MODELOS MATEMÁTICOS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA: UM OLHAR A PARTIR DAS DUAS ÚLTIMAS EDIÇÕES DO ICTMA

Bianca de Oliveira Martins
Universidade Estadual de Londrina
bianca_o.martins@hotmail.com

Jeferson Takeo Padoan Seki
Universidade Estadual de Londrina
jefersontakeopadoanseki@hotmail.com

Lourdes Maria Werle de Almeida
Universidade Estadual de Londrina
lourdes@uel.br

RESUMO

Os modelos matemáticos tem sido alvo de discussões em diversas pesquisas sobre modelagem matemática na Educação Matemática. De modo geral, modelos matemáticos são abordados nas representações de modelagem e associados ao que a literatura denomina *matematização* e *resolução* em atividades de modelagem matemática. Interessados em ampliar nossa compreensão sobre os tipos de modelos matemáticos utilizados em atividades de modelagem matemática, assumimos uma atitude fenomenológica de investigação e direcionamos nosso olhar a interrogação: Que tipos de modelos matemáticos são evidenciados em atividades de modelagem matemática nos livros do ICTMA (*International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications)?* Para responder tal interrogação, fizemos uma análise das duas últimas edições da conferência que nos permitiu constituir 5 núcleos de ideias, à saber, *modelos já convencionados para determinadas situações*; *modelos algébricos com variáveis discretas*; *modelos algébricos com variáveis contínuas*; *modelos geométricos*; *modelos aritméticos*. Neste sentido, cada situação modelada requer modelos matemáticos específicos. De modo geral, todos os tipos de modelos matemáticos evidenciados nas atividades de modelagem matemática tinham um fim educacional, seja para aprendizagem de conceitos matemáticos ou por exemplo, para a discussão do uso de diferentes procedimentos matemáticos em uma determinada sociedade.

Palavras-chave: Educação Matemática. Modelagem Matemática. Fenomenologia.

INTRODUÇÃO

De modo geral, conceitos matemáticos são aplicados de maneiras diferentes em uma variedade de disciplinas, campos e áreas de práticas extra-matemáticas. Toda vez que a matemática é usada para lidar com questões, problemas, situações e contextos em domínios fora da matemática, modelos matemáticos e modelagem estão necessariamente envolvidos, implícita ou explicitamente (NISS, 2012).

A Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017, p. 265) considera como competência específica de matemática, a utilização de “processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados”. Este documento oficial, também considera que a matemática oferece modelos para compreender a realidade, permitindo envolver infinitos contextos, provenientes de práticas sociais, de outras áreas de conhecimento e contextos da própria matemática (BRASIL, 2017).

Os ciclos de modelagem matemática presentes na literatura de modelagem matemática apresentam, seja na matematização, seja na resolução das atividades de modelagem matemática, a importância dos modelos matemáticos para a resolução de situações-problema (DOERR; ÄRLEBÄCK; MISFELDT, 2017; PERRENET; WANEVELD, 2012). Neste contexto, a investigação da modelagem matemática está associada, também, à investigação dos tipos de modelos matemáticos utilizados nestas atividades.

No que tange as publicações a respeito da modelagem matemática, podemos destacar estudos da comunidade internacional de modelagem matemática e aplicações, publicados bianualmente nos livros da Conferência Internacional sobre o Ensino de Modelagem Matemática e Aplicações (ICTMA). Assim, neste artigo, direcionamos nosso olhar à interrogação: que tipos de modelos matemáticos são evidenciados em atividades de modelagem matemática nos livros do ICTMA (*International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications)?* Para a realização desta investigação nos atentamos às duas últimas edições disponíveis, ICTMA 16 e ICTMA 17, e assumimos uma atitude fenomenológica de investigação, que implica em deixar que as coisas se manifestem como o que são, sem que projetemos nelas as nossas próprias categorias.

Este artigo contempla uma introdução acerca de modelagem e modelos na Educação Matemática, os aspectos metodológicos, análise fenomenológica, as discussões da interrogação de pesquisa e considerações finais.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Desde o final da década de 1960, uma crescente comunidade de educadores matemáticos tem se dedicado às pesquisas sobre modelos, modelagem matemática e aplicações e seus papéis no ensino e aprendizagem de matemática.

Estes educadores, pesquisadores e os demais interessados em Modelagem Matemática na Educação Matemática, formam um grupo nomeado ICTMA - *The International Community of Teachers of Modelling and Applications*, os integrantes desta comunidade organizam uma conferência que ocorre bianualmente.

