

## O USO DO TEODOLITO EM UMA ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA ENVOLVENDO TRIGONOMETRIA

Rafael Machado da Silva  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Londrina  
rm.raffael@hotmail.com

Karina Alessandra Pessoa da Silva  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Londrina  
karinasilva@utfpr.edu.br

### **Resumo:**

Neste trabalho relatamos uma primeira experiência de um dos autores com o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática em sala de aula com alunos de um do 9º ano do ensino fundamental de uma escola pública do norte do Paraná. Considerando a Modelagem Matemática enquanto uma alternativa pedagógica para ensinar matemática e que atividades desta natureza podem ser orientadas por etapas que constituem um ciclo, caracterizamos a atividade desenvolvida. No desenvolvimento da atividade proposta, os alunos utilizaram um Teodolito por eles construído para coletar informações, que foram tratadas matematicamente por meio de relações trigonométricas no triângulo retângulo. Na atividade os alunos encontraram a altura de alguns objetos inacessíveis. Com base no registro das atividades inferimos que a atividade atende às etapas que devem ser percorridas no ciclo de uma atividade de modelagem matemática.

**Palavras-chave:** Educação Matemática, Modelagem Matemática, Relações Trigonométricas, Teodolito.

### **Introdução**

Utilizar Modelagem Matemática na sala de aula pode abrir caminhos para uma nova maneira de ensinar. Neste trabalho relatamos a primeira experiência de um dos autores com uma atividade de modelagem matemática desenvolvida em sala de aula. A iniciativa partiu de uma proposta de atividade da disciplina Modelagem Matemática na Perspectiva do Ensino de um Mestrado Profissional em Ensino de Matemática de uma universidade pública do Paraná.

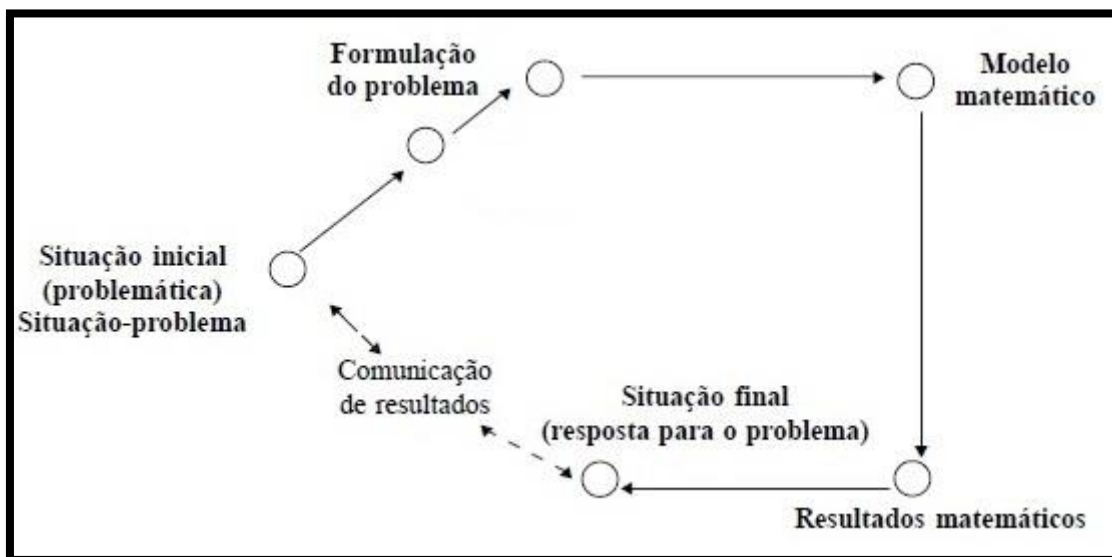
As aulas de matemática nos anos finais do ensino fundamental, trazem conceitos que serão expandidos no ensino médio. Com isso, nos propusemos a desenvolver uma atividade que consideramos diferenciada para o ensino de trigonometria no triângulo retângulo. De acordo com as pesquisas que realizamos, o conteúdo abordado parece pouco explorado nos trabalhos em Educação Matemática, pois grande parte dos artigos que envolvem trigonometria remetem ao ensino de funções trigonométricas e/ao círculo trigonométrico, ambos conteúdos do ensino médio.

