



18,19 e 20 de outubro de 2018

# MODELAGEM E A SALA DE AULA



Encontro Paranaense de Modelagem  
na Educação Matemática

---

## A CONSTRUÇÃO DE MODELOS MATEMÁTICOS PARA UM PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO POR ESTUDANTES DE UMA TURMA DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

Ana Caroline Zampirolli  
Universidade Estadual de Maringá  
ana.zampirolli@hotmail.com

Kleber Luciano Niro  
Universidade Estadual de Maringá  
kleber.niro@gmail.com

Lilian Akemi Kato  
Universidade Estadual de Maringá  
lakato@uem.br

### RESUMO

O presente trabalho apresenta uma atividade de Modelagem Matemática desenvolvida no primeiro ano do curso de Matemática, da Universidade Estadual de Maringá - UEM, com alunos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, em que objetivou-se identificar quais conceitos matemáticos seriam mobilizados por esses estudantes ingressantes na universidade, na realização de uma atividade de Modelagem Matemática envolvendo um problema de otimização. Os alunos, organizados em grupos, criaram conjecturas para o desenvolvimento de um modelo condizente com a situação que lhes foi proposta, aproximando situações reais de conceitos matemáticos. Tais modelos foram apresentados aos seus pares em um momento de socialização, no final da atividade, onde puderam compará-los e validá-los. Nos registros dos alunos, foram identificados vários conceitos matemáticos, dentre eles, função por partes e função afim e suas propriedades. A mobilização de tais conceitos já era esperada, por ser conteúdo trabalhado na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, no entanto, foram percebidos alguns erros conceituais relacionados as propriedades.

**Palavras-chave:** Modelagem Matemática; Ensino Superior; Função.

### INTRODUÇÃO

Nesse trabalho relatamos uma atividade de Modelagem Matemática, desenvolvida com os alunos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I (CDI I) do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Maringá.

A escolha dessa turma deu-se por ser o CDI I, uma das disciplinas que mais causam retenção e reprovação nos cursos de Licenciatura em Matemática, causando desestímulo tanto em professores, no preparo de suas aulas e busca de novas alternativas pedagógicas, quanto em alunos, no que diz respeito ao empenho e continuidade no curso. A Modelagem

Matemática, possibilita uma relação saber/fazer, colocando o aluno como protagonista da construção de seu conhecimento. Assim, propusemos a Modelagem Matemática, por ser uma alternativa ao processo de ensino e aprendizagem, que favorece a compreensão de conceitos matemáticos por meio de problemas que envolvem a realidade dos alunos, contrapondo o ensino tradicional.

A Modelagem Matemática, que se originou a partir da Matemática Aplicada, estimula os alunos como investigadores e desenvolvedores de modelos para situações reais e cotidianas, aproximando os conceitos matemáticos do fazer/saber da realidade.

Segundo Bassanezi (2013, p.24) “Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências”. Consonantes com essa afirmação e, considerando que a turma de estudantes escolhida era constituída, em sua maioria, por ingressantes na universidade, portanto, estavam tendo os primeiros contatos com os conteúdos de CDI I, propomos um problema de otimização, com o objetivo de aprimorar os conceitos e propriedades do conceito de função e, ainda, fazer com que os alunos percebessem a proximidade da Matemática em diversas questões cotidianas.

Nosso objetivo foi identificar quais conceitos matemáticos seriam mobilizados pelos estudantes em uma atividade de Modelagem Matemática envolvendo um problema de otimização. Assim, buscamos em Almeida; Silva e Vertuan. (2013), uma atividade, que pudesse ser adaptada aos nossos propósitos. Desenvolvemos então a atividade “A segurança eletrônica em questão: cerca elétrica” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013, p.75), em 4 horas/aulas, no horário de aulas regular da turma, que nos foi cedido pelos professores.

Pudemos observar, em tal atividade, um envolvimento e um entusiasmo por parte dos alunos participantes, não usual em aulas consideradas tradicionais; aceitaram prontamente nosso convite em participar da atividade, propondo alternativas e criando conjecturas a fim de buscar o melhor modelo que respondesse a questão que lhes foi apresentada.