Devido a relevância mundial deste evento, em que nações compartilham suas experiências e pesquisas desenvolvidas na área de aplicações e modelagem matemática, para compor nossa investigação escolhemos analisar capítulos dos livros do ICTMA – que são constituídos por artigos submetidos à conferência.

O material de pesquisa é constituído pelos livros das duas últimas edições da conferência, sendo os livros do ICTMA 16 e ICTMA 17, publicados em 2015 e 2017, respectivamente. Com intuito de analisarmos somente os artigos que tratam de modelos em atividades de modelagem matemática fizemos um recorte nestas edições utilizando concomitantemente os critérios de seleção:

- o artigo contém o termo *modelagem* no título ou no resumo;
- os autores do artigo devem ter publicado em, ao menos, 3 edições diferentes do ICTMA, na última década[1];
- as características de, ao menos, uma atividade de modelagem matemática são descritas ou citadas no artigo;
- os artigos devem apresentar os modelos matemáticos utilizados nas atividades de modelagem matemática.

Atendendo aos critérios mencionados, foram selecionados 16 artigos de uma amostra de 102 (ICTMA 16: 50 capítulos – 7 selecionados; ICTMA 17: 52 capítulos, 9 selecionados) e estes foram organizados no Quadro 1:

Estes critérios são parte de uma pesquisa de mestrado em andamento. O *corpus* desta pesquisa é composto pelos livros do ICTMA publicados na última década.

Quadro 1 – Identificação dos capítulos selecionados.

Capítulo/ ICTMA	**Título do capítulo**	**Autores**
Capítulo 7 ICTMA16	Facilitating Mathematisation in Modelling by Beginning Modellers in Secondary School	Gloria Ann Stillman, Jill P. Brown, e Vince Geiger
Capítulo 13 ICTMA16	Problem Solving Methods for Mathematical Modelling	Gilbert Greefrath
Capítulo 15 ICTMA16	How Do Students Share and Refine Models Through Dual Modelling Teaching: The Case of Students Who Do Not Solve Independently	Takashi Kawakami, Akihiko Saeki, e Akio Matsuzaki
Capítulo 24 ICTMA16	Moving Beyond a Single Modelling Activity	Jonas B. Ärlebäck e Helen M. Doerr
Capítulo 28 ICTMA16	Modelling, Education, and the Epistemic Fallacy	Peter Galbraith
Capítulo 49 ICTMA16	A Mathematical Modelling Challenge Program for J.H.S. Students in Japan	Akira Yanagimoto, Tetsushi Kawasaki, e Noboru Yoshimura
Capítulo 50 ICTMA16	Modelling the Wall: The Mathematics of the Curves on the Wall of Colégio Arquidiocesano in Ouro Preto	Daniel Clark Orey e Milton Rosa
Capítulo 7 ICTMA17	The Primacy of 'Noticing': A Key to Successful Modelling	Peter Galbraith, Gloria Ann Stillman, e Jill P. Brown
Capítulo 13 ICTMA17	Ethnomodelling as the Mathematization of Cultural Practices	Milton Rosa e Daniel Clark Orey
Capítulo 18 ICTMA17	Context and Understanding: The Case of Linear Models	Jill P. Brown
Capítulo 20 ICTMA17	How Students Connect Mathematical Models to Descriptions of Real-World Situations	Dirk De Bock, Nele Veracx, e Wim Van Dooren
Capítulo 33 ICTMA17	Modelling as Interactive Translations Among Plural Worlds: Experimental Teaching Using the Night-Time Problem	Toshikazu Ikeda e Max Stephens
Capítulo 34 ICTMA17	The Dual Modelling Cycle Framework: Report on an Australian Study	Janeen Lamb, Akio Matsuzaki, Akihiko Saeki, e Takashi Kawakami
Capítulo 40 ICTMA17	Long-Term Development of How Students Interpret a Model: Complementarity of Contexts and Mathematics	Pauline Vos e Gerrit Roorda
Capítulo 48 ICTMA17	Mathematical Modelling in a Long-Distance Teacher Education in Brazil: Democratizing Mathematics	Daniel Clark Orey e Milton Rosa
Capítulo 51 ICTMA17	How to Build a Hydrogen Refuelling Station Infrastructure in Germany: An Interdisciplinary Project Approach for Mathematics Classrooms	Irene Grafenhofer e Hans-Stefan Siller

Fonte: os autores.

No processo analítico, assumimos uma atitude fenomenológica de acordo com Bicudo (2010, 2011), a fim de analisar aquilo que se mostra acerca dos tipos de modelos matemáticos.

