

UTILIZAÇÃO DO *SOFTWARE* WINPLOT COMO RECURSO METODOLÓGICO NO ENSINO DE PARABOLÓIDES ELÍPTICOS E SUAS CURVAS DE NÍVEL

Daiane Cristina Zanatta
Universidade Estadual do Centro-Oeste
daiaczanatta@gmail.com

Resumo:

Trata-se de uma pesquisa que buscou analisar as potencialidades do *software* Winplot no ensino e aprendizagem das funções reais de várias variáveis com foco em funções cuja representação gráfica é um parabolóide elíptico. Foram aplicadas atividades em uma turma do quarto ano de um curso de licenciatura em matemática. A abordagem de tais funções foi através de uma sequência de atividades utilizando o *software* Winplot e outras mídias, como o lápis e o papel. Nas atividades os alunos puderam explorar as diferentes representações de uma mesma função: algébrica, gráfica e numérica, bem como, interligar estas representações e construir gráficos. O Winplot é um *software* gráfico gratuito, de fácil manuseio e que pode ser utilizado do ensino fundamental a universidade. Entre suas possibilidades, no estudo das funções reais de várias variáveis, o Winplot permite construir gráficos de funções e suas respectivas curvas de nível, bem como, girar os gráficos e sólidos construídos e construir o gráfico de várias funções na mesma tela. A pesquisa evidenciou que a visualização é uma das principais potencialidades do *software* Winplot, favorecendo a representação gráfica da função. Além disso, a utilização do *software* possibilitou interligar os diferentes tipos de representações de uma mesma função.

Palavras-chave: Cálculo de Várias Variáveis, *Software* Winplot, Tecnologias Digitais.

Introdução

O ensino e a aprendizagem do cálculo de várias variáveis apresentam dificuldades para muitos professores e estudantes. Entre as dificuldades detectadas, muitas estão relacionadas à falta de habilidades e conhecimentos prévios específicos da Educação Básica. Estas dificuldades também são citadas por Nasser (2007). De acordo com Oliveira (2008, p. 22), “outras dificuldades se referem aos conceitos relativos ao cálculo de uma variável e às características do pensamento matemático avançado”. Porém, muitas delas são específicas do Cálculo de várias variáveis.

Devido ao fato do cálculo diferencial e integral ser um dos responsáveis pelo insucesso dos estudantes e por sua condição privilegiada na formação do pensamento avançado em Matemática, o ensino de cálculo diferencial e integral tem sido o foco de parte

significativa das pesquisas no âmbito da Educação Matemática no Brasil e no exterior (IGLIORI, 2009).

Uma das tendências apontadas para o ensino de cálculo é o uso de tecnologias digitais. As tecnologias digitais e outras mídias, como o lápis e o papel, podem auxiliar o ensino da matemática, criando ambientes de aprendizagem que permitem aos estudantes, explorar conceitos matemáticos acerca de funções reais de várias variáveis.

A possibilidade de exploração das representações algébrica, numérica e gráfica de uma mesma função, que as tecnologias da informática oferecem, a coordenação dessas diferentes representações e a compreensão das relações que as vinculam possibilitam, aos alunos, conectar conhecimentos que, de outra forma, permaneceriam separados, entretanto, se conectados, geram compreensões mais amplas e completas de conceitos matemáticos (ALLEVATO, 2010).

Para criar ambientes de aprendizagem foram planejadas e desenvolvidas atividades utilizando o *software* Winplot, que é um *software* gráfico livre, apropriado desde o ensino fundamental até o ensino de nível superior. O Winplot possibilitou a construção e a visualização de gráficos de funções reais de duas variáveis e de suas respectivas curvas de nível.

Com o uso do *software* Winplot foi possível, também, explorar simultaneamente as representações algébrica, numérica e gráfica de uma mesma função, propiciando a produção de conhecimentos mais abrangentes a respeito do tema.

O objetivo desta pesquisa foi analisar as potencialidades do *software* Winplot no ensino e aprendizagem de parabolóides elípticos e suas curvas de nível.