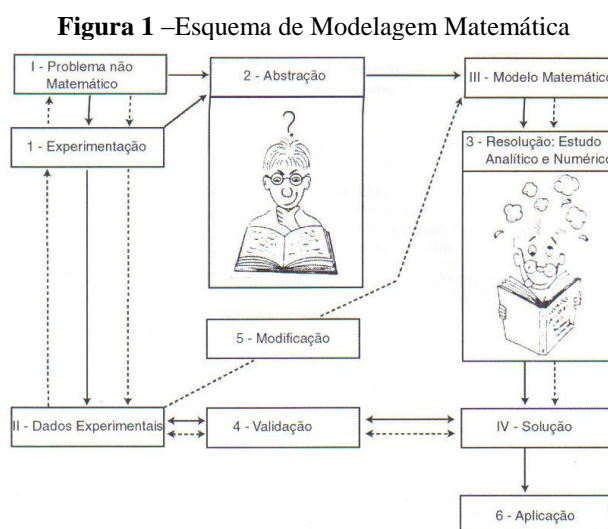
### SOBRE A NOSSA COMPREENSÃO DE MODELAGEM MATEMÁTICA

A Modelagem Matemática no âmbito da Educação Matemática, vem sendo foco de diversas pesquisas, muitas das quais objetivam evidenciar suas contribuições para o ensino e a aprendizagem da Matemática.

De modo geral, a Modelagem Matemática, tem o objetivo de resolver problemas da realidade por meio de conceitos matemáticos. Mas, na prática educativa, essa compreensão demanda algumas mudanças a partir das perspectivas dos envolvidos, por exemplo, em relação à forma como a Matemática se relaciona com a realidade, a concepção de Matemática e de Educação Matemática, entre outros aspectos. Neste trabalho, adotamos a concepção de Bassanezi (2013), segundo a qual a Modelagem Matemática pode ser entendida como:

[...] um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual (BASSANEZI, 2013, p. 24).

Para Bassanezi (2013), o processo de Modelagem Matemática no ensino, engloba algumas etapas, as quais não constituem um processo rígido, mas, que dão subsídios para o desenvolvimento da atividade, como mostrado na figura 1.



Fonte: Bassanezi (2013, p. 27)

A experimentação é a etapa em que ocorre a obtenção de dados, na abstração, selecionam-se as variáveis que serão utilizadas na atividade, faz-se a problematização, o levantamento de hipóteses e a simplificação do problema. A resolução, consiste em fazer a substituição da linguagem natural das hipóteses pela linguagem Matemática coerente. E por fim na validação aceita-se ou não o modelo matemático obtido, compara-se os dados obtidos pelo modelo encontrado e os valores obtidos no sistema real, buscando relacionar a solução com o problema proposto inicialmente, com a intenção de verificar se a solução é satisfatória e a modificação ocorre caso seja necessário fazer melhorias, alterações ou reformulações no modelo encontrado.

Nesse processo, um modelo matemático pode ser construído dentro de uma teoria Matemática já conhecida e, mesmo assim, pode ocorrer que as técnicas e os métodos dessa teoria não sejam suficientes para a obtenção dos resultados desejados. Nessas situações, ocorrem motivações para o desenvolvimento de teorias Matemáticas, inclusive as estudadas (BASSANEZI, 2013).

No trabalho desenvolvido, a atividade de Modelagem Matemática se refere a um problema de otimização, onde os alunos deveriam admitir algumas hipóteses e responder a questão que lhes foi pedida. Antes de apresentar o problema proposto, explicaremos um pouco sobre o que compreendem por otimização e algumas de suas aplicações.

### **OTIMIZAÇÃO**

Quando vamos aos nossos compromissos, temos em mente a melhor rota/caminho para chegarmos mais rapidamente ao nosso destino. Se, num dado dia, resolvemos passar em um supermercado para algumas compras rápidas, verificamos se a quantidade/preço de algum produto é compensatória em relação a outros produtos. Todas essas situações, de escolha da melhor opção, nos remetem a um processo que denominamos otimização.

Mas, o que significa otimização? Em uma busca no dicionário de língua portuguesa, Aurélio, encontramos: ato, processo ou efeito de otimizar, o conjunto de técnicas algorítmicas e de programação usadas para buscar o ponto de ótimo para funções Matemáticas (FERREIRA, 2008, p. 599). Portanto, otimizar pode ser entendido como estabelecer

prioridades para uma maior eficácia com o objetivo de obter os melhores resultados em uma dada situação.

