visualização em cada etapa. Assim, ao fazermos uma análise sobre as dificuldades dos alunos, na aula seguinte levamos impresso o fractal separado em etapas, sendo estas, da etapa 0 à etapa 3, como mostra a figura 6.

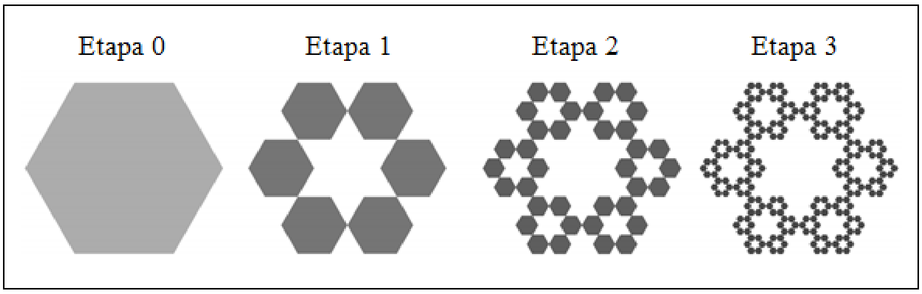


Figura 6: Fractal Hexágono de Durer em etapas separadas
Fonte: Autoras

Solicitamos aos alunos que entregassem as folhas com os respectivos cálculos realizados para o preenchimento da tabela, a fim de analisar os possíveis erros decorrentes da resolução. No entanto, somente alguns entregaram. A seguir, apresentamos algumas respostas dos alunos.

3) Considerando o lado do hexágono inicial de medida de lado 9cm, preencha o quadro a seguir:

Tabela 1- Em relação aos hexágonos formados

Etapa	Número de hexágonos formados em cada etapa	Número de hexágonos formados no total	Medida do lado de cada hexágono(cm)	Área de cada hexágono(cm²)	Perímetro de cada hexágono(cm)
0	1	1	9 cm	543,24 cm^2	54 cm
1	6	7	3 cm	30,15 cm^2	18 cm
2	36	43	1 cm	3,33 cm^2	6 cm
3	216	259	$\frac{1}{3}$ cm ou 0,3 cm	0,297	2 cm

Figura 7: Resposta das alunas A4 e A16
Fonte: Autoras

A dupla optou por efetuar os cálculos da área utilizando numeração decimal, ou seja, as alunas realizaram uma transformação da Representação (Numérica), ocorrendo, de acordo com Duval (2012), um tratamento. No entanto, observamos que os cálculos da área em suas diferentes etapas estão errados. O Teorema de Pitágoras tem por enunciado: O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos. Porém, as alunas isolaram a altura, o que acarretou no erro dos cálculos. O correto, de acordo com o enunciado do teorema, seria isolar a hipotenusa. Isso ocorreu com a maioria dos alunos, atribuímos o erro, ao fato de que, como deveriam encontrar inicialmente a altura, os alunos isolaram-na, esquecendo-se do enunciado do teorema. A figura 8 e figura 9 apresentam as respostas e cálculos de outra dupla.

3) Considerando o lado do hexágono inicial de medida de lado 9cm, preencha o quadro a seguir:

Tabela 1- Em relação aos hexágonos formados

Etapa	Número de hexágonos formados em cada etapa	Número de hexágonos formados no total	Medida do lado de cada hexágono(cm)	Área de cada hexágono(cm²)	Perímetro de cada hexágono(cm)
0	1	1	9	$\frac{243\sqrt{5}}{2}$ cm^2	54 cm
1	6	7	3	$\frac{27\sqrt{3}}{2}$ cm^2	18 cm
2	36	43	1	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm^2	6 cm
3	216	259	$\frac{1}{3}$ cm	$\frac{\sqrt{5}}{6}$ cm^2	2 cm