Materiais e Métodos

O presente estudo trata-se de uma pesquisa qualitativa, de caráter exploratório, desenvolvida com acadêmicos do quarto ano de um curso de licenciatura em matemática de uma Universidade Estadual do Paraná. Foi aplicada uma proposta de trabalho diferenciada, baseada no uso do *software* Winplot na abordagem das funções reais de duas variáveis cuja representação gráfica é um parabolóide elíptico.

As atividades foram realizadas no primeiro semestre de 2016, durante as aulas da disciplina de cálculo diferencial e integral III, no laboratório de informática da universidade. Havia máquinas para todos os alunos.

Participaram desses encontros onze alunos da disciplina de Cálculo III e foram utilizadas dez horas/aulas. As aulas foram organizadas de modo que, primeiramente, foi abordado, em sala de aula, o conteúdo sobre funções reais de várias variáveis e suas respectivas curvas de nível. Na sequência, foi feita uma explanação, no laboratório de informática, sobre o *software* Winplot, com a apresentação de suas ferramentas e possibilidades de uso. Posteriormente, foram desenvolvidas as atividades baseadas nos estudos de Mota (2010), que apresenta um estudo de parabolóides utilizando-se o *software* Winplot.

Os alunos foram orientados a registrar as respostas das questões, nas folhas de atividades, de maneira detalhada para posterior análise da pesquisadora.

A realização das atividades foi acompanhada pela professora pesquisadora, que fez a coleta dos dados por meio dos registros escritos e de suas impressões sobre a atitude dos alunos, seus comentários e questionamentos, bem como, das situações que ocorreram durante os encontros.

No final de cada encontro, foi solicitada a devolução das folhas de atividades para posterior análise.

O Winplot

O *software* Winplot é um programa de domínio público que pode ser obtido através do endereço <http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html>. Sua versão original foi desenvolvida por *Richard Parris*, da *Philips Exeter Academy*. Este *software* foi traduzido para o português em 2001, pelo Professor Adelmo Ribeiro de Jesus.

É um programa utilizado para a construção de gráficos em duas e três dimensões. Dispõem de muitos recursos que o torna um programa atraente e apropriado desde o nível fundamental até o nível superior de ensino, uma vez que é possível explorar funções reais de uma e duas variáveis, equações diferenciais entre outros conteúdos matemáticos.

Resultados e discussões

Após a explanação da teoria em sala de aula, os alunos foram levados ao laboratório de informática. A primeira atividade realizada no laboratório de informática teve como

objetivo apresentar o *software* Winplot. Nesta atividade foram expostos alguns dos principais recursos do *software* e os alunos tiveram contato com comandos fundamentais para o estudo das funções reais de duas variáveis e suas respectivas curvas de nível.

A segunda atividade teve como objetivos explorar gráficos, sólidos e curvas de nível de funções reais de duas variáveis, utilizando a mídia lápis e papel e as possibilidades de manipulação e visualização oferecidas pelo *software* Winplot.

Na primeira parte desta atividade foi solicitado aos alunos que construíssem o gráfico, utilizando lápis e papel, da função assim definida: $z=f(x,y)=x^2+2y^2$, com o auxílio das curvas de nível. Em seguida, foi solicitado que construíssem o gráfico das funções assim definidas: $z=f(x,y)=x^2+2y^2$ e $z=4$, usando o mesmo sistema de coordenadas.

Conforme foi solicitado, os alunos fizeram, primeiramente, a construção das curvas de nível. Da análise dos retornos foi verificado que todos fizeram o esboço das curvas de nível corretamente. Com relação à construção do gráfico da função e do sólido, os alunos apresentaram dificuldades em encontrar e fazer o esboço das seções transversais, $z=x^2$ e $z=2y^2$. Além disso, eles não conseguiram relacionar as curvas de nível da função com as seções transversais. Desse modo, foi necessário construir, juntamente com os alunos, o gráfico da função e do sólido na lousa. Assim, os alunos afirmaram que haviam entendido as construções, mas afirmaram que estavam com dificuldades para compreender detalhes do gráfico da função e do sólido construído.

