COMO FAZER A PEDRA QUICAR NA ÁGUA?

Adina Veronica Remor
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
adinaremor@hotmail.com

Daniele Gonçalves
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
dani.nha1997@hotmail.com

Samara Schrenk
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
sahschrenk@gmail.com

RESUMO

O objetivo deste trabalho foi analisar as variáveis envolvidas no arremesso de uma pedra na água, de forma que ela quicasse. As principais grandezas e variáveis analisadas foram: força de reação da água, o ângulo de inclinação, a velocidade mínima para o arremesso, a profundidade máxima obtida pela pedra, o trabalho envolvido e a estimativa para o número de quiques. Para tal, gravamos um vídeo do arremesso de uma pedra em uma piscina e depois foi utilizado o *software Tracker* a fim de mensurar a trajetória e o gráfico do percurso realizado por ela. Concluímos que a velocidade inicial deve ser a maior possível para que se obtenha vários quiques, e o lançamento deve ser realizado o mais horizontalmente possível, visto que, dessa forma a pedra desliza por cima da água dissipando pouca energia, possibilitando assim mais quiques. Desta forma, entendemos que no processo de resolução da situação-problema seguimos, mesmo que muitas vezes intuitivamente a tendência metodológica Modelagem Matemática. Por fim, conclui-se que este trabalho além de proporcionar a oportunidade de estudar e conhecer outras áreas do conhecimento favorecendo a interdisciplinaridade, representou uma superação de desafios.

Palavras-chave: Processo de colisão da pedra na água; Número máximo de quiques; Modelagem Matemática.

INTRODUÇÃO

O presente trabalho resulta do projeto integrador proposto aos acadêmicos do terceiro período do curso de licenciatura em matemática na Universidade Tecnológica Federal do Paraná do Campus Toledo (UTFPR-TD). No primeiro semestre de 2018 lançou-se o desafio de propor um problema no qual ao menos três disciplinas do semestre estariam relacionadas (Cálculo Integral, Geometria 2, Fundamentos da Matemática 2, Didática Geral, Laboratório de Ensino de Matemática e Libras 2).

Inicialmente nosso grupo propôs calcular o arremesso de uma pedra em um lago, para analisar a velocidade de formação da circunferência quando a pedra toca na água. Após reunião dos professores do terceiro período para definir quais seriam os orientadores e co-orientadores[1], fomos desafiadas a alterar o problema inicial para “Como calcular o número de quiques de uma pedra na água?”. Dentro desse contexto, como poderíamos relacionar três disciplinas do terceiro período a esse problema de modelagem?

Para o desenvolvimento e análise do problema utilizamos uma perspectiva da modelagem matemática baseada em Bassanezi (1999), que defende que a modelagem matemática “consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos, resolvê-los e, então, interpretar suas soluções na linguagem do mundo real, é um processo dinâmico e atraente” (p. 15).

Essa citação é característica do objetivo de nosso trabalho, que consiste em descobrir quais são os elementos físicos e matemáticos que estão por traz da simples brincadeira de arremessar uma pedra na água fazendo com que a mesma quique. Além disso, usamos como base teórica um artigo escrito por Bocquet (2003), no qual o autor aborda a mesma situação do arremesso da pedra na água.

O QUE JÁ SE CONHECIA SOBRE A ATIVIDADE

Inicialmente, sem ter muita fundamentação teórica tentou-se elencar forças e energias que poderiam estar associadas desde o momento do arremesso da pedra até o momento em que ela perderia totalmente sua velocidade e afundaria como mostra a tabela abaixo.

Tabela 1 – Forças e energias envolvidas

Conceito simplificado	**Nossa ideia inicial**
Força peso: é a força exercida pela gravidade, relacionada a massa de um corpo.	A força peso age verticalmente em relação a superfície da água, empurrando a pedra para “baixo”.
Força de empuxo: o empuxo é a força vertical que atua sobre todo objeto mergulhado em um fluído.	A força de empuxo “empurrará” a pedra de volta para a superfície da água