Assim, desenvolvemos uma atividade de modelagem na qual abordamos trigonometria no triângulo retângulo em uma turma de 9º ano do ensino fundamental. No desenvolvimento da atividade os alunos argumentaram, problematizaram e investigaram diferentes situações as quais se depararam, bem como utilizaram o Teodolito, por eles construído para auxílio na produção de dados sobre o problema a ser respondido.

Neste relato, além desta introdução apresentamos considerações a respeito do nosso entendimento sobre Modelagem Matemática e sobre ensino de trigonometria para, em seguida, apresentarmos o contexto em que a atividade foi desenvolvida e como ocorreu em sala de aula. Finalizamos com algumas considerações finais sobre a experiência vivenciada.

### Modelagem Matemática

A Modelagem Matemática é uma alternativa pedagógica para o ensino de matemática na sala de aula. Assim uma atividade de modelagem matemática se configura como um conjunto de etapas: situação inicial, formulação do problema, modelo matemático, resultados matemáticos, situação final e comunicação de resultados. Esse conjunto de etapas pode ser esquematizado em um ciclo como o indicado por Almeida e Silva (2012) e apresentado na Figura 1.

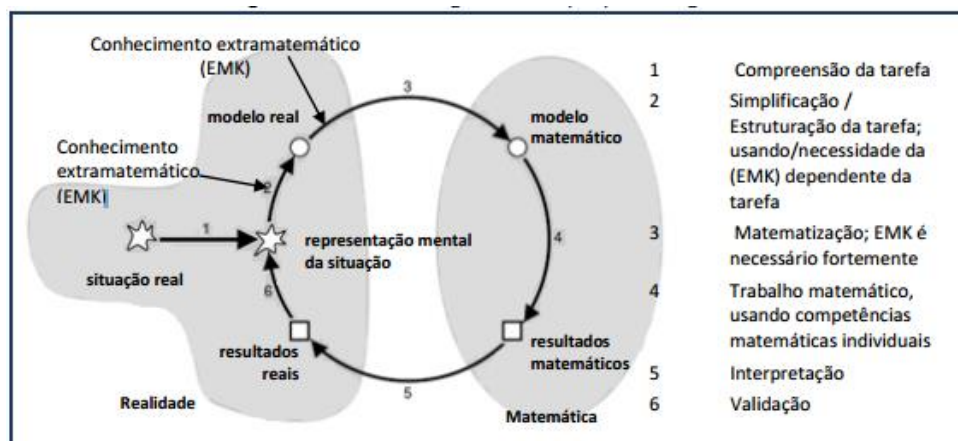


**Figura 1.** Ciclo de Modelagem  
**Fonte:** Almeida e Silva (2012) adaptado

A situação inicial parte da interação com uma situação real que pode ser no âmbito da matemática ou não. Por tratar de situações que partem da realidade a modelagem matemática, aproxima os conteúdos matemáticos visto na escola com o cotidiano dos alunos.

Após essa interação, se formulam hipóteses, definem-se variáveis sobre um problema a ser investigado, por meio de conceitos matemáticos e posteriormente se chega a um modelo matemático, o qual, a partir de seus resultados responde o problema inicial para posterior comunicação e validação dos resultados.

Outra caracterização de uma atividade de modelagem matemática é feita por Ferri (2006), que também caracteriza a atividade de modelagem matemática através de um ciclo (Figura 2), o ciclo representa dois mundo que interagem entre si, o mundo real e mundo da matemática, e é na interação entre os dois que a modelagem matemática atua, os problemas estão no mundo real e da observação deles e a partir de um tratamento no mundo matemático é possível estabelecer um modelo que ajude a interpretar e responder esse problema.