Nas pesquisas que usam a fenomenologia há a tendência de suspender a visão a respeito do mundo de uma perspectiva natural para uma atitude fenomenológica, isto significa que ao investigarmos o fenômeno devemos deixar de lado os nossos 'pré-conceitos', o que carregamos conosco, teorias e pressupostos, visto que a atitude fenomenológica "é uma verdade esclarecedora, interpretada do fenômeno que se mostra ao inquiridor que o percebe" (KLÜBER; BURAK, 2008, p. 95).

Neste sentido não é possível estabelecer categorias *a priori*, visto que a interrogação da pesquisa tem o papel de conduzir os procedimentos metodológicos. Neste artigo, os procedimentos são conduzidos pela questão: *Que tipos de modelos matemáticos são evidenciados em atividades de modelagem matemática nos livros do ICTMA* (*International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications)?*

Neste contexto, a análise compreende, inicialmente, a descrição do fenômeno, ou seja, um relato, de modo direto, daquilo que foi visto, isto é, percebido (BICUDO, 2011). Em seguida, a partir das descrições, são destacadas *unidades de significado*, "os invariantes que fazem sentido para o pesquisador a partir da pergunta formulada" (KLÜBER; BURAK, 2008, p. 98).

Convergências entre as unidades de significado são, então, vislumbradas e estabelecidas pelo pesquisador por meio de uma leitura cuidadosa das mesmas para a partir delas transcender, ampliar, o campo de conhecimentos institucionalizado acerca do fenômeno investigado. Neste movimento partimos da "análise ideográfica, que apresenta as estruturas individuais, em direção à nomotética, que unifica as estruturas gerais" (BICUDO, 2000, p. 87). As convergências são organizadas em categorias abertas ou também conhecidas como núcleo de ideias.

A seguir apresentamos a análise de nossa investigação em que orientados por nossa interrogação seguimos os pressupostos da fenomenologia segundo a perspectiva de Bicudo (2011), o movimento de análise nos permite desvelar as individualidades manifestadas pelo fenômeno e evidenciar o que há de comum nelas, procurando por revelar generalidades.

ANÁLISE FENOMENOLÓGICA: DAS UNIDADES DE SIGNIFICADO À EMERGÊNCIA DOS TIPOS DE MODELOS MATEMÁTICOS

Para compor as unidades de significado, o primeiro passo proposto pela literatura em relação ao método fenomenológico é realizar a descrição do percebido:

> A descrição da experiência vivida constitui-se no ponto chave da pesquisa qualitativa que privilegia o fenômeno situado. [...] a descrição apenas relata, de modo direto, a experiência vivida por um sujeito em situação de vivenciar o fenômeno focado e destacado como importante em relação à interrogação formulada, está também interpretada como relevante no contexto da região de inquérito do pesquisador (BICUDO, 2011, p. 55-56).

Neste sentido, efetuamos as descrições dos capítulos como eles se mostram, sem referenciais teóricos prévios e, sem a interpretação prévia, procurando *ir à coisa mesma* como ela se mostra. A partir deste movimento e das várias leituras do material, nos debruçamos em constituir as unidades de significado. Este encaminhamento inicial da análise é denominado por Bicudo (2011) como análise ideográfica.

No processo analítico, a *análise ideográfica* consiste em destacar as ideias expressas na descrição constituindo as unidades de significado. A partir do percebido pelas unidades de significado, convergências e divergências de sentido permitem a realização da *análise nomotética* que evidencia generalidades por meio das asserções articuladas das unidades de significado que buscam explicitar a estrutura do fenômeno destacando-se os núcleos de ideias elaborados a partir da redução fenomenológica (BICUDO, 2011).

As Unidades de Significado (US) foram organizadas em quadros, como no Quadro 2, em que podemos visualizar o código da US, o excerto retirado dos capítulos e as asserções articuladas da US. A codificação foi necessária para auxiliar na visualização e composição dos núcleos de ideia, a US.1.1.16 é a primeira unidade de significado do capítulo um do ICTMA 16.

Quadro 2 – Quadro de análise ideográfica.

Código da US	**Unidade de Significado**	**Asserções Articuladas da US**
US.x.y.z	Excertos extraídos dos capítulos selecionados.	Os excertos retirados dos capítulos são reescritos na linguagem do pesquisador, explicitando o sentido da unidade de significado.

Fonte: Adaptado de Brito (2018, p. 101).

Segundo Klüber e Burak (2008, p. 97), “das Unidades de Significado o investigador constrói e expressa sua compreensão acerca do evidenciado”, deste modo são efetuadas sínteses escritas na linguagem do pesquisador, que são nomeadas de Asserções Articuladas e estas finalizam a etapa denominada de Análise Ideográfica.

