

PROCESSOS COGNITIVOS NECESSÁRIOS PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE GEOMETRIA

Celia Finck Brandt
Universidade Estadual de Ponta Grossa
brandt@bighost.com.br

Fátima Aparecida Queiroz Dionizio
Universidade Estadual de Ponta Grossa
faqdionizio@hotmail.com

Carine Scheifer
Universidade Estadual de Ponta Grossa
carine.scheifer@gmail.com

Franciele Isabelita Lopes Novak
Universidade Estadual de Ponta Grossa
franciele.isa@hotmail.com

Lucas Matheus Sandeski
Universidade Estadual de Ponta Grossa
lucassan1509@gmail.com

Guilherme Vinicius Favoretto
Universidade Estadual de Ponta Grossa
guiga_favoretto@hotmail.com

Resumo:

Com o objetivo de apontar a ocorrência das apreensões, dos olhares e as desconstruções dimensionais exigidos para a resolução de problemas de geometria, à luz da teoria dos Registros de Representação Semiótica foram selecionados problemas de geometria em livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental, do Ensino Médio e em bancos de questões disponibilizados na internet. Dentre as questões encontradas em um primeiro momento, apenas 10 (dez) foram escolhidas por serem consideradas mais apropriadas para alcançar os objetivos da pesquisa. Nesta análise, foram consideradas as apreensões, as modificações possibilitadas pela apreensão operatória figural, os olhares, as transformações de dimensões e os conteúdos matemáticos para cada uma das 10 questões. Constatou-se que nas questões analisadas são exigidas articulações entre diferentes apreensões e que a necessidade de diferentes apreensões figurais, de diferentes olhares e das possibilidades de desconstruções dimensionais, se faz presente em todas as atividades analisadas, embora envolvam conteúdos diversos, o que sugere que ainda é necessário que o aluno tenha o controle dos gestos intelectuais específicos da atividade.

Palavras-chave: Geometria. Processos Cognitivos. Raymond Duval.

Introdução

O desenvolvimento deste trabalho teve início a partir de estudos da teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (2004, 2011, 2012a, 2012b), para a

aprendizagem da Geometria. Esses estudos foram realizados pelos integrantes do Grupo de Estudo e Pesquisa Estudo e Pesquisa em Aprendizagem da Matemática (GEPAM), coordenado pela professora Dr^a. Celia Finck Brandt, da Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG).

Em um primeiro momento foram realizadas discussões a respeito de como ocorre o processo de ensino e aprendizagem da geometria de um ponto de vista cognitivo da referida teoria, buscando responder a seguinte questão: Quais os processos cognitivos exigidos para a resolução de problemas de geometria, à luz da teoria de Duval? Como objetivo busca-se apontar as apreensões, os olhares e a desconstrução dimensional requeridos em problemas de geometria, à luz da teoria de Duval. Para alcançar esse objetivo procedeu-se com a busca de problemas de geometria em livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental, do Ensino Médio e em bancos de questões disponibilizados na internet.

Duval (2012a) apresenta algumas atividades cognitivas específicas que são requeridas nas resoluções de questões de Geometria. Uma dessas atividades depende da conscientização e diferenciação de diferentes **apreensões** exigidas durante o processo de raciocínio desenvolvido. Essas apreensões se devem a heurística dos problemas de geometria que se referem a registros de representações espaciais e permitem interpretações autônomas. São identificadas como apreensões **perceptiva, operatória, discursiva e sequencial**.

A apreensão perceptiva diz respeito à identificação automática dos elementos constituintes da figura geométrica, em relação às dimensões e formatos (DUVAL, 2012). Nesse viés, tomando, por exemplo, um triângulo, a percepção imediata é de uma figura plana, ou seja, de dimensão dois. No entanto, por meio desta apreensão é importante que ocorra a desconstrução dimensional do triângulo, que compete à verificação não apenas da superfície em duas dimensões, mas da presença de outros elementos, como os segmentos de reta de dimensão um, e os vértices de dimensão zero. A apreensão discursiva é a interpretação dos elementos da figura geométrica, privilegiando a articulação dos enunciados através da imersão dos mesmos numa rede semântica de propriedades do objeto. Segundo Duval (2012, p.120), muitas vezes há uma contradição entre a apreensão perceptiva e a discursiva, pois uma figura desenhada no contexto de uma atividade matemática remete a duas atitudes contrárias: “uma imediata e automática, a apreensão perceptiva de formas; e outra controlada, que torna possível a aprendizagem, a interpretação discursiva dos elementos figurais”. A importância dada para a apreensão perceptiva está no fato de que “*ver geometricamente uma figura é operar uma desconstrução dimensional das formas que reconhecemos imediatamente em*

outras formas que não enxergamos à primeira vista, e isso *sem que nada mude na figura afixada no monitor ou construída no papel.*” (DUVAL, 2011, p. 87, grifos do autor).