A Matemática possui inúmeras ferramentas para solucionar questões e problemas de otimização, mas em geral “os problemas de otimização são resolvidos com o uso do Cálculo Diferencial” (MACÊDO, et al., 2018 p.101). Ao analisarmos o Projeto Pedagógico do Curso de Matemática da Universidade Estadual de Maringá encontramos algumas Componentes Curriculares que contém de forma direta ou indireta, em sua ementa, o conteúdo de Otimização, a saber: Cálculo Diferencial e Integral I, Cálculo Diferencial e Integral II, Programação Linear e Programação não Linear.

Além disso, o Departamento de Matemática (DMA), desta Universidade, oferece Otimização como uma linha de pesquisa, na Matemática Aplicada, em seu programa de Pós-Graduação em Matemática (PMA).

Geralmente, problemas de otimização são trabalhados em Matemática Aplicada, que considera a otimização como uma área de estudo, que lida com o problema de encontrar valores para variáveis ou incógnitas que, dentre todos aqueles valores que satisfazem um conjunto dado de restrições, minimizam (ou maximizam) uma função objetivo predefinida.

Assim, a escolha do tema otimização, nos pareceu apropriada para desenvolver a atividade de Modelagem Matemática com os alunos do Curso de Matemática da Universidade Estadual de Maringá.

### ATIVIDADE DESENVOLVIDA

O tema da atividade proposta foi: “A segurança eletrônica em questão: cerca elétrica” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN; 2013). Iniciamos a implementação a partir de uma conversa com os alunos sobre o tema segurança, em que surgiu o termo cerca elétrica. Então, apresentamos algumas informações sobre a cerca elétrica e sua utilização, mostramos uma reportagem<sup>1</sup>, também com informações a respeito do tema, onde discutimos com os participantes sobre o que eles já conheciam e sobre as novas informações apresentadas no vídeo. Em seguida, entregamos uma folha com a atividade proposta e, algumas informações sobre esta situação-problema, de modo que eles deveriam se colocar como vendedores de uma

---

<sup>1</sup> Disponível em <<https://www.youtube.com/watch?v=5UvMSRwtfDs>>. Acesso em 26/09/2018.

loja, que ofertava duas opções de venda para kits com fios para instalação de cerca elétrica, explicando as vantagens ou desvantagens dessas duas opções. Os dados referentes aos valores de cada opção foram apresentados tais como na tabela 1.

**Tabela 1** – Valores ofertados pela loja

Conteúdo	Opção 1	Opção 2
Central	R\$370,00	R\$180,00
Bateria		R\$60,00
Cirene		R\$25,00
Haste de aterramento		R\$35,00
Cerca (20 m. com 4 fios)		-
Valor do m. de cerca (4 fios)	R\$5,00	R\$4,50

Fonte: ALMEIDA; SILVA; VERTUAN (2013, p. 75)

E, a questão proposta a eles foi: “sendo você um vendedor dessa loja, como explicaria as vantagens ou desvantagens de cada opção?”.

Para desenvolvimento e orientação da atividade, antes da aplicação resolvemos ela supondo que um eventual cliente compraria um kit completo e, uma determinada quantidade de fios, pois, caso não comprasse fio e/ou possuísse algum item do kit, a opção 2 seria mais vantajosa, limitando as opções para resolução da atividade e, a utilização dos conceitos matemáticos. Consideramos também, a metragem de fios no conjunto dos números reais positivos, por caracterizar uma maior aproximação com a realidade. Tomadas tais hipóteses, a matematização se deu por meio de tabelas, expressões algébricas e gráficos, possibilitando a utilização de conceitos importantes no estudo de funções, o que foi oportunamente apresentado aos participantes em um outro momento.

Na implementação, os alunos ficaram livres para resolverem a atividade da maneira que achassem mais adequada e, ficamos à disposição para sanar qualquer dúvida. Os alunos trabalharam em 7 grupos de até 8 alunos cada, onde discutiram e participaram ativamente na resolução da atividade.