No sentido de exemplificar como realizamos a análise ideográfica percorremos o seguinte caminho: nos inteiramos a respeito da atividade descrita em cada capítulo, como, por exemplo a atividade ilustrada na Figura 1; organizamos as unidades de significado e as asserções articuladas de cada capítulo alocando-as no quadro analítico, Quadro 3.

Figura 1 – Atividade sobre a previsão de população.

Previsão de População
População australiana supera 23 milhões esta noite (Atualizado 23 de abril de 2013, 10:55 AEST)
A população da Austrália chegará a cerca de 23 milhões de pessoas em algum momento hoje à noite, e os demógrafos dizem que estão no caminho certo para atingir 40 milhões até meados do século.
O Departamento Australiano de Estatísticas diz que a projeção é baseada na estimativa populacional do ano passado e leva em conta fatores como a taxa de natalidade do país, taxa de mortalidade e migração internacional.
Os números do ABS mostram que cerca de 180.000 pessoas se mudam para a Austrália a cada ano.
Estima-se que com um nascimento a cada 1 min e 44 s, um novo migrante chegando a cada 2 min e 19 s e uma morte a cada 3 min e 32 s, a marca de 23 milhões será atingida logo após as 22 h (AEST).
Isso significa que nossa população aumenta em uma pessoa a cada minuto e 23 s. Fonte: http://www.radioaustralia.net.au/international/2013-04-23/australian-population-to-top-23-million-tonight/1120164
Investigue a alegação de que "os demógrafos dizem que (a população) está no caminho certo para atingir 40 milhões até o meio do século". Quais são algumas implicações sociais?

Fonte: Galbraith (2015, p. 345).

Para esta atividade o autor apresenta três possíveis modelos matemáticos que solucionam essa situação e que podem dar suporte aos alunos para que respondam questões como por exemplo *quais são algumas implicações sociais que podem ocorrer devido ao crescimento da população?* O autor também faz uma breve análise utilizando os modelos matemáticos avaliando a validade das informações divulgadas pela mídia. Por meio da leitura das soluções descritas pelo autor para a atividade da Previsão de População, destacamos algumas unidades de significado em relação aos tipos de modelos matemáticos evidenciados (Quadro 3).

Quadro 3 – Análise Ideográfica do capítulo 28 do ICTMA 16.

Código da US	**Unidade de Significado**	**Asserções Articuladas da US**
US.1.28.16	Suponha, como sugere a reportagem, que os valores dados de nascimento, morte e taxas de imigração se apliquem no futuro. Deixe P_0 = população inicial (em 2013); Seja P_n = população no ano n Deixe $r = (b - d) =$ taxa de crescimento natural; Deixe I = ingestão líquida anual de imigração	Os valores dados de nascimento, morte e taxas de imigração se aplicam no futuro. Considere as seguintes variáveis: P_0 = população inicial (em 2013); P_n = população no ano n; $r = (b - d)$ = taxa de crescimento natural; I = ingestão líquida anual de imigração.
US.2.28.16	$P_0 = 23\,000\,000;\ b = 0{,}0132;$	$P_0 = 23\,000\,000;\ b = 0{,}0132;$

	$d = 0{,}00647;\ r = 0{,}000673; I = 227\ 032$ $P_1 = P_0 + r\,P_0 + I = P_0(1 + r) + I = P_0R + I$ (onde $R = 1 + r$) $P_2 = P_1R + I$ numa planilha copie e arraste $P_{40} = 40\ 459\ 252$	$d = 0{,}00647;\ r = 0{,}000673; I = 227\ 032$ $P_1 = P_0 + r\,P_0 + I = P_0(1 + r) + I = P_0R + I$ (onde $R = 1 + r$) $P_2 = P_1R + I$ desenvolvendo até $P_{40} = 40\ 459\ 252$
US.3.28.16	$P_n = P_0\,R^n + I\,(R^{n-1} + \ldots R^2 + R + 1)$ $P_n = P_0\,R^n + I\,(R^n - 1)/(R - 1);$ $P40 = 40\ 459\ 252$	A situação de crescimento populacional pode ser modelada por meio de uma série geométrica: $P_n = P_0\,R^n + I\,(R^{n-1} + \ldots R^2 + R + 1)$
US.4.28.16	$\frac{dP}{dt} = Pr + I$ $P(t) = P_0e^{rt} + I(e^{rt} - 1)/r$ onde $P_0; P_{40} = 40\ 526\ 191$	Uso da Equação Diferencial Ordinária $\frac{dP}{dt} = Pr + I$ para modelar a situação

Fonte: os autores.