Segundo Duval (2012a), muitas vezes há uma ausência da atitude de interpretação discursiva da figura, pois a maioria dos alunos lê o enunciado, mas se apegam à apreensão perceptiva para solucionar o problema, e não retornam ao enunciado. Nesse caso, Duval (2012a) alerta que há uma ausência da atitude de interpretação discursiva da figura e por isso esses alunos só tem sucesso em problemas cujos enunciados sejam semanticamente congruentes às figuras.

Quando a congruência semântica e a apreensão perceptiva da figura não são suficientes para busca de solução de um problema, se faz necessária a apreensão operatória. Esta apreensão se refere às possíveis modificações que uma figura pode permitir e às reorganizações perceptivas que estas mudanças possibilitam. Há diferentes formas de realizar estas modificações: a) **mereológica** – quando há divisões nas figuras constituindo várias subfiguras ou quando ela é incluída em outra figura, para que se torne uma subfigura; b) **ótica** – quando se aumenta, diminui ou deforma uma figura em outra, chamada sua imagem e; c) **posicional** – que se desloca ou rotaciona uma imagem em relação às referências do campo onde ela se destaca. Dentre estas modificações relacionadas à apreensão operatória, Duval (2012a) atribui interesse particular a modificação mereológica, que possibilita uma operação denominada de *reconfiguração intermediária*. Esta operação é importante, segundo o autor, pois

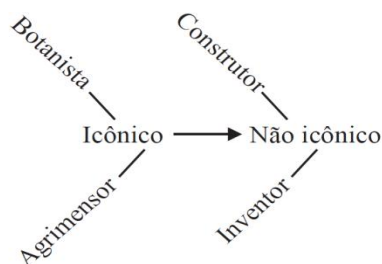
[...] as partes elementares obtidas por fracionamento, podem ser reagrupadas em várias subfiguras, todas pertencentes à figura inicial. Esta operação permite engajar, de imediato, tratamentos, tais como, a medida de área através da soma das partes elementares ou do reconhecimento da equivalência de dois reagrupamentos intermediários. (DUVAL, 2012a, p. 128 - grifos do autor).

A apreensão sequencial segundo Duval (2012a, p. 120) “é explicitamente solicitada em atividades de construção ou em atividades de descrição, tendo por objetivo a reprodução de uma dada figura”. A construção de figuras possui importância no que diz respeito à formação de um objeto ou situação matemática no registro figurativo, suscitando elementos conceituais. Duval (2012b, p. 287, grifos do autor) explica que “as atividades de construção *ensinam a ver*, isto é, permitem descobrir, mobilizar e controlar a produtividade heurística das figuras”.

Os problemas podem exigir diferentes articulações entre as apreensões. Segundo Moretti (2013) essas articulações podem ser entre dois ou mais tipos de apreensões para sua

resolução. Nas articulações mais evidentes Duval¹ (1997 apud Moretti 2013), destaca a importância da apreensão perceptiva na aprendizagem da geometria, pois as demais apreensões subordinam-se a ela, em maior ou menor grau, dependendo do tipo de problema. Partindo da importância da apreensão perceptiva, Duval (2005)², de acordo com Moretti (2013), caracterizou diversas maneiras de olhar, que podem ser sintetizadas conforme a Figura 1.

Figura 1 – Quatro maneiras de olhar uma figura geométrica



Fonte: Moretti (2013, p. 293)

O olhar que possibilita o reconhecimento do contorno das formas, como a diferenciação de triângulos, quadriláteros, círculos, etc., é o **olhar botânico** e pode ser considerado como um olhar qualitativo. Já o **olhar agrimensor** possibilita a realização de medidas no terreno e a transferência dessas medidas para o plano do papel. Moretti (2013) ressalta que as atividades que exigem o olhar agrimensor são aquelas que passam de uma escala de grandeza à outra e “[...] neste tipo de atividade, as propriedades geométricas são as mobilizadas para fins de medida”, como por exemplo, o procedimento utilizado por Eratóstenes para medir o raio da terra. (DUVAL, 2005 citado por MORETTI, 2013, p.294).

Quando é necessário o uso de instrumentos de desenho geométrico, como régua não graduada e compasso, ou mesmo alguns programas computacionais como o *GeoGebra* e o *Cabri géomètre*, estamos diante da necessidade de um **olhar do construtor**. Quando isso ocorre, “verdadeiramente o aluno pode tomar consciência que uma propriedade geométrica não é apenas uma característica perceptiva” (DUVAL, 2005 citado por MORETTI, 2013). O **olhar inventor** caracteriza-se pela operação sobre a figura dada, adicionando traços ou modificando-a de alguma forma para encontrar uma resolução para o problema apresentado. De acordo com Moretti (2013, p.294) “esses olhares caminham de um lado a outro lado

¹ DUVAL, R. *La notion de registre de représentation sémiotique et l'analyse du fonctionnement cognitif de la pensée*. Curso dado à PUC/SP, 1997.

² DUVAL, R. Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives*, volume 10, p. 5 - 53. 2005, IREM de Strasbourg.

conforme as apreensões em geometria são exigidas. No olhar do botanista, essencialmente é a apreensão perceptiva que é exigida. Na outra ponta, todas as apreensões participam das atividades do olhar do inventor”.