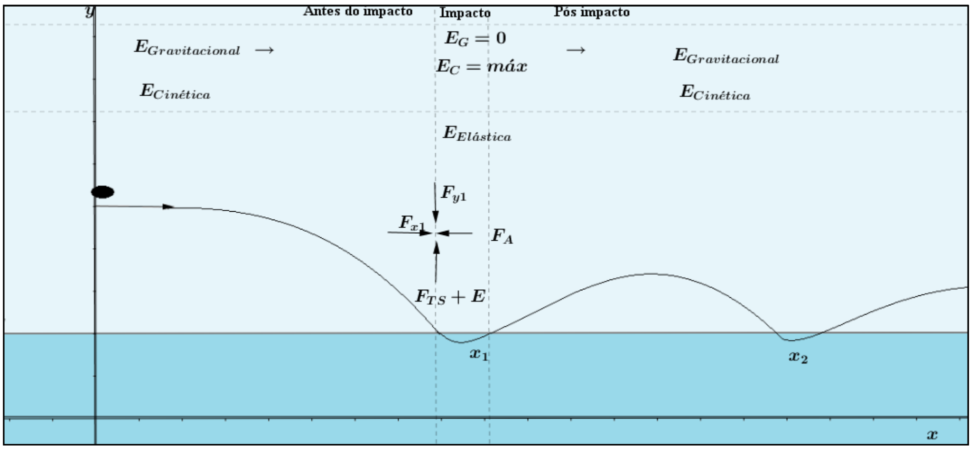
[1] Cada professor ficou responsável em orientar um trabalho e co-orientar mais dois. O total de projetos integradores desse semestre foram seis.

Força de atrito: a força de atrito corresponde a força exercida entre duas superfícies que estão em contato.	A força de atrito exercida entre a pedra e a água auxilia o movimento de rebote, atuando no sentido oposto ao da força peso.
Tensão superficial: as moléculas que estão na superfície da água só são atraídas por moléculas abaixo e ao lado delas, criando uma película elástica na superfície.	A tensão superficial, juntamente com a força de empuxo e atrito, atuará verticalmente, no sentido oposto ao da força peso, empurrando a pedra para cima.
Energia cinética: A energia associada ao movimento.	A energia cinética será transformada a cada contato entre a pedra e a água, fazendo com que a velocidade diminua em cada rebote.
Energia gravitacional: A energia cinética será transformada a cada contato entre a pedra e a água, fazendo com que a velocidade diminua em cada rebote.	A energia gravitacional atuará juntamente coma energia cinética sobre a pedra.
Energia dissipada: A energia dissipada está associada as "perdas" de energia que ocorrem na transferência de energia entre dois sistemas.	A cada contato da pedra com a água, uma parte da energia cinética será "perdida". Essa energia dissipada é que forma as ondas na água.

Fonte: Young e Freedman (2004)

Juntamente com o professor orientador, procuramos um professor de Física para nos auxiliar e após muita discussão e reflexão, descrevemos um diagrama inicial de forças e energias envolvidas, conforme figura 1. A imagem abaixo ilustra a trajetória de uma pedra quicando duas vezes, bem como as forças envolvidas no movimento, e as energias associadas a cada momento da trajetória.

Figura 1 – Ilustração das grandezas físicas envolvidas



Fonte: Autoria própria (2018).

Após esses estudos iniciais tínhamos como hipóteses que o melhor formato para a pedra que seria lançada era achatado, pois quanto maior a área de contato com a superfície da água, maior seria a força de empuxo e de tensão superficial, o que faria com que a pedra quicasse. Também pensamos que quanto maior a velocidade do arremesso e o ângulo de arremesso horizontal, maior a probabilidade de a pedra quicar, já que a cada contato com a água, a pedra perde energia e velocidade. A energia dissipada neste contato com a água gera as ondas que podem ser observadas. Conforme a velocidade fosse reduzindo, diminuiria as chances de a pedra quicar, já que a energia vai se dissipando. Outra hipótese que tínhamos é que a pedra iria afundar alguns milímetros, provavelmente de forma parabólica. Também supúnhamos que se soma das "forças contrárias" ao sentido de lançamento fosse maior que a força peso, a pedra iria quicar. Neste ponto do trabalho, haviam muitas dúvidas em como calcular o número de quiques. Na próxima seção, a modelagem do problema irá ser detalhada, assim como a fundamentação teórica que nos auxiliou a resolver o problema.

MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

A Modelagem Matemática vem se tornando cada vez mais presente nas atividades de matemática em sala de aula. Isto se deve por várias formas, entre elas a tentativa de se distanciar das "aulas tradicionais", baseadas principalmente na resolução e correção de exercícios no quadro pelo professor. Para Bassanezi (1999), "Modelagem Matemática utilizada com estratégia de ensino-aprendizagem é um dos caminhos a ser seguidos para tornar-se um curso de matemática, em qualquer nível, mais atraente e agradável" (p. 15).