**Figura 2.** Ciclo de modelagem  
**Fonte:** Ferri (2006) p. 92.

O ciclo não é algo linear, ou que obedece essa sequência a risca, onde para que se possa avançar para um próximo estágio é preciso ter superado o anterior. Em algumas atividades certas etapas podem se apresentar antes, e se voltar a uma etapa anterior para uma melhor análise ou até mesmo uma nova leitura do problema inicial, pode acontecer sem acarretar problemas para o desenvolvimento da atividade.

O desenvolvimento de atividades de modelagem matemática em sala de aula satisfazem prerrogativas para o ensino da matemática descrito nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):

Identificar o problema; procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema, formular hipóteses e prever resultados; selecionar estratégias de resolução de problemas; fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades (BRASIL, 1999, p.259).

Também contempla aspectos descritos nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio, pois oportuniza ao aluno:

Selecionar variáveis que serão relevantes para o modelo a construir; problematizar, ou seja, formular o problema teórico na linguagem do campo matemático envolvido; formular hipóteses explicativas do fenômeno em causa; recorrer ao conhecimento matemático acumulado para a resolução do problema formulado, validar, isto é, confrontar as conclusões teóricas com os dados empíricos existentes e eventualmente ainda, quando surge a necessidade modificar o modelo para que esse melhor responda a situação real (BRASIL, 2006, p.85).

O modelo matemático é uma representação matemática da situação e responde de certa forma o problema investigado e pode se apresentar de várias maneiras, como tabelas gráficos, expressões algébricas, entre outros. Conforme salientam Almeida, Silva e Vertuan (2012):

Um modelo é um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática e que tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema, podendo mesmo permitir a realização de previsões sobre este outro sistema (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 13).

O desenvolvimento de atividades em sala de aula nas prerrogativas da Modelagem Matemática, muitas vezes não se encontra disseminado na prática diária da sala de aula, e os alunos não estão acostumados a estudarem matemática dessa maneira. Na implementação de atividades de modelagem em sala de aula, compactuamos com a proposta de Almeida e Dias (2004), para que o contato do aluno ocorra de forma gradativa. Esse procedimento é caracterizado pelas autoras como familiarização dos alunos e é configurado em três momentos.

O primeiro momento se caracteriza por desenvolver atividades em que a situação-problema e os dados necessários para responder o problema são apresentados pelo professor; no segundo momento o professor propõe o problema e os alunos coletam informações e respondem o problema; por fim no terceiro momento os alunos em concordância com o professor escolhem uma situação-problema a ser estudada, buscam informações e estabelecem o problema a ser resolvido, bem como as outras etapas até culminar na comunicação dos resultados.

Como muitas vezes os alunos não estão acostumados a trabalhar com atividades que demandem mais autonomia por parte deles, os momentos de familiarização auxiliam nesse processo de descentralização do desenvolvimento das atividades. Isso possibilita aos alunos independência frente à situação-problema que pode ser investigada por meio da Matemática e o professor possa se tornar um mediador e orientador durante a condução da atividade.

As atividades de modelagem matemática tem por característica o foco no trabalho em equipe, como pontuam Almeida e Dias (2004). Segundo as autoras, a modelagem matemática em sala de aula pode ser vista como uma atividade essencialmente cooperativa, onde a cooperação e a interação entre os alunos e entre professor e aluno tem papel importante na construção do conhecimento.

É na interação que os alunos podem discutir diferentes visões de uma mesma situação. Uma atividade de modelagem matemática permite que os alunos possam defender seus pontos de vista, colaborando em uma formação mais independente na qual se coloquem a frente na busca por respostas ao problema proposto. No presente relato, o problema proposto está em consonância com abordagens da trigonometria.

### **Ensino de Trigonometria nos documentos oficiais**

Desde os primórdios o céu despertou o fascínio e a curiosidade do ser humano, o que contribuiu para que se compreendessem fenômenos que demandaram grande investigação e conseqüentemente o desenvolvimento de conhecimento matemático, dentre eles a trigonometria. Boyer (1974) descreve que os gregos antigos fizeram um estudo sistemático sobre ângulos no círculo. Trabalhos como os de Eudoxo e Plutarco objetivaram medir a distância entre a Terra e a Lua, e a Terra e o Sol, pautando-se em aplicações que hoje tratamos como razões trigonométricas. Posteriormente já na Idade Média Werner sistematizou regras para simplificar cálculos astronômicos.