As apreensões, as dimensões e os olhares exigidos na resolução de problemas de geometria, explanadas até o momento, constituem o foco das análises das questões que serão apresentadas a seguir.

Procedimentos metodológicos de coleta e análise dos dados

Para a realização desta pesquisa de abordagem qualitativa, foram feitas buscas e seleções de problemas que envolviam os conteúdos de geometria em livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio e em bancos de questões disponibilizados na internet. Após reflexões sobre inúmeras questões selecionadas a priori, foram escolhidas 10 (dez) consideradas mais apropriadas para alcançar os objetivos da pesquisa, de modo que abrangessem diferentes conteúdos, procedimentos de resolução e atividades cognitivas. Feita esta escolha, procedeu-se com a resolução das questões para uma análise mais aprofundada das especificidades exigidas para a resolução dos problemas a partir da fundamentação teórica em Duval (2004, 2011, 2012a, 2012b). Nesta análise, foram consideradas as apreensões, as modificações possibilitadas pela apreensão operatória figural, os olhares, as transformações de dimensões e os conteúdos matemáticos. As dez questões foram contempladas nesta análise, as quais serão apresentadas na sequência.

A primeira questão selecionada e os aspectos cognitivos identificados para sua resolução podem ser observados no Quadro 1.

Quadro 01 – Análise cognitiva da questão 1

<p>1) Na figura, ABCD é um losango cujo lado mede 4,5cm. Sabendo que DE = 7,5cm, determine a medida do segmento AF. Justifique seus cálculos.</p>	Apreensões	Perceptiva, discursiva e operatória (modificação mereológica).
	Olhares	Construtor.
	Desconstrução dimensional	2D → 2D → 0D → 1D → 2D
	Conteúdos	Semelhança de triângulos, propriedade dos quadriláteros, Pitágoras.

SOUZA, J.; PATARO, P. M. **Vontade de saber matemática**: 9º ano. São Paulo: FTD, 2012.

Fonte: os autores.

Esta questão 1 contempla o olhar do construtor, pois exige que o aluno opere sobre a figura, encontrando subfiguras por meio da apreensão operatória de modificação mereológica.

A operação mereológica se dá no momento em que o aluno separa dois triângulos e precisa decompor mentalmente ou graficamente a figura em duas subfiguras para identificar a semelhança. As apreensões perceptiva e discursiva possibilitam a compreensão do enunciado e sua relação com a figura apresentada.

Em relação às dimensões e a desconstrução dimensional, a apreensão inicial é a do triângulo maior (2D) que sofrerá uma modificação que o separa em um losango e demais triângulos (2D), feito isso, é necessário identificar o vértice (0D) e o lado (1D) do triângulo que permitem encontrar a semelhança entre os triângulos (2D).

No Quadro 2 pode ser observada a identificação dos gestos cognitivos para a questão 2.

Quadro 02 – Análise cognitiva da questão 2

<p>2) Determine o perímetro do triângulo ABC indicado na figura. Justifique seus cálculos.</p>	Apreensões	Perceptiva, discursiva, operatória (modificação mereológica).
	Olhares	agrimensor, inventor
	Desconstrução dimensional	2D → 0D → 1D → 2D
	Conteúdos	Teorema de Pitágoras e perímetro.

SOUZA, J. **Novo olhar**: matemática Ensino Médio. v. 2. São Paulo: FTD, 2012.

Fonte: os autores.

Para a resolução desta questão, a apreensão perceptiva se faz presente na identificação da figura apresentada. A apreensão discursiva diz respeito à identificação dos elementos indicados no enunciado que precisarão ser reconhecidos para que se possa resolver o problema, como o perímetro e a delimitação do triângulo ABC. E a apreensão operatória está relacionada à necessidade de se realizar uma modificação mereológica na figura decompondo-a em subfiguras (triângulos e trapézios ou dois triângulos retângulos) para poder calcular o perímetro. Para que ocorra esta modificação se faz necessário o olhar agrimensor que permite relacionar as medidas localizadas no plano cartesiano e/ou na malha quadriculada ao triângulo e o olhar inventor que possibilitará adicionar traços na figura para realizar a modificação mereológica mencionada.

Ao iniciar a resolução parte-se da identificação do triângulo (2D), sendo necessário relacionar aos pontos que possibilitam identificar as medidas correspondentes (0D) para adicionar um traço ou o segmento de reta (1D) que possibilita retomar a figura plana (2D) sobre a qual será calculado o perímetro.

A análise cognitiva da questão 3 pode ser observada no Quadro 3.