Figura 8: Respostas das alunas A3 e A17
Fonte: Autoras

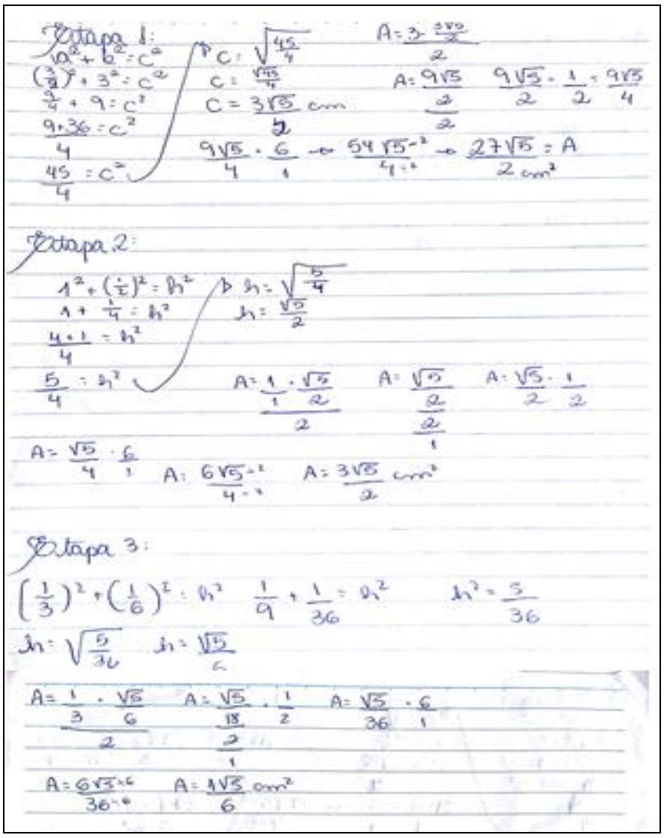


Figura 9: Cálculos da área do fractal apresentado pelas alunas A3 e A17
Fonte: Autoras

Neste caso, não consta o cálculo da etapa 0, mas as alunas cometeram os mesmos erros que os demais, isolaram a altura. E no cálculo da área do triângulo, utilizaram o valor da base nas etapas 1, 2 e 3, sendo respectivamente, 3, 1 e 1/3. Como se trata de um triângulo retângulo, as alunas deveriam considerar a metade desses valores para a base, ou seja, 3/2, ½ e 1/6 e, posteriormente, multiplicar o resultado por dois, e depois por seis, pois o hexágono foi dividido em seis triângulos equiláteros. Embora, os cálculos e resultados estejam errados, as alunas se mostraram interessadas em realizar os cálculos. A aluna A17 relatou que, no primeiro dia desta etapa, não se lembrava de como resolvia as quatro operações com frações, e pediu a uma prima no final de semana seguinte que a ajudasse a relembrar.

Para a correção, utilizamos o recurso de Datashow para projetar as etapas no quadro (construção em registro figural), para uma melhor compreensão dos alunos no momento de correção da tabela. Nesse momento, fica claro a importância de se explorar os diferentes registros, e que um registo complementa o outro.

As dificuldades mais aparentes dos alunos foram na parte de cálculos de contagem dos hexágonos e no procedimento do cálculo da área dos hexágonos em suas diferentes etapas. Além de problemas decorrentes de Matemática básica, os alunos neste dia estavam inquietos, conversadores, e isso dificultou um pouco o desenvolvimento da tarefa. Nas atividades anteriores, isto não ocorreu, eles estavam participativos. Atribuímos isso ao fato de que, ao começarem a desenvolver os cálculos, a maioria apresentou dificuldades e, por se tratar de cálculos, especificamente os solicitados na tarefa requerem um pouco de paciência e análise do fractal.

Considerações finais

Nesta pesquisa, tivemos como objetivo analisar o desempenho de alunos do 3º Ano do Ensino Médio em tarefas matemáticas que dizem respeito ao Fractal Hexágono de Durer e suas diferentes Representações. Nesse sentido, baseadas em Duval (2012), elaboramos tarefas envolvendo recursos como régua e compasso, e uma tabela para ser preenchida com cálculos de número de hexágonos (em cada etapa e total), medida de lado de cada hexágono, área e perímetro.

Ao explorar a Geometria dos Fractais em nossas tarefas deparamo-nos com um desafio, pois, os alunos já tinham ouvido falar sobre fractais, porém não haviam realizado tarefas sobre o tema. De maneira geral, notamos que a maioria dos alunos gostaram de participar da pesquisa, consideraram que as aulas foram diferentes e dinâmicas, e tiveram uma boa participação nas tarefas.

Os alunos manifestaram mais dificuldades no manuseio dos instrumentos de desenho, principalmente do compasso. Neste caso, notamos que esses materiais não são utilizados em sala de aula, e destacamos que através desses materiais o professor pode explorar diversos conhecimentos de geometria.