Desta forma, é importante destacar que se deve ter um olhar sobre a inclusão da modelagem matemática no currículo. Barbosa (2004) apresenta cinco argumentos: motivação, facilitação da aprendizagem, preparação para utilizar a matemática em diferentes áreas, desenvolvimento de habilidades gerais de exploração e compreensão do papel sociocultural da matemática.

Destacou-se então a "Modelagem Matemática como um caminho para a aprendizagem de matemática" (BASSANEZI, 1999, p. 21). Porém é importante ter ciência do que se tem interesse em modelar e aonde se quer chegar (ter uma previsão dos caminhos a se tomar, para que não acabe fugindo totalmente do objetivo inicial). Para Bassanezi (1999),

> um modelo matemático é um conjunto consistente de equações ou estruturas matemáticas, elaborado para corresponder a algum fenômeno - este pode ser físico, biológico, social, psicológico, conceitual ou até mesmo um outro modelo matemático (p. 12).

Com o objetivo de, por meio da Modelagem Matemática, resolver a situação problema inicial serão apresentados na sequência o desenvolvimento da atividade e as análises realizadas. Segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.15) uma atividade de Modelagem Matemática:

> [...] envolve fases relativas ao conjunto de procedimentos necessários para configuração, estruturação e resolução de uma situação-problema as quais caracterizamos como: inteiração, matematização, resolução, interpretação e validação.

Na seção anterior apresentamos a fase da inteiração e nas próximas seções discutiremos as outras etapas da Modelagem Matemática aplicada ao nosso problema.

DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Primeiramente, conforme já exposto anteriormente, planejamos calcular a área do maior círculo formado ao se arremessar uma pedra na água. Porém, começamos a pesquisar e a embasar melhor os conhecimentos e percebemos que havia inúmeros outros fatores que poderiam ser abordados e que deixariam o trabalho mais interessante, como é o caso de fazer uma pedra quicar na água. Assim, iniciamos a investigação de quais seriam os fatores que envolveriam essa situação, a fim de buscar meios para melhor obtenção dos resultados. A partir disso, reconheceu-se que, se a pedra fosse lançada em um lago, seria necessário desconsiderar alguns fatores para que tivesse um resultado condizente, como: o vento, a correnteza, a margem do lago, os fatores externos (chuva, vibrações, peixes, insetos, sujeiras contidas no lago) que prejudica o percurso da pedra. Dessa forma, o lançamento foi realizado em uma piscina, até mesmo porque assim poderíamos repetir a experiência e a pedra poderia ser recuperada.

Assim, procuramos lançar a pedra o mais horizontalmente possível com uma velocidade inicial V_{x0} para que a componente V_{z0} fosse mínima e pudesse ser desprezada nos cálculos.

Durante o desenvolvimento de nosso trabalho, foi encontrado o artigo *The physics of stone skipping* publicado na revista *Nature*, escrito por Lydéric Bocquet, que analisa a mesma situação de quicar uma pedra na água. A partir desse momento passamos a estudar o artigo e relacioná-lo com o que já se havia deduzido.

O artigo apresenta dois casos, um com uma pedra quadrada e outro com uma pedra redonda, cita também as principais forças e energias vinculadas a trajetória da pedra sobre a água, comenta sobre o trabalho realizado pela pessoa com a experiência e apresenta uma estimativa do número de quiques para uma determinada situação. Nele foi encontrado as equações para subsidiar física e matematicamente o experimento que se encaixa no caso da pedra quadrangular. Para tal, primeiramente, realizamos a filmagem de uma pessoa jogando a pedra em uma piscina, já que foi desconsiderado algumas variáveis e a piscina comporta tudo que foi necessário.