Quadro 03 – Análise cognitiva da questão 3

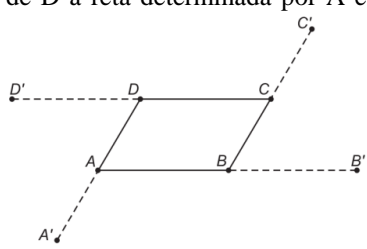
<p>3) Dois Irmãos, curiosos para saber a que altura do chão conseguiram empinar sua pipa, resolveram manda-la ao ar presa em duas linhas. Eles fizeram esta experiência num momento em que o sol projetava uma sombra perfeitamente vertical sobre eles. Cada um dos irmãos ficou segurando uma das linhas, ambas supostamente esticadas. Eles observaram que suas posições estavam alinhadas com a sombra da pipa, estando a sombra da pipa entre os dois. E mediram 24 metros de distância entre um dos irmãos e a sobra da pipa, e 78 metros de distancia entre os dois.</p> <p>a) Faça um esboço da situação, destacando as posições dos irmãos, da pipa e sua sombra.</p> <p>b) Supondo que as duas linhas formavam um angulo reto no nó preso à pipa, calcule a que altura estava a pipa?</p> <p>Justifique seus cálculos.</p>	Apreensões	Discursiva, operatória (modificação mereológica) e sequencial.
	Olhares	Construtor, inventor e agrimensor.
	Desconstrução dimensional	0D -1D-1D -2D
	Conteúdos	Semelhança de triângulos, retas paralelas cortadas por transversais.
<p>Vestibular do IBMEC de 2005. Disponível em: <http://d2f2yo9e8spo0m.cloudfront.net/vestibulares/insper/2006/semestre1/resolucoes/resolucao_insper_2006_sem1_analise_quant_logica_f2_1_10.pdf>. Acesso em 15 out. 2016.</p>		

Fonte: os autores.

Nesta questão 3, a apreensão discursiva é necessária para o reconhecimento das propriedades geométricas indicadas no enunciado. A apreensão sequencial refere-se ao esboço da situação a partir da sequência de informações apresentadas. A necessidade de esboçar a situação também caracteriza o olhar construtor por exigir a consciência das propriedades geométricas envolvidas e do agrimensor para conseguir representar no papel a situação informada transformando a escala de grandeza (não é possível esboçar a situação em metros). Para esboçar a situação, parte-se dos pontos (0D) em que os irmãos estavam segurando a linha da pipa e de onde a pipa se encontra. A distância formada entre os irmãos e entre um dos irmãos e a sombra da pipa são representadas por segmentos de reta (1D), para então se chegar na representação de um triângulo retângulo (2D), do qual será possível aproveitar as propriedades para resolver o problema.

O olhar do inventor é necessário para resolver o problema após esboçar a situação e neste caso também entra em cena a apreensão operatória, no que se refere à modificação mereológica que possibilita a decomposição da figura a ser formada em subfiguras para a resolução do problema.

O Quadro 4 apresenta análise cognitiva da questão 4.

<p>4) Percorre-se o paralelogramo ABCD em sentido anti-horário. A partir de cada vértice atingido ao longo do percurso, prolonga-se o lado recém-percorrido, construindo-se um segmento de mesmo comprimento que esse lado. As extremidades dos prolongamentos são denotadas por A', B', C' e D', de modo que os novos segmentos sejam, então, AA', BB', CC' e DD'. Dado que $AB = 4$ e que a distância de D à reta determinada por A e B é 3, calcule a área do:</p>  <p>a) Paralelogramo ABCD; b) Triângulo $BB'C'$; c) Quadrilátero $A'B'C'D'$;</p> <p>Justifique seus cálculos.</p>	Apreensões	Perceptiva, discursiva e operatória (mereológicas e posicional).
	Olhar	Inventor.
	Desconstrução dimensional	$2D \rightarrow 1D \rightarrow 0D \rightarrow 1D \rightarrow 2D$
	Conteúdos	Área de retângulos, área de triângulo e paralelogramos.
<p>Vestibular da FUVEST de 2013 (2ª fase, dia 3). Disponível em: http://www.fuvest.br/vest2013/provas/fuv2013.2fase.dia3.pdf. Acesso dia: 03 de maio de 2017.</p>		

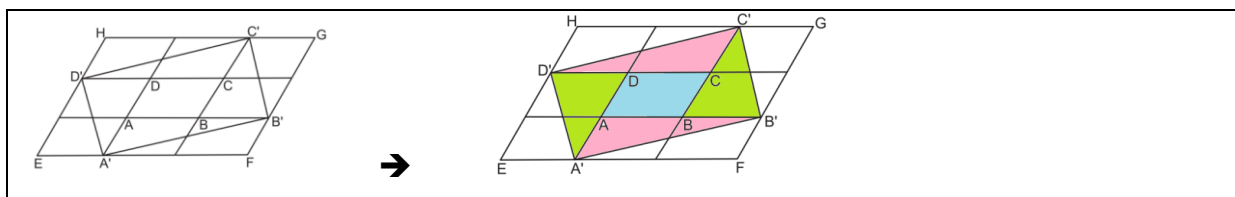
Fonte: os autores.

Três apreensões são exigidas nesta atividade. A primeira é a perceptiva, pois a figura que se apresenta no enunciado guiará a resolução da questão. A segunda é a apreensão discursiva, pois as propriedades da figura são determinadas pelo enunciado, e o aluno precisa identificar na figura determinados termos, tais como: paralelogramo ABCD, vértice, segmento de mesmo comprimento, extremidades dos prolongamentos, área, etc. A apreensão operatória também é requerida, pois para desenvolver a resolução é necessário que a figura seja reconfigurada em subfiguras que permitam realizar o cálculo de área dessas subfiguras, a fim de compor as áreas das subfiguras solicitadas no enunciado da questão.