Este movimento de análise foi realizado para todos os capítulos. Após destacarmos as unidades de significado dos 16 capítulos e as asserções articuladas, no movimento de reduções sucessivas, buscamos a transcendência dos aspectos individuais da *análise ideográfica*, isto é, procuramos identificar as convergências que revelam a estrutura do fenômeno investigado.

Tomando os casos individuais como casos mais gerais, a busca pelas convergências torna-se necessária para que seja possível a elaboração dos Núcleos de Ideias, a discussão realizada por meio destes núcleos busca responder à questão de investigação.

Os Núcleos de Ideias desvelados foram nomeados como: *modelos já convencionados para determinadas situações*; *modelos algébricos com variáveis discretas*; *modelos algébricos com variáveis contínuas*; *modelos geométricos*; *modelos aritméticos*. A seguir nas Figuras de 2 a 6, apresentamos os Núcleos de Ideias compostos pelas Unidades de Significado e a discussão destes em relação aos modelos matemáticos.

O Núcleo de Ideias *modelos já convencionados para determinadas situações* (Figura 2) diz respeito a modelos matemáticos existentes na literatura, desenvolvidos para modelar situações específicas, como as Leis de Newton, equações do movimento uniforme variado, equação paramétrica de movimento de projéteis e modelos de crescimento populacional.

Figura 2 – Núcleo de ideias: modelos já convencionados para determinadas situações.

	Código	Asserções articuladas da US
MODELOS JÁ CONVENCIONADOS PARA DETERMINADAS SITUAÇÕES	**US.2.7.16**	O grupo fez uso de conceitos da física relacionados ao movimento de projeteis para construir seu modelo de movimento do carro saltando.
	US.3.7.16	Para modelar a situação os alunos utilizaram as equações paramétricas do movimento retilíneo uniforme.
	US.4.7.16	Equação paramétrica do movimento retilíneo uniforme. $x(t) = (v.cos\theta)\, t - \frac{0,32\, (v.cos\theta)^2}{1,460}\, t^2$ $y(t) = (v.sen\theta)\, t - \left(4,9 - \frac{0,32\, (v.sin\theta)^2.\, t^2}{1,460}\right) t^2$
	US.5.7.16	Para resolver esta equação os alunos utilizaram o programa de computador *TI-Nspire*.
	US.3.7.17	Tendo identificado separadamente o movimento do projétil como um modelo apropriado, a maioria das equipes começou a resolução sem considerar qualquer correção para resistência do ar (para um objeto tão grande).
	US.4.7.17	$S_y = u_y t + \frac{1}{2} a t^2$ $S_x = u_x t$

Fonte: os autores.

As unidades de significado (US.2.7.16, US.3.7.16, US.4.7.16, US.3.7.17, US.4.7.17) convergem para o núcleo de ideais *modelos já convencionados para determinadas situações*. Os modelos matemáticos deste núcleo são, frequentemente, usados em diferentes áreas do conhecimento e foram desenvolvidos por meio de estudos que tinham como propósito descrever, explicar, analisar, interpretar fenômenos físicos, biológicos, químicos, entre outros. Um exemplo deste tipo de modelo matemático que foi evidenciado nas unidades de significado (US.4.7.16, US.3.7.17, US.4.7.17) e é denominado na literatura como equações do movimento retilíneo uniforme.

O núcleo de ideias *modelos algébricos com variáveis discretas* (Figura 3), trata de modelos matemáticos expressos em linguagem algébrica que envolvem variáveis discretas. Em determinadas situações este tipo de modelo pode ser adequado, como, por exemplo, para crescimentos populacionais (US.1.28.16, US.2.28.16, US.3.28.16).

Figura 3 – Núcleo de Ideias: modelos algébricos com variáveis discretas.

MODELOS ALGÉBRICOS COM VARIÁVEIS DISCRETAS	Código	Asserções articuladas da US
	US.2.28.16	$P_0 = 23\,000\,000;\ b = 0{,}0132;\ d = 0{,}00647;$ $r = 0{,}000673; i = 227\,032$ $P_1 = P_0 + r\,P_0 + I = P_0(1+r) + I = P_0R + I$, (onde $R = 1 + r$) $P_2 = P_1R + I$ numa planilha copie e arraste $P_{40} = 40\,459\,252$
	US.3.28.16	Solução por meio da série geométrica: $P_n = P_0\,R^n + I\,(R^{n-1} + \ldots R^2 + R + 1)$ $P_n = P_0\,R^n + I\,(R^n - 1)/(R - 1);$ $P40 = 40\,459\,252$

Fonte: os autores.