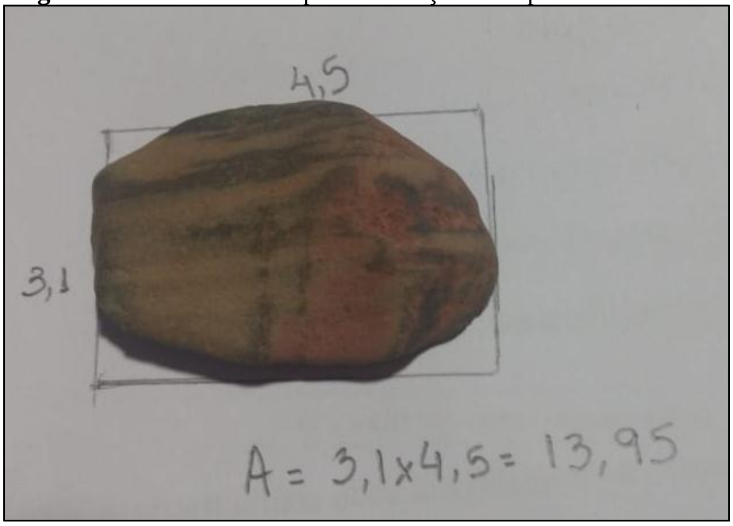
Segundo Bocquet (2003) um fator que faria a pedra quicar mais vezes é caso dela ser arremessada com uma rotação. Mas para este estudo, como a piscina era de apenas 8m aproximadamente, fez-se o lançamento sem causar rotações de forma intencional na pedra.

Figura 2 – Experiência realizada

Fonte: Autoria própria (2018).

Para realizar este experimento utilizou-se uma pedra achatada (Figura 3) e seu formato foi considerado como quadrangular, para que se pudesse utilizar as fórmulas desenvolvidas por Bocquet (2003) no artigo estudado e assim facilitar os cálculos.

Figura 3 – Pedra utilizada para realização da experiência



Fonte: Autoria própria (2018).

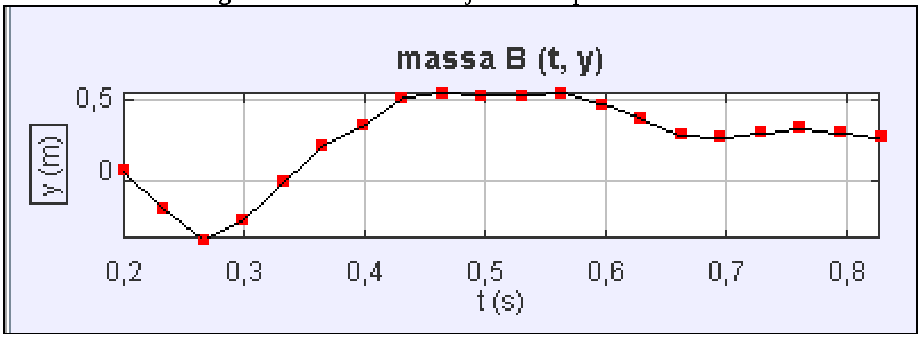
Em seguida foi utilizado o *software Tracker*[2] no qual inserimos o vídeo gravado para a experiência e através dele observamos claramente a trajetória traçada pela pedra arremessada, bem como o gráfico dessa trajetória.

Figura 4 – Trajetória da pedra

[2] Nenhuma das autoras tinha conhecimento algum sobre o software, por isso foi um desafio muito gratificante quando conseguimos alcançar o resultado apresentado nas figuras 4 e 5.

Fonte: Software Tracker (2018).

Figura 5 – Gráfico da trajetória da pedra

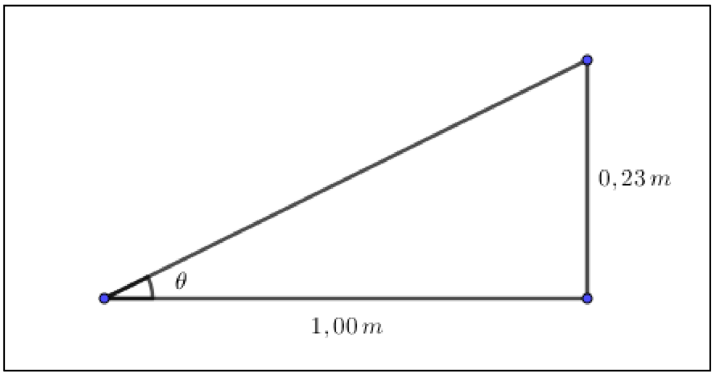


Fonte: Software Tracker (2018).

A partir desse gráfico, podemos perceber a altura da pedra y, em metros, em relação à água no decorrer do tempo t, em segundos.