O primeiro item da questão solicita a área do paralelogramo ABCD. Como foram dadas as dimensões desta figura, acredita-se que o aluno utilize a fórmula da área (base x altura). Nos itens seguintes, aluno precisará acrescentar traços na figura de modo a evidenciar o triângulo e o quadrilátero não explicitado. Além disso, para determinar a área do triângulo $BB'C'$ e do paralelogramo $A'B'C'D'$ o aluno também deverá adicionar traços na figura e operar sobre ela para identificar subfiguras que permitem a realização do cálculo da área. Este processo cognitivo está contemplado em uma apreensão operatória de modificação mereológica, modificando a figura inicial em subfiguras, conforme podemos observar no quadro 05.

Uma das formas de solucionar este problema é dividir a figura da seguinte forma:

Quadro 05: Sugestão de reconfiguração mereológica da figura da questão 4.



Fonte: adaptado de “etapa FUVEST”³.

Além disso, o aluno pode lançar mão de uma apreensão operatória de posição para rotacionar as subfiguras, identificando, com isto, as suas dimensões, mesmo que essa operação seja realizada mentalmente. Estas operações resultam nas seguintes subfiguras: um paralelogramo de base 4 e altura 3. Dois triângulos (verde) de base 4 e altura 6, e dois triângulos (rosa) de base 8 e altura 3. Essas subfiguras permitem o cálculo de área por meio de fórmulas supostamente conhecidas pelos alunos. O olhar contemplado nesta questão é do Inventor, podendo inventar outras formas de subdividir as figuras e encontrar algum caminho para determinar a solução.

A percepção imediata é de um paralelogramo (2D) e dos prolongamentos dos seus lados (1D), obtidos a partir dos vértices (0D). Depois disto o aluno precisa adicionar traços (1D) para determinar as outras áreas que o problema solicita (2D). Neste sentido, a desconstrução dimensional realizada para este tipo de resolução se dá da seguinte forma: 2D → 1D → 0D → 1D → 2D.

Quadro 06: Análise cognitiva da questão 5.

<p>5) As retas t e s são paralelas. A medida do ângulo x, em graus, é: Justifique sua resposta. Justifique seus cálculos.</p> <p>a) 30 b) 40 c) 50 d) 60 e) 70</p>	Apreensões	Perceptiva, discursiva e operatória (ótica).
	Olhares	Construtor
	Desconstrução dimensional	2D → 1D → 0D → 2D
	Conteúdos	Ângulos suplementares, soma dos ângulos internos de um triângulo, retas paralelas cortadas por transversal, ângulos opostos pelo vértice.
<p>REFERENCIA: Vestibular da FUVEST de 1998 (a^a fase, dia 3). Disponível em: http://www.fuvest.br/vest1998/provas/1fase/dia2/mat981f.pdf. Acesso dia: 03 de maio de 2017.</p>		

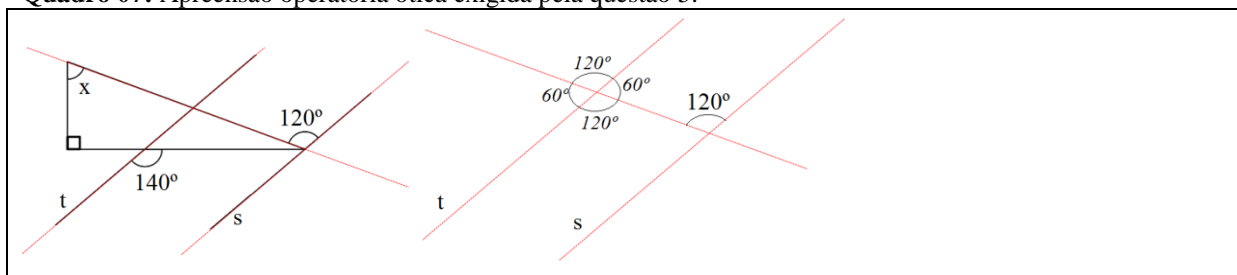
Fonte: os autores.

Neste problema está contemplado o olhar do Construtor, pois permite ao aluno tomar consciência de alguma propriedade geométrica. Prolongando o segmento de reta que contém a hipotenusa do triângulo, teremos a situação das retas paralelas (t e s) cortadas por uma transversal (reta da hipotenusa). Neste problema as apreensões perceptiva e discursiva são necessárias, pois a resolução será guiada pela figura ao mesmo tempo em que traz, tanto no enunciado, como na própria figura, algumas informações sobre as características e propriedades do objeto.