Este núcleo de ideias (Figura 3), é constituído por meio da convergência de unidades de significado que apresentam modelos matemáticos discretos, tais como progressões aritméticas (US.2.28.16) e progressões geométricas (US.3.28.16) produzidos por recursividade. Esse tipo de modelo matemático pode ser útil tanto para modeladores profissionais, quanto para atividades de modelagem matemática no contexto escolar.

O Núcleo de Ideias denominado *modelos algébricos com variáveis contínuas* (Figura 4), diz respeito a modelos matemáticos desenvolvidos para modelar situações cujas variáveis assumem valores em um intervalo I, sendo I um subconjunto dos números reais.

Figura 4 – Núcleo de Ideias: modelos algébricos com variáveis contínuas.

MODELOS ALGÉBRICOS COM VARIÁVEIS CONTÍNUAS	Código	Asserções articuladas da US
	US.2.18.17	Na finalidade de determinar o custo de cada paciente de um hospital pequeno, Kate propõe o modelo matemático: $C = 17.50n + 390$
	US.1. 20.17	A parte de modelagem consistia em oito itens nos quais uma situação do mundo real era descrita em palavras e os participantes tinham que conectá-los com um modelo apropriado que poderia ser proporcional (da forma $y = ax$), afim com inclinação positiva ($y = ax + b$ com $a > 0$), afim com inclinação negativa ($y = ax + b$ com $a < 0$) ou proporcionalmente inversa ($y = \frac{a}{x}$). Cada modelo foi apropriado para dois dos oito itens ou situações indicadas.
	US.2.20.17	Dada a natureza dicotômica da variável dependente (isto é, uma determinada alternativa é escolhida ou não), uma regressão logística, modelando a probabilidade de uma resposta correta, dependendo do tipo de modelo (proporcional, proporcionalmente inversa ou afim com inclinação positiva ou negativa) e a condição (primeira modelagem e modelagem inversa ou vice-versa), é apropriada.
	US.1.33.17	A noite y (horas) na latitude x (ºN) pode ser estimada e investigada pela observação no mundo real, e usando um globo, desenhando/medindo figuras geométricas, construindo uma fórmula e criando um gráfico envolvendo x e y.

	US.2.33.17	É necessário desenvolver e familiarizar-se com um modelo funcional usando trigonometria. Este é o mundo operacional simbólico que nos permite considerar o fenômeno algebricamente.
	US.3.33.17	O tempo noturno y (horas) é formulado usando latitude norte x como segue $$y = \frac{2}{15}\cos^{-1}\{\tan(23{,}4)\,.\tan x\}$$
	US.1.40.17	A atividade proposta tinha como finalidade análise do modelo: $$\frac{V(a+h)-V(a)}{h}$$
	US.1.48.17	Os estudantes consideraram que as pessoas, no Brasil, usam o transporte público duas vezes ao dia e 24 dias por mês. Com base nisso eles formularam o seguinte modelo matemático. $$TP = \frac{PCI.\,0{,}07}{48}$$ Sendo TP o preço do ticket e PCI a renda per capita.
	US.1.49.16	Utilizando ajuste de curvas um grupo de formulou o seguinte modelo: $$y = 0{,}15x^2 + 0{,}3$$ E outro grupo: $$y = 0{,}164x^2 + 0{,}25$$
	US.1.50.16	A partir de uma fotografia de um muro com curvas, o modelador da atividade procurou analisar qual curva era a mais adequada para representar a construção arquitetônica, uma parábola ($y = x^2$), o gráfico de uma função cosseno hiperbólica ($y = \cosh(x)$) e catenária $\left(y = \frac{\cosh(x)-1}{\cosh(1)-1}\right)$.

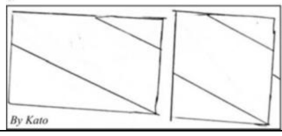
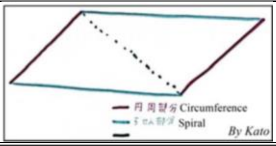
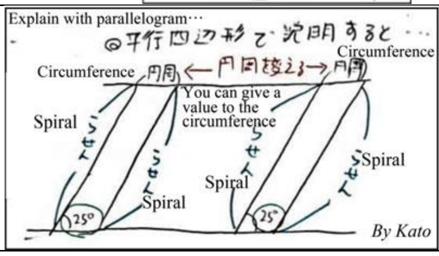
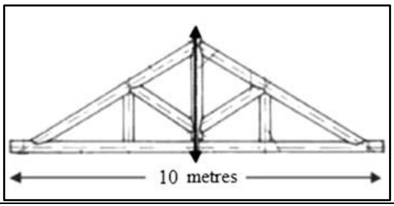
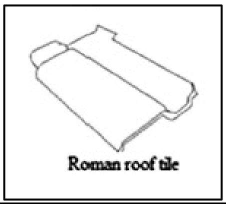
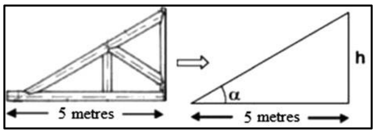
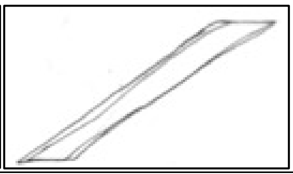
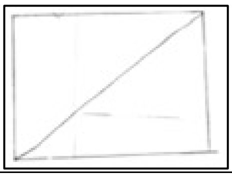
Fonte: os autores.