A busca por precisar medidas de difícil acesso está intimamente ligada à trigonometria, como descreve as Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Paraná (2006, p.54), “com a trigonometria pretende-se contemplar as relações entre as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo, relações essas desenvolvidas a partir da necessidade do homem de determinar, por exemplo, distâncias inacessíveis”.

O ensino de trigonometria no triângulo retângulo no 9º ano também prepara o estudante para, no ensino médio, compreender esse conceito na circunferência estendendo para as funções trigonométricas. Isso é evidenciado nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006, p.74) “as funções trigonométricas devem ser entendidas como extensões das razões trigonométricas então definidas para ângulos com medida entre  $0^\circ$  e  $180^\circ$ ”. Além disso, estudo dos números complexos e aplicações nas áreas da física como por exemplo, o estudo das ondas e mecânica vetorial, entre outros. Assim compreender o que é, e como podem ser utilizadas as razões trigonométricas, seno, cosseno e tangente nessa etapa de ensino pode contribuir para aprendizagem desses conteúdos no ensino médio.

Na sequência relatamos como foi o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática abordando a trigonometria.

### **Relato do contexto e desenvolvimento da atividade de modelagem matemática**

Com o intuito de desenvolver uma atividade de modelagem matemática com os conceitos de trigonometria no triângulo retângulo, o primeiro autor do relato, que era professor de uma escola pública da região norte do Paraná, de uma turma regular de 9º ano com 37 alunos, propôs a seus alunos o seguinte problema: Como medir a altura de um objeto inacessível utilizando o teodolito? Como o problema foi definido pelo professor, mas os alunos coletariam as informações necessárias para apresentar uma solução para o mesmo, essa atividade se enquadra como de segundo momento de acordo com Almeida e Dias (2004).

Em aulas anteriores os alunos construíram um objeto que mede ângulos, o Teodolito, como mostra a Figura 3. Posteriormente à construção, foi explicado como utilizar o Teodolito, e que seria necessário escolher um ponto de observação e olhar o ponto utilizando o canudo, quando se faz isso o pêndulo se desloca pelo transferidor ao qual está acoplado e tem-se o ângulo de observação.



**Figura 3.** Construção do Teodolito

**Fonte:** Arquivo dos autores

Como exemplo o professor perguntou como seria possível medir uma árvore na Amazônia, obtendo respostas como, subindo na árvore com uma fita, de helicóptero e pela sombra. Foi questionado como seria possível realizar esse procedimento sem sair do chão, sem subir na árvore e usando o teodolito. Quais informações o Teodolito podia coletar? Os alunos responderam o ângulo e a distância entre a pessoa e a árvore. Com essa resposta, o professor perguntou como medir essa distância e um aluno prontamente respondeu com uma trena, aluno este que tinha uma trena como chaveiro da bolsa.

Com a intenção de desenvolver uma atividade levando em consideração os encaminhamentos propostos na modelagem matemática, o professor orientou os alunos a formarem duplas e caminhar até o pátio, local que de acordo com o ciclo de modelagem é onde está a situação problema. Cada dupla deveria escolher algo para observar e determinar a altura, anotando os dados da observação, ou seja, ângulo de inclinação através do Teodolito e a distância entre eles e o que estavam observando. Antes de realizarem a coleta de dados, o professor demonstrou com a ajuda de um aluno, como fazer uso do teodolito, conforme mostra a Figura 4.