³ https://www.etapa.com.br/etaparesolve/etaparesolve/2013/Fuvest/2Fase_160/resolucao/2fuv13m.pdf

A apreensão operatória também é requerida, pois é necessária uma modificação ótica para visualizar as retas paralelas (t e s) cortadas por uma transversal (reta que contém a hipotenusa do triângulo) e os ângulos opostos pelo vértice. A partir desta configuração guiada pela apreensão operatória ótica, é possível realizar o cálculo da medida dos ângulos, conforme está destacado na figura acima.

Quadro 07: Apreensão operatória ótica exigida pela questão 5.



Fonte: os autores.

O valor de x é determinado por meio de outras operações figurais que permitem visualizar a figura como sendo a justaposição de um triângulo e de um quadrilátero. Deste modo é possível, por meio da soma dos ângulos internos dessas figuras, determinar as medidas dos demais ângulos e conseqüentemente a medida do ângulo solicitado.

A visualização das unidades figurais passa por uma desconstrução dimensional que se inicia com o triângulo (2D) e com as retas paralelas (1D). Depois disto é necessária uma visualização em termos de retas e pontos (1D e 0D) conforme a configuração do quadro 07 acima, e depois retoma a visualização das unidades figurais do triângulo menor e do quadrilátero (2D).

No quadro 8 a seguir, apresenta-se a questão 6, que envolve, em diferentes níveis, três das apreensões consideradas por Duval (2012).

Quadro 08: Análise cognitiva da questão 06

<p>6) Na figura adiante, ABCDE é um pentágono regular. Calcule a medida, em graus, do ângulo α.</p> <p>a) 32° b) 34° c) 36° d) 38° e) 40°</p>		Apreensões	Perceptiva, Discursiva e Operatória (modificação mereológica)
		Olhares	Construtor
		Desconstrução dimensional	$2D \rightarrow 0D \rightarrow 1D \rightarrow 2D$
		Conteúdos	Propriedades do triângulo isósceles em relação aos ângulos e lados. Soma dos ângulos internos do pentágono regular e do triângulo.

Vestibular da FUVEST (2000). Disponível em < <http://colégioexpressao.com.br/ensino-medio/wp-content/uploads/2015/03/Lista-de-Exerc%C3%ADcios-Pol%C3%ADgonos-Geo-Plana.pdf>> Acesso em 15 de Out. de 2016

Fonte: Os autores

Pela apreensão perceptiva, a figura impõe, num primeiro momento, a visualização do pentágono, que possui duas dimensões (2D). Pela apreensão discursiva, ao interpretar o

enunciado da questão, o olhar é direcionado para o vértice (0D) em que se encontra o ângulo α . A apreensão operatória, permite que se verifique as subfiguras existentes (2D) que se tratam de triângulos isósceles. Pelo olhar do construtor, para a resolução do problema, são identificadas as propriedades envolvendo, as medidas dos ângulos internos do polígono regular (pentágono), as propriedades dos triângulos isósceles em relação aos ângulos e lados, bem como a soma dos ângulos internos dos triângulos.

A questão de número 07 é apresentada no quadro 09 a seguir:

Quadro 09: Análise cognitiva da questão 07

<p>7) Na figura a seguir, tem-se que $AD = AE$, $CD = CF$ e $BA = BC$. Se o ângulo $E\hat{D}F$ mede 80°, então o ângulo $A\hat{B}C$ mede:</p> <p>a) 20° b) 30° c) 50° d) 60° e) 90°</p>	Apreensões	Perceptiva, discursiva e operatória (com modificação mereológica)
	Olhares	Construtor
	Desconstrução dimensional	$2D \rightarrow 0D \rightarrow 1D \rightarrow 2D$
	Conteúdos	Propriedades dos triângulos isósceles em relação aos ângulos e lados, soma dos ângulos internos de um triângulo, semelhança de triângulos.

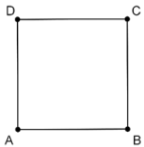
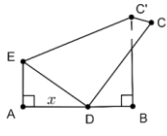
Vestibular da FUVEST (2001). Disponível em < <http://nsaulasparticulares.com.br/wp-content/uploads/2014/07/Geometria-Plana-Revisao-Geral-Fuvest-Unesp-Unicamp.pdf>> Acesso em 16 de Out. de 2016.

Fonte: Os autores

A questão 07 do quadro 09 acima, por meio da apreensão perceptiva, num primeiro momento, se identifica que a questão envolve triângulos, que são figuras de duas dimensões (2D). Em seguida, ao interpretar o enunciado, a apreensão discursiva é contemplada, pois o enunciado determina itens importantes a serem considerados na figura, como por exemplo, a informação de quais segmentos são iguais. O direcionamento do enunciado para os segmentos que formam os triângulos, proporciona a desconstrução dimensional para 0D, pois, é necessário verificar os pontos que designam os segmentos de reta. Posteriormente é feita a identificação dos segmentos das retas que formam os triângulos, que pertencem à dimensão 1 (1D). A retomada da dimensão 2 (2D) é feita ao mencionar o valor em grau do ângulo $E\hat{D}F$ e solicitar o cálculo da medida do ângulo $A\hat{B}C$. Todo este processo exige o olhar do construtor, em que o aluno precisará identificar as propriedades dos triângulos isósceles e a semelhança de triângulos que estão implícitas tanto na figura quanto no enunciado e que serão determinantes para a resolução da questão. A apreensão operatória, com a modificação mereológica se evidencia pela constatação das subfiguras existentes (triângulos e quadrilátero).