Em relação ao preenchimento da tabela, os alunos tiveram dificuldades em associar conceitos matemáticos ao fractal, e não se lembravam de como realizar operações com frações, entre outros conceitos, já estudados por eles, de Matemática básica. Nesse momento, foi essencial apresentarmos aos alunos a construção do fractal na Representação Figural, indicando a importância das diferentes representações para a compreensão de um conceito matemático. Por se tratar de um terceiro ano do Ensino Médio, esperávamos que os alunos tivessem um desempenho mais avançado, ou pelo menos não indicassem tantas dificuldades ao realizarem os cálculos requeridos na tabela. Ressaltamos que, diante dessas dificuldades, principalmente no cálculo da área, redobramos a nossa atenção e buscamos auxiliar cada grupo de alunos, lançando questões que os fizessem refletir sobre a tarefa. Atentamo-nos a todo tempo a guiá-los no decorrer de todas as tarefas implementadas.

Um dos pontos que consideramos mais relevante nesta pesquisa foi poder apresentar a Matemática aos alunos de uma maneira diferente da habitual, reforçando a ideia de Padilha (2012) que nos diz ser necessário abandonar a zona de conforto, embora seja algo difícil, e que experimentar novas possibilidades pode ser muito gratificante, no que diz respeito ao nosso desempenho como professores, e na contribuição com desenvolvimento intelectual de nossos alunos.

Acreditamos que essas abordagens permitem trabalhar a Matemática de maneira construtiva e trazem consigo discussões interessantes, que podem contribuir com o aprendizado dos alunos.

Consideramos que o encaminhamento das tarefas possibilitou aos alunos conhecerem, ao menos um pouco, sobre a Geometria Fractal, participarem efetivamente das construções, e permitiu que os alunos vivenciassem uma experiência diferenciada nas aulas de Matemática. E, apesar das dificuldades dos alunos aqui mencionadas, contando com nossa intervenção durante todo o processo, podemos concluir baseadas em Duval, que os alunos associaram as diferentes Representações do fractal de Durer que lhes foram propostas, e estas contribuíram com a compreensão dos conceitos matemáticos trabalhados.

Referências

ALMEIDA, Arlete Aparecida Oliveira de. **Os Fractais na formação docente e sua prática em sala de aula**. 2006. 221 f. Dissertação (Mestrado), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2006. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11076>. Acesso em: 23 fev. 2017.

CARVALHO, Hamilton Cunha. **Geometria Fractal: perspectivas e possibilidades no ensino de matemática**. 2005. 101 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Curso de Pós Graduação em Ensino em Ciência e Matemática, Universidade Federal do Pará, Belém, 2005.

COLOMBO, Janecler Ap. Amorin; FLORES, Claudia R.; MORETTI, Méricles T.. Registros de representação semiótica nas pesquisas brasileiras em Educação Matemática: pontuando tendências *p.41-72*. **Zetetiké:** Revista de Educação Matemática, Campinas, SP, v. 16, n. 29, jan. 2009. ISSN 2176-1744. Disponível em: <http://ojs.fe.unicamp.br/ged/zetetike/article/view/2397/2159>. Acesso em: 23 nov. 2016.

DUVAL, Raymond; MORETTI, Trad. Méricles Thadeu. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revemat: Revista Eletrônica de**

Educação Matemática, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, dez. 2012. ISSN 1981-1322. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266/23465>. Acesso em: 24 nov. 2016.

MÉDICE JÚNIOR, Fábio. **Fractais: Motivando a Matemática no Ensino Médio**. 2014. 67 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, Rj, 2014. Acesso em: 27 fev. 2017.

NUNES, Raquel Sofia Rebelo. **Geometria Fractal e Aplicações**. 2006, 78 f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Faculdade de Ciências, Universidade do Porto, 2006. Disponível em: <http://www.fc.up.pt/pessoas/jfalves/Teses/Raquel.pdf>. Acesso em: 05 jan. 2017.

PADILHA, Terezinha Aparecida Faccio. **Conhecimentos Geométricos e Algébricos a partir da construção de fractais com uso do *software* Geogebra**. 2012. 140f. Dissertação (Mestrado) – Centro Universitário Univates. Lajeado, 2012.

PARANÁ. **Diretrizes Curriculares de matemática do Estado do Paraná**, 2008. Disponível em <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce_mat.pdf>. Acesso em: 09 de maio de 2016.