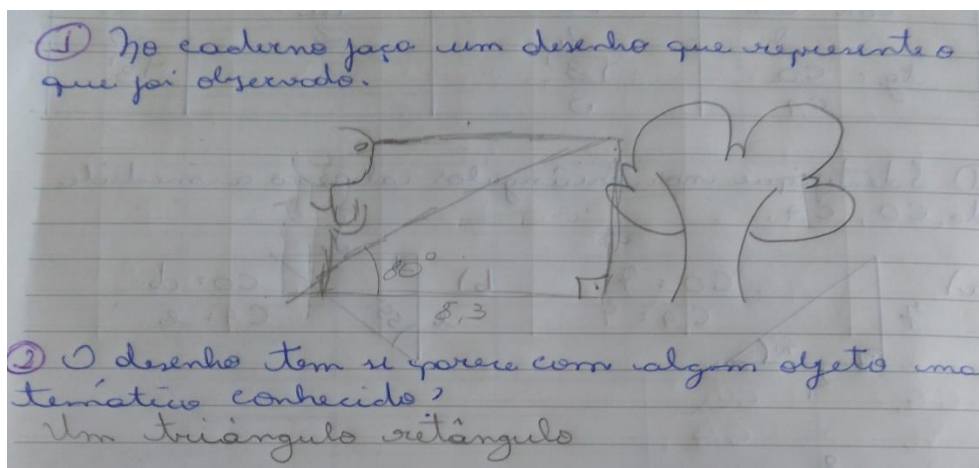


**Figura 4.** Utilizando o Teodolito

**Fonte:** Arquivo dos autores

No pátio da escola, iniciou-se a coleta de dados, algumas duplas escolheram medir o muro, outras a altura da sala de jogos, as árvores, entre outros. Com três trenas, a maioria optou por esperar sua vez para medir a distância de onde observavam até onde estava o objeto observado, porém, um aluno não quis esperar para usar a trena e utilizou passos como unidade de medida da distância. Consideramos esse procedimento uma excelente oportunidade de discutir padrão de unidades de medida.

Após todas as duplas anotarem seus dados, já na sala, o professor solicitou que os alunos representassem por meio de um desenho a situação que escolheram para a coleta de dados, fazendo associação com algum objeto matemático, caracterizando a construção do modelo (Figura 5).

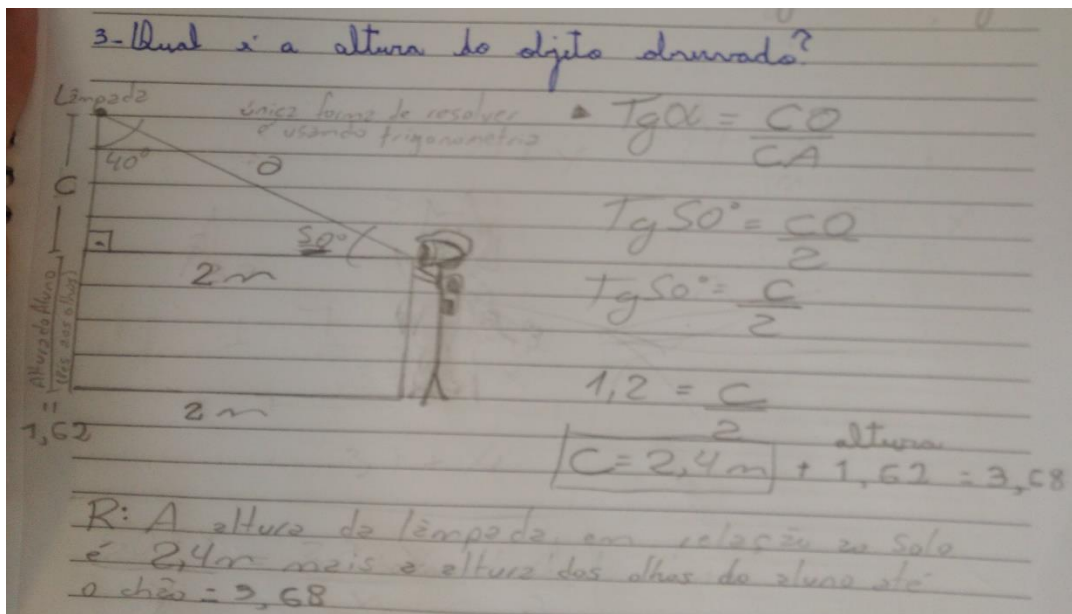


**Figura 5.** Representação da situação, altura da árvore.

**Fonte:** Relatório dos alunos

Com os dados em mãos e a representação realizada, o professor solicitou às duplas que respondessem o problema proposto, ou seja, qual a altura do objeto inacessível por eles observado, a Figura 6 mostra a solução de uma dupla que optou por estudar a altura que se encontrava a lâmpada da luminária do pátio.