Em relação à oitava questão, apresentada no quadro 10 abaixo, por meio da apreensão operatória, a modificação mereológica, se faz necessária para a identificação das subfiguras, na passagem da figura 1 para a figura 2.

Quadro 10: Análise cognitiva da questão 08

<p>8) Tome uma folha de papel em forma de quadrado de igual a 21 cm e nomeie os seus vértices A, B, C, D, conforme a figura 1. A seguir, dobre-a, de maneira que o vértice D fique sobre o “lado” AB (figura 2). Seja D' esta nova posição do vértice D e x a distância de A e D'. A Função que expressa a área do triângulo retângulo AD'E em função de x é:</p> <p>a) $A = (-x^3 + 441x)/42$ b) $A = (x^3 - 441x)/84$ c) $A = (-x^3 + 441x)/84$ d) $A = (441 - x^2)/84$ e) $A = (441 - x^2)/42$</p>  	Apreensões	Perceptiva, discursiva, operatória (modificação mereológica)
	Olhares	Agrimensor e construtor
	Desconstrução Dimensional	2D → 1D → 0D → 1D → 2D
	Conteúdos	Área do triângulo e Teorema de Pitágoras

Vestibular da UEL-PR (2003) Disponível em <
<http://professorwalmartedeu.mat.br/CP2VEST50ProbGeomPlanaAreas.pdf>> Acesso em 16 de Out. de 2017

Fonte: Os autores

Nesse sentido, a resolução da questão necessita que a subfigura formada pela dobradura seja identificada como um triângulo retângulo. É necessário que seja estabelecida uma relação entre a medida do lado do quadrado (21cm) e os lados do triângulo retângulo AD'E. Nesse caso, o olhar do agrimensor se destaca devido a questão envolver essa relação entre medidas tanto de lados quanto da área. O olhar do construtor se manifesta no momento em que se identifica que o triângulo AD'E é retângulo e que o teorema de Pitágoras pode ser utilizado, no momento em que se faz a relação das medidas dos lados do quadrado e do triângulo. Posteriormente, para a resolução, nesse mesmo olhar de construtor, há a aplicação da fórmula da área do triângulo para que se possa cumprir com o que a questão solicita.

Em relação à desconstrução dimensional, que é subsidiada pelas apreensões perceptiva e discursiva, num primeiro momento, o que se impõe é a percepção do quadrado 2D, em seguida, por meio do enunciado, se direciona para a identificação da medida dos lados (1D) do quadrado ABCD. Ao nomear os vértices, passa-se pela dimensão zero (0D). A dobradura também direciona para a determinação do vértice e, conseqüentemente, para a observância do lado AD do triângulo. Sendo assim, há a passagem das dimensões de 0D → 1D. Para o cálculo da área, parte-se das medidas dos segmentos, com dimensão um (1D) para a área do triângulo, cuja dimensão é dois (2D).

A seguir, a questão de número 09, apresentada no quadro 11 abaixo, contempla as apreensões discursiva e sequencial e não possui uma figura que acompanha o enunciado:

Quadro 11: Análise cognitiva da questão 09.

9) A altura de um triângulo retângulo, relativa à hipotenusa, determina sobre estes dois segmentos, um de 18m e outro de 32m. Calcule a medida da altura e as medidas dos catetos.	Apreensões	Discursiva e Sequencial
	Olhares	Botânico e construtor
	Desconstrução dimensional	2D → 0D → 1D
	Conteúdos	Relações métricas nos triângulos retângulos
Questão usado em apostila do site www.nsaulasparticulares.com.br . Disponível em: http://nsaulasparticulares.com.br/wp-content/uploads/2014/10/Geometria-Plana-Relacoes-Metricas-no-Triangulo-Retangulo-e-Teorema-de-Pitagoras-C.pdf . Acesso em: 03 de maio de 2017.		

Fonte: Os autores

A possibilidade da apreensão sequencial se faz presente, pois, pelo enunciado é possível construir a figura da qual se refere para que a solução seja melhor identificada. A apreensão discursiva é necessária para que se compreenda a situação. o olhar do construtor é necessário nesta questão, pois se manifesta para que seja possível identificar as relações métricas do triângulo retângulo, necessárias à resolução do problema.

A desconstrução dimensional da questão 09 segue, primeiramente, a partir do triângulo retângulo de duas dimensões (2D), o ponto em que a altura dividirá a hipotenusa em outros dois segmentos. Este ponto possui a dimensão zero (0D). Em seguida, é necessário que a atenção se volte aos segmentos, estando, portanto, na dimensão um (1D).

A última questão, a de número 10, apresentada no quadro 12 a seguir, mobiliza também as apreensões perceptiva, operatória e discursiva.