Temos também que a massa da pedra é aproximadamente 20 gramas, ou seja, $M = 0{,}02\ kg$ e a velocidade inicial estimada em $V_{x0} = 5\ m/s$. Também consideramos o coeficiente de atrito $C_f = 1$, o coeficiente de arrasto $C_l = 1$, o comprimento da borda da pedra $a = 3{,}1\ cm = 0{,}031\ m$ e a densidade de massa da água $p_w = 1000\ kg\ m^{-3}$. Infelizmente, não conseguimos calcular a velocidade inicial com precisão. Assim, tivemos que estimar a velocidade V_{x0} em aproximadamente $5\ m/s$. O ângulo de inclinação θ (figura 6) foi obtido considerando o triângulo abaixo, no qual a altura em que a pedra foi lançada é aproximadamente $23\ cm = 0{,}23\ m$, e a distância da piscina até o momento em que a pedra tocou a água é $1m$.

Figura 6 – Obtenção do ângulo de inclinação



Fonte: Autoria própria (2018).

Assim, obtemos que $tg\ \theta = \frac{0{,}23}{1}$, logo $\theta \cong 13°$. Considerando também o ângulo de incidência β aproximadamente $10°$, a superfície submersa da pedra $S_{im} = 4{,}03\ cm^2 = 0{,}000403\ m^2$, e $V^2 \cong V_{x0}^2$, o que nos dá $V = 5\ m/s$, obtemos que a força de reação devido a água é dada por:

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{2} C_l p_w V^2 S_{im}\ \boldsymbol{n} + \frac{1}{2} C_f p_w V^2 S_{im}\ \boldsymbol{t}$$

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1000 \cdot 5^2 \cdot 0{,}000403\ \boldsymbol{n} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1000 \cdot 5^2 \cdot 0{,}000403\ \boldsymbol{t}$$

$$\boldsymbol{F} = 5{,}0375\ \boldsymbol{n} + 5{,}0375\ \boldsymbol{t}$$

Logo $\boldsymbol{F} \cong 5{,}04\ \boldsymbol{n} + 5{,}04\ \boldsymbol{t}$, em que $\boldsymbol{t}$ é o vetor ao longo da direção da pedra e $\boldsymbol{n}$ o vetor unitário normal a pedra. Esta força de reação da água é aquela que inicialmente acreditávamos ser a força de empuxo somada com a força de atrito e a tensão superficial.

Outro dado interessante para ser calculado é o máximo de profundidade obtido pela pedra, que é dado pela fórmula:

$$|Z_{max}| = \frac{g}{w_0^2}\left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{w_0 V_{z0}}{g}\right)^2}\right]$$

Em que $w_0^2 = \frac{C\, p_W\, V_{x0}^2\, a}{2M\ sen\ \theta}$, $g = 9.8\ m/s$, $C = C_l \cos\theta - C_f\ sen\ \theta$ e $\frac{V_{z0}}{V_{x0}} = tg\ \beta$.

Logo, $C = C_l \cos\theta - C_f\ sen\ \theta = \cos 13^o - sen\ 13^o = 0{,}7494 \cong 0{,}75$. Assim obtemos $w_0^2 = \frac{0{,}75 \cdot 1000 \cdot 5^2 \cdot 0{,}031}{2 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}225} \cong 64583{,}3$, o que nos dá $w_0 = 254{,}13$. Como $\frac{V_{z0}}{V_{x0}} = tg\ \beta$, obtemos $V_{z0} = V_{x0} \cdot tg\ \beta = 5 \cdot tg\ 10^o \cong 0{,}881$. Assim, a superfície máxima submersa é:

$$|Z_{max}| = \frac{9{,}8}{64583{,}3}\left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{254{,}13 \times 0{,}881}{9{,}8}\right)^2}\right] = 0{,}003621\ m$$

A partir desse dado, podemos conferir o fato da pedra quicar, já que Bocquet (2003) afirma que "[...] *The rebound condition can be written as* $|Z_{max}| < a\ sen\ \theta$*.*", ou seja a condição para que a pedra quique é $|Z_{max}| < a\ sen\ \theta$, e de fato $0{,}003621 < 0{,}031 \cdot 0{,}2249 = 0{,}006973$. Assim, o máximo de profundidade obtido pela pedra é $0{,}362\ cm$ ou seja, aproximadamente $3{,}6\ mm$.