**Figura 6.** Resposta do Problema

**Fonte:** Relatório dos alunos

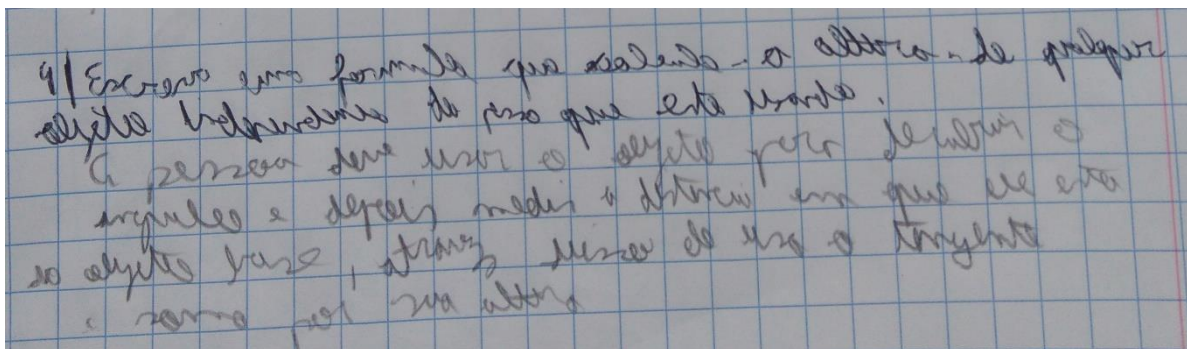
Como haviam várias soluções diferentes, alguns alunos foram convidados a socializá-las na lousa, inclusive o aluno cujas medições haviam sido feitas usando passos (Figura 7). Com a resolução do aluno que usou os passos, a sala toda foi incitada a imaginar como seria se cada um usasse a medida que quisesse, a resposta foi praticamente unânime, “seria uma bagunça”. A partir disso, foi feita uma breve explanação sobre o sistema internacional de medidas. Com o auxílio de uma régua, foi medido o pé do aluno que tinha usado os passos e o professor transformou a altura do objeto em metros.



**Figura 7.** Socialização das Resoluções

**Fonte:** Arquivo dos autores

Para finalizar o desenvolvimento da atividade foi questionado se existia alguma representação que descrevesse qualquer situação com as características estudadas. A maioria dos alunos teve dificuldade, mas um aluno com escreveu uma maneira de representar qualquer situação (Figura 8). Para socializar a representação, o aluno também escreveu na lousa a generalização que ele fez em linguagem natural.