Cada grupo adotou uma estratégia para a resolução da atividade e, quando todos terminaram, fizemos um momento de socialização, onde os grupos foram até o quadro e expuseram o que haviam pensando e, como chegaram em suas respostas finais.

Apresentaremos aqui, brevemente, a solução de cada grupo.

O grupo 1, iniciou a resolução da situação-problema com a seguinte equação:  $x > 20 \Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = 370 + 5x \\ C_2(x) = 390 + 4,5x \end{cases}$ .

Em seguida, fez  $C_1(x) = C_2(x)$ , concluindo que a opção 2 era mais vantajosa quando  $x > 60$ . Para o intervalo restante, considerou  $6 < x < 20$ , pois, de acordo com o grupo a medida mínima para uma casa era 6 metros e, igualando as funções  $370 = 300 + 4,5x$ , obtiveram que a opção 1 era mais vantajosa para  $15 < x < 60$ .

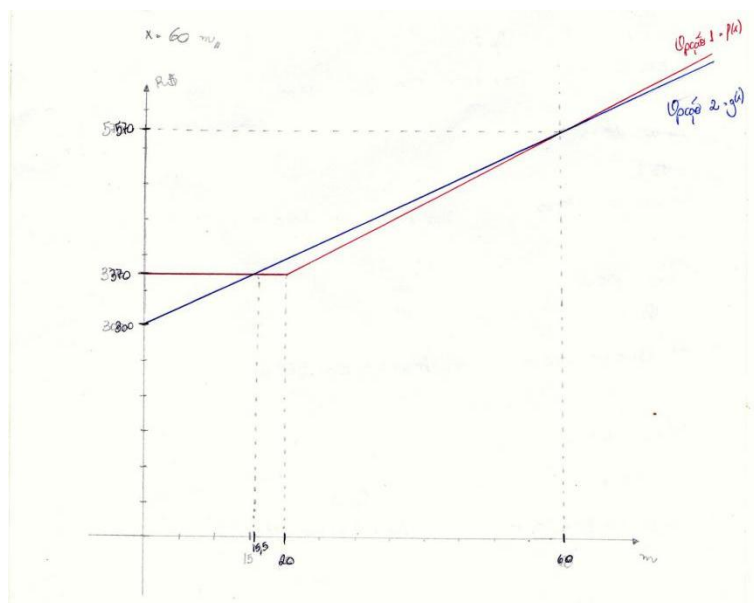
Este grupo realizou todas as operações corretamente e conseguiu chegar em uma resposta para a questão proposta, no entanto, percebemos que o intervalo de 6 metros até 15 metros não estava contemplado na resposta obtida por eles.

O grupo 2, iniciou sua resolução por meio de tentativas, em que realizaram comparações entre os custos das opções com diversas quantidades de metros. Como perceberam que isso não seria suficiente para obter a resposta do que estávamos pedindo, eles criaram as seguintes funções:  $Op1 = 370 + 5y$  e  $Op2 = 300 + 4,5x$ , onde  $x$  é a metragem total e,  $y = x - 20$ . Encontraram suas intersecções e, construíram um gráfico, mostrando os intervalos em que cada opção seria mais vantajosa.

**Figura 2** – Gráfico elaborado pelo grupo 2

## Modelagem e a Sala de Aula

Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática  
18, 19 e 20 de outubro de 2018  
Cascavel - PR



Fonte: registro dos alunos.

O grupo 3, começou atribuindo valores para o comprimento do fio, criando uma tabela relacionando a metragem de fios com o preço cobrado em cada opção:

Figura 2 – Tabela elaborada pelo grupo 3

m	opção 1	opção 2
0	370,00	300,00
10	370,00	345,00
14	370,00	364,00
15	370,00	367,00
20	370,00	390,00
50	520,00	525,00
60	570,00	570,00

Fonte: registro dos alunos.

Percebendo que as informações não eram suficientes para encontrar uma solução, elaboraram as seguintes funções:  $f(x) = \begin{cases} 370, & x \leq 20 \\ 270 + 5x, & x \geq 20 \end{cases}$  e  $g(x) = 300 + 4,5x$ . E, a partir dessas funções e suas intersecções, concluíram que até 15 metros era mais vantajosa a opção 2, de 16 metros até 60 metros, compensava a opção 1 e, para valores maiores que 60 metros, voltava a ser mais vantajosa, a opção 2.