Na segunda parte desta atividade foi solicitado aos alunos que construíssem o gráfico da função proposta, $z=f(x,y)=x^2+2y^2$, usando o Winplot. Foram propostas, também, as seguintes questões:

- 1) Use a opção: Um \rightarrow Fatiador. Altere o valor usual de x e o valor usual de y alterando a posição dos botões das barras de rolagem dessa janela. Registre suas conclusões;
- 2) Observando o gráfico construído e levando em consideração sua lei de definição, responda: O que a variável z representa na superfície? Para obter seções transversais em forma de parábolas qual variável deve assumir valores constantes?

Nesta parte da atividade todos conseguiram construir o gráfico e fizeram comparações entre a construção feita usando lápis e papel e o gráfico construído no Winplot. Com o uso do *software*, os alunos puderam, por exemplo, girar, ampliar e reduzir o gráfico. Para os alunos a possibilidade de girar, ampliar e reduzir o gráfico facilita a visualização geométrica e melhora a compreensão da superfície. De acordo com Machado (2008),

A visualização matemática, através da tela do computador, dá possibilidade de se elaborar um conjunto de argumentos (conjecturas) e ainda utilizá-los para resolver problemas, permitindo aos estudantes construir e relacionar as várias representações da informação e construir os conceitos matemáticos. (MACHADO, 2008, p. 107)

Em relação à questão 1) todos responderam que alterando os valores de x e y apareciam parábolas na superfície, que são as seções transversais da superfície desenhadas na primeira parte desta atividade. Em relação à questão 2), foi necessário o auxílio da pesquisadora para que todos concluíssem que a variável z correspondente ao eixo de simetria desta superfície. Todos os alunos responderam que fazendo x ou y constante obtêm-se seções transversais em forma de parábolas.

A terceira parte desta atividade teve como objetivo explorar as curvas de nível da função. Para tanto, foi solicitado que fosse construído, usando o Winplot, o gráfico das funções assim definidas: $z = f(x,y) = x^2+2y^2$, $z = 4$ e $z = a$, sendo a um número real, no mesmo sistema de coordenadas. Foram propostas, também, as seguintes questões:

1) A intersecção do plano $z = 4$ com a superfície resulta em que tipo de figura? O que pode ser observado alterando o valor de a , sendo a um número real? Para finalizar esta atividade, os alunos encontraram as curvas de nível da função proposta, usando o *software*.

Todos os alunos responderam que as interseções resultavam em elipses. Um aluno afirmou que é necessário $a \geq 0$ para que a interseção dos planos com a superfície não seja vazia. Todos conseguiram construir as curvas de nível, usando o *software* e, no final desta atividade, um aluno afirmou que a projeção das curvas obtidas da interseção dos planos com a superfície, sobre o plano $z=0$, resultava nas curvas de nível da superfície. De acordo com Allevato (2010, p. 112),

Nesses ambientes, verifica-se com frequência uma forma de aprendizagem na qual o aluno constrói conhecimento a partir da própria experiência. Dependendo do tipo e do modo como são realizadas as atividades, os estudantes vivenciam experiências de aprendizagem bastante significativas e intensas e, certamente, diferentes das que são possíveis apenas com lápis e papel.

As atividades três e quatro tinham os mesmos objetivos da atividade dois, porém, na atividade três foram exploradas as funções reais assim definidas: $z = f(x,y) = -x^2-2y^2$, $z = -4$ e $z = a$, sendo a um número real. Já na atividade quatro, foram exploradas as funções reais assim definidas: $z = f(x,y) = x^2+2y^2-9$ e $z = f(x,y) = -x^2-2y^2$.

Nas atividades três e quatro, os alunos também encontraram dificuldades na construção dos gráficos das funções e sólidos usando a mídia lápis e papel, mas com o

auxílio da pesquisadora conseguiram construir os gráficos e os sólidos. Com relação à construção dos gráficos usando o Winplot, todos conseguiram construir com sucesso.