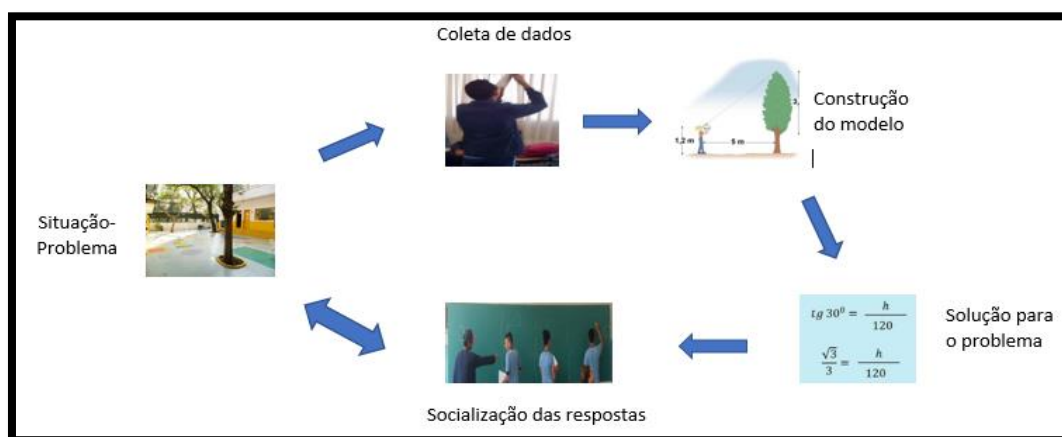


**Figura 8.** Generalização anotada no caderno por um aluno  
**Fonte:** Relatório dos alunos

### Considerações finais

O desenvolvimento dessa atividade proporcionou um avanço na prática do primeiro autor no desempenho de suas atividades como professor, além do fato da atividade ser a primeira experiência no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, também se agrega valor à busca de formação continuada, haja visto que, o desencadeamento da atividade partiu de uma proposta da disciplina de modelagem no curso de mestrado.

No desenvolvimento da atividade em sala de aula foi possível observar que, o ciclo de Modelagem Matemática proposto por Almeida e Silva (2012), foi percorrido. Para tanto, o problema faz parte de um ambiente que é familiar aos estudantes que o tempo todo se deparam com objetos que não têm ideia da altura nem como medi-los. Isso encaminha para uma coleta de dados em que os alunos fizeram uso de um instrumento que haviam construído em sala de aula – o teodolito. Com os dados em mãos, foi necessária a construção de um modelo matemático que possibilitasse a obtenção de uma solução para o problema. Na atividade relatada, a dedução do modelo matemático foi subsidiada pela associação que os alunos fizeram da situação observada com o triângulo retângulo e o uso da razão trigonométrica para encontrar a altura do que haviam observado. É importante ressaltar que os alunos já haviam trabalhado com razões trigonométricas, porém de maneira não contextualizada. Para completar o encaminhamento da atividade como proposta no ciclo de modelagem, os alunos compartilharam seus resultados com o restante dos colegas em sala de aula. Os encaminhamentos realizados nesta atividade podem ser representados no ciclo conforme mostra a Figura 9.



**Figura 9.** Ciclo da atividade proposta.

**Fonte:** Os autores

A atividade contribuiu para colocar os alunos como foco do processo de aprendizagem, os ajudou no exercício de responsabilidade, pois eram responsáveis por produzirem os dados que responderiam o problema proposto, e também explorar espaços que vão além da sala de aula, no caso o pátio da escola.

Como professor, foi possível compreender melhor como se estabelecem as diferentes etapas do ciclo de modelagem, bem como uma atividade de modelagem matemática pode abrir caminhos para se discutir situações inusitadas, como a altura medida através dos passos, o que torna a atividade mais dinâmica e desafiadora, permitindo que professor e alunos sintam-se fazendo matemática e não apenas repetindo procedimentos em exercícios prontos. Além disso, essa experiência proporcionou, de certa forma, o desenvolvimento de mais confiança para o desenvolvimento de outras atividades de Modelagem em outras aulas. Há de se destacar que o convite feito na disciplina de mestrado foi aceito, possibilitando o encorajamento para um aventurar pela vivência enquanto professor no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

## Referências

ALMEIDA, L. M. W. de; DIAS, Michele Regiane. **Um estudo sobre o uso da modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem.** In: BOLEMA, Rio Claro – SP, 2004.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. **Semiótica e as ações cognitivas dos alunos em atividades de Modelagem Matemática: um olhar sobre os modos de inferência.** Ciência & Educação, v. 18, n. 3, p. 623-642, 2012.



ALMEIDA, Lurdes Werle, SILVA, Karina Pessôa da, VERTUAN, Rodolfo Eduardo. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto 2012.

BRASIL. **Orientação Curriculares para o Ensino Médio**. Disponível em <[http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book\\_volume\\_02\\_internet.pdf](http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf)> Acesso em: 26 março.2017.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio – Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias**. Brasília, 1999.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**: tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgar Blücher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

FERRI, R. B. **Theoretical and empirical differentiations of phases in the modeling process**. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, v. 38, n. 2, p 86- 95, 2006.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares para Educação Básica**. Curitiba: SEED, 2008.