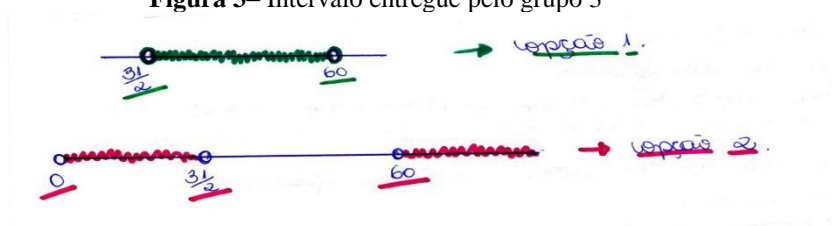
Este grupo considerou o domínio como sendo o Conjunto dos números naturais ( $\mathbb{N}$ ), alegando que não era possível comprar, por exemplo, meio metro de fio.

O grupo 4 apresentou as seguintes funções:  $x > 20 \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 370 + 5(x - 20); \text{opção 1} \\ g(x) = 300 + 4,5x; \text{opção 2} \end{cases}$ ,

e  $0 < x \leq 20 \Rightarrow \begin{cases} q(x) = 370; \text{opção 1} \\ h(x) = 300 + 4,5x; \text{opção 2} \end{cases}$ .

Encontraram as intersecções em ambos os casos, e concluíram que entre 15,5 metros e 60 metros é mais vantajosa a opção 1, e que de 0 metros a 15,5 metros e para valores maiores que 60 metros, fica sendo mais vantajosa a opção 2. Esse grupo construiu um gráfico com as funções e, também, apresentou na forma de intervalo qual a opção mais vantajosa em cada caso.

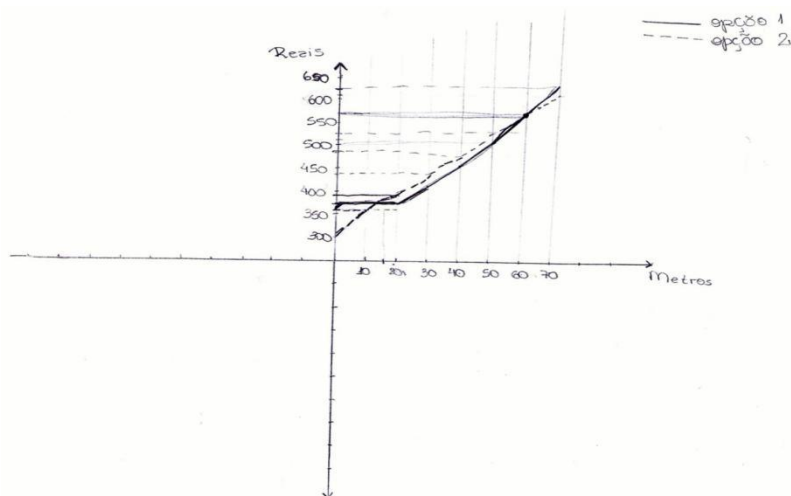
Figura 3– Intervalo entregue pelo grupo 3



Fonte: registro dos alunos.

O grupo 5, inicialmente, criou uma tabela, atribuindo valores para a quantidade de fio (em metros), obtendo seu custo. E, em seguida, para descrever a solução, construíram um gráfico. Os integrantes do grupo 5 não nos entregaram as resoluções que fizeram para chegar nas intersecções apresentadas no gráfico, mas, certamente as fizeram, pois encontraram as intersecções corretamente. O gráfico apresentado por este grupo, está na figura 4.

Figura 4 – Gráfico feito pelo grupo 5



**Fonte:** registro dos alunos.

Este grupo também considerou o domínio da função como sendo o Conjunto dos números Naturais, no entanto, na construção do gráfico, ele o fez como sendo contínuo. O traço pontilhado apresentado foi assim feito, apenas para diferenciá-lo do outro traço.

Os grupos 6 e 7, apenas descreveram a situação, expressando suas opiniões sobre as vantagens e desvantagens, não resolveram matematicamente. Essa descrição feita pelos grupos, baseada apenas nas informações apresentadas na situação-problema, muitas vezes não estavam corretas. Por exemplo, um dos grupos escreveu “Até 20 metros (4 fios) sai mais cara a opção 2 do que o pacote 1”, e ao fazermos as contas, percebemos que isso não está correto.