Após construírem os gráficos das funções reais assim definidas: $z_1 = f_1(x,y) = -x^2 - 2y^2$ e $z_2 = f_2(x,y) = x^2 + 2y^2 - 9$, os alunos afirmaram que z_1 tem concavidade voltada para baixo, pois os coeficientes de x^2 e y^2 são negativos e o vértice desse parabolóide elíptico coincide com a origem do sistema coordenado, como no caso da segunda atividade. Já o gráfico de z_2 tem concavidade voltada para cima, pois os coeficientes de x^2 e y^2 são positivos e o vértice dessa superfície não coincide com a origem do sistema, pois $z_2 = f_2(0,0) = -9$, desse modo, o vértice coincide com o ponto $(0, 0, -9)$. Nesses momentos, percebeu-se que os alunos estavam relacionando a representação geométrica da função com sua representação algébrica. De acordo com Kawasaki (2008), uma das vantagens de incorporar as tecnologias computacionais no processo de ensino e aprendizagem de funções reais de duas variáveis é a possibilidade de visualizar e manipular ideias matemáticas, articulando os diferentes tipos de representações dessas funções.

Observa-se que a facilidade para a construção dos gráficos das funções estudadas e dos gráficos de suas respectivas curvas de nível, a possibilidade de experimentar diferentes valores para os parâmetros, proporcionadas pelo Winplot, bem como, a possibilidade de explorar os conceitos transitando entre as mídias informáticas, oralidade e lápis e papel contribuíram para a produção de ideias matemáticas acerca de funções reais de duas variáveis.

Conclusões

Durante as atividades, observa-se que a visualização é uma das principais potencialidades do *software* Winplot. Como a representação gráfica das funções estudadas é feita no espaço tridimensional, sua exploração é dificultada quando se utiliza apenas a lousa ou lápis e papel. A exploração da representação gráfica foi favorecida com a utilização do *software* Winplot, contribuindo para a elaboração de conjecturas e para a produção do conhecimento acerca de funções reais de duas variáveis, mais especificamente, acerca de parabolóides elípticos e suas curvas de nível.

Cada mídia, ou seja, mídias informáticas, oralidade, lousa e lápis e papel, utilizada neste trabalho, teve sua importância e determinou a maneira como o conhecimento foi produzido. Como, por exemplo, utilizando o *software* Winplot construiu-se o gráfico da

função proposta com suas respectivas curvas de nível na própria superfície e no plano $z=0$. Essa abordagem gráfica foi comparada com a construção das curvas de nível a partir das equações obtidas igualando a função proposta a valores constantes, realizada usando a lousa e a mídia lápis e papel. Essa comparação, proporcionada pelo *software* Winplot, bem como, detalhes dos gráficos das funções reais de duas variáveis e suas respectivas curvas de nível, que são mais difíceis de serem percebidos quando se utiliza apenas a lousa e a mídia lápis e papel, facilitou a aprendizagem de alguns alunos.

Referências

ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Utilizando animação computacional no estudo de funções. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, São Paulo, v.1, n.2, p.111-125, jul./dez. 2010.

IGLIORI, S. B. C. Considerações sobre o ensino do cálculo e um estudo sobre os números reais. In: FROTA, M. C. R e NASSER, L. (orgs). Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisas e Debates. Recife: SBEM, 2009. P.11-26.

KAWASAKI, T. F. **Tecnologias na sala de aula de matemática: resistência e mudanças na formação continuada de professores**. Tese (Doutorado em Educação), Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008.

MACHADO, R. M. A Visualização na resolução de problemas de Cálculo Diferencial e Integral no ambiente computacional MPP. Tese (Doutorado em Educação), Universidade Estadual de Campinas, 2008.

MOTA, J. F. **Um estudo de planos, cilindros e quádricas, explorando seções transversais, na perspectiva da habilidade de visualização, com o *software* Winplot**. 2010. 207 f. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2010.

NASSER, L. Ajudando a superar obstáculos na aprendizagem de cálculo. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007, Belo Horizonte. **Anais...** Belo Horizonte: SBEM, 2007. Disponível em: <
http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Html/mesa.html> Acesso em: 19 mar. 2017.

OLIVEIRA, F. L. de. **A Produção De Conhecimento Matemático Acerca De Funções De Duas Variáveis Em Um Coletivo De Seres-Humanos-Com-Mídias**. 151 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2014.