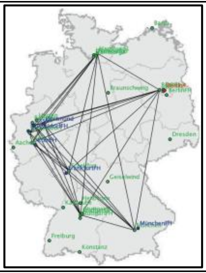
Os modelos matemáticos deste Núcleo de Ideias (Figura 4) são, de modo geral, funções, relações entre duas variáveis. Nas unidades de significado deste núcleo, são evidenciados modelos matemáticos, que apresentam uma relação entre dois conjuntos e, abrangem todos os elementos de um domínio associando-os a somente um elemento do conjunto imagem. Em particular, nos casos descritos nas unidades de significado acima, estes conjuntos assumem variáveis contínuas para intervalos pertencentes ao conjunto dos números reais.

Podemos citar como exemplos destes modelos as funções do tipo proporcionalmente inversas ou afim (US.2.18.17, US.1.20.17, US.1.48.17), funções quadráticas (US.1.49.16, US.1.50.16), funções trigonométricas (US.1.50.16, US.3.33.17) e taxas de variação média (US.1.40.17).

O núcleo de ideias nomeado *modelos geométricos* (Figura 5) é constituído pelas unidades de significado que dizem respeito à construção de modelos geométricos para: visualização de um fenômeno físico; interpretação de formas geométricas e gráficos para resolução de uma situação; desenvolvimento de experimentos complexos que podem ocorrer na vida real.

Figura 5 – Núcleo de Ideias: modelos geométricos.

	Código	Asserções articuladas da US
MODELOS GEOMÉTRICOS	**US.2.15.16**	É impossível abrir um tanque de óleo ao longo do corrimão espiral na vida real. Em vez disso, podemos pegar um tubo de papel higiênico com formato semelhante a um tanque de óleo, que deve ser aberto ao longo de sua fenda. Considere o que seria a forma de um tubo de papel higiênico aberto. 
	US.3.15.16	O professor trouxe tubos de papel higiênico para os alunos e eles fizeram modelos de paralelogramos 2D na tarefa. 
	US.4.15.16	A construção de modelos geométricos foi realizada pelos alunos com o intuito de visualizar um fenômeno físico, de modo que essa visualização pode oferecer uma interpretação para determinar a solução da situação. 
	US.5.15.16	Kawa aceitou o modelo de retângulo de Kob e o modelo de paralelogramo de Matsu porque ela podia aceitar a estrutura matemática de ambos os modelos. Além disso, ela concluiu a tarefa OT através do modelo de retângulo e modelo de paralelogramo, e generalizou-a por este último.
	US.4.13.17	Procedimentos dos homens (pedreiros) usados pelos alunos $H = \frac{altura\ da\ casa}{2}.porcentagem\ de\ inclinação\ da\ telha$  
	US.5.13.17	Procedimento acadêmico usado pelos alunos $tan \propto = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$ $tan \propto = \frac{altura\ da\ empena}{metade\ da\ medida\ horizontal\ do\ telhado}$ 
	US.2.34.17	Os alunos construiram modelos geométricos para visualizar a planificação de um tanque de óleo de formato cilindrico, sendo que isto foi necessário para solucionar a situação que lhes foi proposta.   

	US.1.51.17	A distância euclidiana entre uma cidade e uma localização arbitrária pode ser calculada por $l_2(S_{xm}, X) = \sqrt{(a_{11} - x_{11})^2 + (a_{12} - x_{12})^2}$ 
	US.2.51.17	Deve ser determinado o mínimo da seguinte função localização-instalação, que busca um local que minimize a distância máxima para os locais: $g\ (X) := \max_{1 \leq m \leq M} l_2(S_{xm}, X)$.
	US.3.51.17	A localização mínima como resultado do problema de localização da instalação produz $min_{X \in c g}(X) := \{175;\ 130{,}5\} = 130{,}5\ km =\ l_2\ (S_{x3}, X_2)$. A localização ideal seria, portanto, Hof com uma distância euclidiana máxima de 130,5 km.
	US.1.24.16	Dado o gráfico de posição, os alunos construiram gráficos de aceleração quanto gráficos de velocidade, começando a separar as diferenças estruturais e semelhantes entre aceleração e velocidade.