Quadro 12: Análise cognitiva da questão 10

10) Na figura abaixo, sabe-se que os ângulos EÂD e DÊA são iguais. A medida do segmento CE é igual a: a) 2,8 b) 2,4 c) 2,0 d) 2,5 e) 2,3	Apreensões	Perceptiva e discursiva
	Olhares	Construtor
	Desconstrução dimensional	2d → 0D → 1D → 2D → 2D
	Conteúdos	Teorema de Pitágoras e semelhança de triângulos.
Vestibular da Escola Superior de Propaganda e Marketing unidade do Rio de Janeiro (2012). Disponível em < http://nsaulasparticulares.com.br/wp-content/uploads/2014/02/Geometria-Plana-Semelhanca-de-Triangulos.pdf > Acesso em 16 de Out. de 2016.		

Fonte: Os autores

Para resolver este problema se faz necessário extrair as informações apresentadas no enunciado e na figura de modo a obter as informações necessárias para a resolução do problema, para fazer essas extrações são necessárias as apreensões perceptiva e discursiva. A questão 10 impõe a apreensão perceptiva de um quadrilátero, em que a primeira visualização da figura se dá de forma ampla (2D), passando à visualização dos pontos (0D) para identificar os segmentos de reta (1D) que compõem a figura, permitindo relacionar uma medida e um lado e a visualização dos ângulos (2D) formados pelos segmentos, por meio da apreensão discursiva que traz à luz a identificação destes ângulos.

É necessário ainda identificar quais os lados que formam os ângulos congruentes, e que se tratam de ângulos do triângulo isósceles. Por meio da manifestação do olhar do construtor, são identificadas tanto a propriedade que envolve o triângulo isósceles em relação aos lados e ângulos, quanto à identificação de dois triângulos retângulos, sendo que para o triângulo retângulo CAB o cálculo da hipotenusa é possível pelo Teorema de Pitágoras. Em seguida, com o mesmo olhar construtor identifica-se a semelhança envolvendo os triângulos CAB e CDE, o que permite a obtenção da resolução da questão.

Considerações finais

Por meio das diferentes apreensões e olhares, uma figura geométrica possui potencialidades heurísticas, que estimulam o desenvolvimento do raciocínio. Nas questões analisadas são exigidas articulações entre diferentes apreensões. Segundo Moretti (2013) pode existir até uma quádrupla apreensão na resolução de problemas de geometria, o que torna o problema mais complexo, mesmo que pareçam simples. A análise cognitiva das questões apresentada neste texto evidencia que a resolução destas questões exige dos alunos formas de raciocínio bastante complexas do ponto de vista cognitivo. A necessidade de diferentes apreensões figurais, de diferentes olhares e das possibilidades de desconstruções dimensionais, se faz presente em todas as atividades analisadas, embora envolvam conteúdos diversos. Isto significa que os aspectos cognitivos para o trabalho com a geometria precisam ser levados em consideração em todos os momentos de ensino, com quaisquer conteúdos que estejam sendo abordados.

O trabalho com a geometria sob esses diferentes aspectos cognitivos permitem a análise das questões propostas, indicando diferentes aspectos possivelmente requeridos nas resoluções. Mas além das análises dos enunciados das questões, é possível também fazer uma análise da produção dos alunos em relação às diferentes formas de interpretar uma questão. Permite verificar se itens como a identificação perceptiva dos elementos que se destacam em uma figura, ou ainda permite verificar se as diferentes resoluções dos alunos confirmam as hipóteses dos olhares requeridos nos enunciados, permite também verificar a habilidade do aluno em relação a desconstrução dimensional requerida em todas as atividades geométricas, ou ainda a habilidade de modificação da figura para a resolução da atividade proposta.

Neste sentido, a realização das análises dos enunciados das questões pode ser considerada bastante relevante e isto apoia-se nas considerações de Duval (2011, p. 20) que

defende que a consciência desses gestos intelectuais deveria ser um dos objetivos prioritários no ensino. O autor afirma ainda que é necessário que o aluno tenha o controle dos gestos intelectuais específicos da atividade, e isto não depende da aquisição dos conceitos matemáticos, mas sim de uma tomada de consciência desses gestos pelos alunos, que acaba sendo a condição necessária para a aquisição de conceitos.

Referências

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Trad. Mércles T. Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**. Florianópolis, v. 7, n. 1, p.118-138, 2012.

MORETTI, M. T. (2013) Semiosfera do olhar: um espaço possível para a aprendizagem da geometria. **Acta Scientiæ**. v. 15, n. 2, p. 289-303, 2013, Canoas.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e análise do funcionamento cognitivo do pensamento em matemática. *In*: _____. **Ver e ensinar a matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas. Organização: Tânia M.M. Campos. Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011. p. 68-97.

_____. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Tradução: Mércles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática – Revemat**: Florianópolis v. 7, n. 1, p. 118-138, jul. 2012a. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n1p118>>. Acesso em: 20 Mar. de 2017.

_____. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução: Mércles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática – Revemat**: Florianópolis, v.07, n.2, p. 266-297, 2012b. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266/23465>>. Acesso em: 20 Mar. de 2017.