Também podemos calcular a perda de energia durante o processo de colisão, que é dada pela fórmula

$$W = \frac{1}{2}MV_{xf}^2 - \frac{1}{2}MV_{x0}^2 = -\int_0^{t_{coll}} F_x(t)V_x(t)\ dt = -V_{x0}\int_0^{t_{coll}} F_x(t)dt.$$

Em que t_{coll} é o tempo de colisão da pedra com a água. Porém a equação acima é simplificada durante o artigo. Assim, de acordo com Bocquet (2003):

$$W = -\mu M g l$$

No qual $\mu = \frac{C_l sen\ \theta + C_f \cos\theta}{C} = \frac{sen\ 13° + \cos 13°}{0{,}75} = 1{,}599 \cong 1{,}6$, e l pode ser obtido através da equação $l = V_{x0}\frac{2\pi}{w_0} = 2\pi\sqrt{\frac{2M\ sen\ \theta}{Cp_W a}}$. Assim, $l = 5 \cdot \frac{2 \cdot 3{,}1415}{254{,}13} = 0{,}1236$. Logo, obtemos:

$$W = -1{,}6 \cdot 0{,}02 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}1236 = -0{,}03876$$

Desse modo, o trabalho realizado pela pessoa que lançou a pedra é $W = -0{,}03876\ J$.

Outro ponto interessante que podemos analisar é a velocidade inicial crítica V_C, que se torna um critério para que a pedra quique na água, já que a velocidade inicial deverá ser maior. Assim:

$$V_{x0} > V_c = \sqrt{2\mu g l}$$

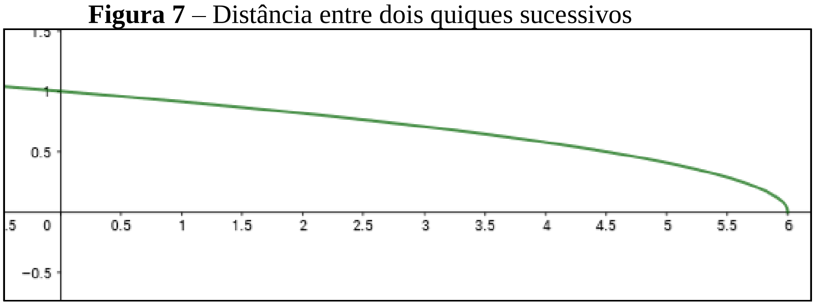
Através dos dados obtidos por meio da nossa experiência, encontramos a velocidade crítica, $V_c = \sqrt{2 \cdot 1{,}6 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}1236} = 1{,}96$, ou seja, a velocidade mínima com que a pedra deve ser lançada é $1{,}96\ m/s$. Observe que a modelagem do nosso problema está correta, já que a velocidade inicial de $5\ m/s$ considerada é maior que $1{,}96\ m/s$.

Para finalizar a análise da experiência desenvolvida, podemos calcular uma estimativa para o número de quiques, caso a pedra tivesse sido lançada em um lugar com área mais ampla. A fórmula para calcular a estimativa do número de quiques é dada por $N_c = \frac{V_x^2[0]}{2g\mu l}$.

Assim, o número máximo de quiques que poderiam ser obtidos nessa experiência é $N_c = \frac{5^2}{2 \cdot 9{,}8 \cdot 1{,}6 \cdot 0{,}1236} \cong 6{,}45$. Este fato é muito interessante, pois nos fornece um número inteiro de no máximo 6 quiques para o experimento realizado.

A distância entre dois quiques também pode ser calculada, e é dada por $\frac{\Delta X[N]}{\Delta X_0} = \sqrt{1 - \frac{N}{N_c}}$, em que N se refere ao n-ésimo salto realizado. A partir do experimento, podemos perceber que a distância entre dois quiques sucessivos é dada pela fórmula $\frac{\Delta X[N]}{\Delta X_0} = \sqrt{1 - \frac{N}{6}}$, que está representada no gráfico normalizado da figura 7.

Figura 7 – Distância entre dois quiques sucessivos



Fonte: Autoria própria (2018).