### CONSIDERAÇÕES SOBRE A EXPERIÊNCIA

Nosso objetivo foi identificar quais conceitos matemáticos, alunos da disciplina de CDI I mobilizariam, ao participarem de uma atividade de Modelagem Matemática envolvendo otimização. Os principais conceitos matemáticos utilizados foram: função afim, função por partes, tabelas, intervalos, inequações e gráficos.

Esses conceitos mobilizados pelos estudantes foram coerentes com o conteúdo programático do CDI I, abordados pela professora da componente, até o momento da realização desta prática com a Modelagem Matemática. Trabalhos como os de Bisognin; Bisognin (2012) e Brito; Almeida (2005) apontam contribuições da Modelagem Matemática para o ensino e aprendizagem do conceito de funções, conteúdo que, a partir das resoluções

apresentadas pelos estudantes com esta atividade de Modelagem Matemática, tiveram destaque, ou seja, foram os mobilizados.

Além disso, na solução da atividade, foram mobilizados alguns conceitos equivocados como: considerar o domínio da função no Conjunto dos números Naturais, sendo que estávamos trabalhando com um problema contínuo; restringir a solução da situação-problema aos dados apresentados; gráficos incorretos e solução incoerente com as hipóteses levantadas por eles. Para Bassanezi (2013), existem alguns obstáculos para os estudantes em uma atividade de Modelagem Matemática, pois, por não ser usual em sala de aula, pode desestabilizar os estudantes, causando certa apatia e dispersão. E mais, como em uma atividade de Modelagem Matemática o aluno é o centro do processo de ensino aprendizagem, o prosseguimento da aula pode ocorrer de maneira mais lenta.

No entanto, nessa atividade, acreditamos que a Modelagem Matemática possibilitou a motivação e interesse dos alunos e, possivelmente houveram contribuições para o ensino e aprendizagem sobre o conceito de função, bem como, a interdependência das variáveis e, a importância do domínio em uma situação da realidade. Nesse sentido, concordamos que:

“a Modelagem Matemática é ainda um campo fértil para indagações sobre a própria natureza da Matemática, seu papel instrumental e dinâmico na descrição, explicação e revisão de comportamentos de situações reais” (BRITO; ALMEIDA, 2005, p. 83).

A atividade desenvolvida com os alunos na perspectiva da Modelagem Matemática como método de ensino e aprendizagem, mostrou que não é importante apenas o modelo a ser obtido e, sim, o processo e o caminho para sua obtenção, salientando a exploração dos conceitos matemáticos que podem ser utilizados em situações-problema da realidade. A situação-problema escolhida, nos permitiu perceber a importância de descentralizar o conhecimento em relação ao professor, tornando o aluno responsável por investigar, conjecturar e resolver problemas, indo ao encontro das necessidades impostas pela sociedade contemporânea que requer cada vez mais cidadãos críticos e autônomos nas tomadas de decisões entre seus pares.

**REFERÊNCIAS**

ALMEIDA, L.W.; SILVA, K.P.; VERTUAN R.E. **Modelagem Matemática na educação básica**. 1 ed., São Paulo: Contexto, 2013.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia**. 3ªed. 4ª reimpressão – São Paulo: Contexto, 2013.

BISOGNIN, E.; BISOGNIN, V. Explorando o conceito de função por meio da Modelagem Matemática. In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática - SIPEM, 5, 2012, Petrópolis, RJ. **Anais...** Petrópolis: 2012.

BRITO, D. S.; ALMEIDA, L. W. **O conceito de função em situações de Modelagem Matemática**. ZETETIKÉ – Cempem – FE – Unicamp – v.13 – n. 23 86 – jan./jun, 2005.

FERREIRA, A.B.H. **Miniaurélio: o dicionário da língua portuguesa**. Curitiba: Ed. Positivo, 2008.

MACÊDO. J.A, et al. **Resolução de problemas de otimização nas aulas de matemática**. **Educação Matemática Debate**. Montes Claros, v2, n.4. 2018.