Relacionando a experiência com a teoria, temos que Bassanezi (2004) ressalta que “a modelagem matemática, em seus vários aspectos, é um processo que alia teoria e prática, motiva seu usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la” (p. 17). Destaca que uma das vantagens do uso da modelagem é a multidisciplinaridade que ela concede, quebrando assim barreiras que há entre disciplinas distintas e aproximando-as de forma que se faça o uso aliado das mesmas em determinada realização de atividade.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após a realização do experimento e estudo do artigo, pode-se notar a mudança de ideia desde o início dos estudos. Assim, foi desenvolvido uma tabela, apresentada a seguir, elencando a maneira como se pensava antes de encontrar o artigo e o que se pode concluir após estudá-lo.

Tabela 2 – Análise realizada

PENSÁVAMOS	CONCLUÍMOS
Calcular a área do círculo.	Analisar a melhor forma de jogar a pedra em um lago para quicar.
Considerar algumas variáveis como o	Considerar volume da pedra, forças

local de lançamento da pedra (encosta do lago ou interior), a tensão superficial, a equação da onda, a força maré-motriz.	envolvidas, energia dissipada, o trabalho realizado, a área de superfície submersa.
Ângulo de arremesso menor possível.	Lançamento considerado horizontalmente para facilitar os cálculos.
O formato da pedra redondo.	O formato da pedra quadrado para simplificar os cálculos.
Força empuxo, força de atrito e força da tensão superficial que mais agiriam sobre a pedra.	Coeficientes de atrito e arrasto são considerados constantes, a força é proporcional a superfície submersa e não consideramos a rotação da pedra para simplificação dos cálculos, embora isso influenciasse no número de quiques.

Fonte: Autoria própria (2018).

A partir das análises desenvolvidas no decorrer do trabalho pode-se perceber a didática presente intrinsecamente a partir das conversas realizadas por meio das redes sociais e encontros para estudar a respeito do artigo. Como no início não se tinha nenhum dado coerente e embasamento teórico suficiente a respeito do tema, tivemos que buscar em livros de física e sites informações que nos fornecessem o básico para iniciar o trabalho. E a partir de investigação conseguimos encontrar o artigo já citado anteriormente, porém novamente tivemos dificuldades para compreendê-lo visto que nenhuma possuía domínio da língua inglesa. Contudo, superamos nossas dificuldades e conseguimos realizar o trabalho. Como não tínhamos ferramentas prontas para alcançar o objetivo e precisamos ir em busca das mesmas, conclui-se que o trabalho se deu através de uma metodologia investigativa, mais especificamente a modelagem matemática, visto que os dados analisados são reais, o tema estudado foi sugerido e não houve um meio pronto para resolver a situação-problema.

Através dos cálculos realizados, podemos encontrar uma integral que foi simplificada em uma das fórmulas utilizadas e o cálculo do seno, cosseno e tangente dos ângulos de incidência e inclinação por meio da trigonometria. Dessa forma, os conteúdos citados podem ser relacionados com as disciplinas de Cálculo Integral e Fundamentos da Matemática 2. Desta forma, entendemos que no processo de resolução da situação-problema seguimos, mesmo que muitas vezes intuitivamente a tendência metodológica Modelagem Matemática.

Por fim, conclui-se que este trabalho além de proporcionar a oportunidade de estudar e conhecer outras áreas do conhecimento favorecendo a interdisciplinaridade, representou uma superação de desafios, pois tínhamos pouco embasamento nos conteúdos de física e inglês e não sabíamos utilizar o software Tracker. Após realizar a experiência, estudar e compreender a situação-problema, percebemos nossa capacidade de superação em meio as dificuldades enfrentadas e como nos mantemos unidas diante dessas situações adversas.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VENTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na educação básica.** São Paulo: Contexto, 2013. 160 p.

BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática na sala de aula. **Perspectiva**, Erechim (RS), v. 27, n. 98, p. 65-74, jun. 2003.

BASSANEZI, R.C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática.** São Paulo: Contexto, 2004. 389 p.

______. Modelagem Matemática: Uma disciplina emergente nos programas de formação de professores. In: **XXII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional**. Campinas: IMECC, 1999, v. 9, p. 9-22.

BOCQUET, L. The physics of stone skipping. **Nature**, Villeurbanne Cedex, France, p.150-155, fev. 2003.

YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. **Física I:** Mecânica. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2004. 403 p.

WALKER, C.; WILSON, J. *The Physics of...Skipping Stones.* **Discover Magazine**, p.1-4, 01 ago. 2003. Disponível em: <http://discovermagazine.com/2003/aug/featscienceof>. Acesso em: 27 jun. 2018.