Fonte: os autores.

De modo geral, os modelos geométricos podem ser utilizados nas resoluções de atividades de modelagem matemática, cujos temas tratam, por exemplo, de otimização de espaços geométricos, em que o objetivo é encontrar uma localização ideal para instalação de um serviço, um hospital, um aeroporto, dentre outros (US.1.51.17, US.2.51.17, US.3.51.17). Para estudar e analisar conceitos da Geometria (US.4.13.17, US.5.13.17) e, as implicações da variação do diâmetro de uma circunferência em relação ao comprimento desta. Ou ainda, para planificar e analisar estruturas do mundo material, como por exemplo um tanque de petróleo (US.2.15.16, US.3.15.16, US.4.15.16, US.2.34.17). Além disso, há atividades de modelagem que solicitam que o modelador faça análises de representações gráficas (US.1.24.16).

Em relação ao Núcleo de Ideias de *modelos aritméticos* (Figura 6), as unidades de significado apresentam resoluções cujas expressões foram escritas em linguagem aritmética. Esta ocorrência foi evidenciada em registros de resoluções de alunos do nível de escolaridade dos anos iniciais.

Figura 6 – Núcleo de Ideias: modelos aritméticos.

	Código	Asserções articuladas da US
MODELOS ARITMÉTICOS	US.2.13.16	Quando escovo os dentes preciso de água para enxaguar a boca. Mas se eu deixar a água correr enquanto estou escovando, estou perdendo água. Eu deveria medir o montante e adicioná-lo. Cinco copos de água fluíram pela torneira. Cinco xícaras são cerca de 1 litro. Há 365 dias em um ano, que faz então 365 litros.
	US.4.13.16	Eu bebo 2 litros de água todos os dias, então eu calcularia $2L.7$; Toda semana eu bebo cerca de 14 litros, e a cada dia cerca de 2litros.

Fonte: os autores.

Por meio deste núcleo de ideias podemos observar que o uso de modelos aritméticos ocorreu com a finalidade de estudar os números e as operações básicas (US.2.13.16, US.4.13.16), além disso as situações-problema dadas aos alunos cuja solução recorre ao uso destes tipos de modelos solicitam uma resposta numérica.

A próxima seção deste artigo apresenta uma breve discussão dos resultados e uma reflexão em torno da interrogação de pesquisa.

Discussão e Considerações Finais

Neste artigo, buscamos destacar aquilo que se manifesta ao olharmos para os modelos em atividades de modelagem matemática em um recorte nas duas últimas edições do livro ICTMA. Por meio da análise fenomenológica realizada e sempre orientados pela interrogação de pesquisa *que tipos de modelos matemáticos são evidenciados em atividades de modelagem matemática nos livros do ICTMA* (*International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications)*? Neste sentido, cinco núcleos de ideias emergiram neste estudo: *modelos já convencionados para determinadas situações*; *modelos algébricos com variáveis discretas*; *modelos algébricos com variáveis contínuas*; *modelos geométricos*; *modelos aritméticos*. Por meio da análise ideográfica evidenciamos os aspectos individuais do fenômeno para que na análise nomotética fosse possível partir para uma generalização que busca a essência[2] desse fenômeno.

Neste sentido, os nomes atribuídos aos núcleos de ideias que emergiram no movimento de análise, respondem a nossa interrogação. Podemos concluir que os tipos de modelos matemáticos evidenciados em atividades de modelagem matemática nos livros do ICTMA,

[2] Ver Giorgi (2014, p. 395-397).

podem ser modelos convencionados para determinadas situações, modelos algébricos com variáveis discretas, modelos algébricos com variáveis continuas, modelos geométricos e modelos aritméticos.

O modelo matemático pode ser a solução para a atividade de modelagem matemática, bem como um ponto de partida para dar uma resposta à situação-problema proposta nas atividades. Neste sentido, cada situação modelada requer modelos matemáticos específicos e estes ora podem ser algébricos, ora geométricos, ora aritméticos, dentre outros.

Segundo Bassanezi (2002) para cada tipo de contexto, de fenômeno ou de situação estudada na atividade de modelagem matemática as especificidades dos modelos matemáticos assumem características relacionadas à matemática ou à situação.

O mesmo autor pontua que há tipos de modelos matemáticos: *Linear* e *não-linear*; *Estático*, quando representa a forma do objeto, por exemplo modelo geométrico; *Dinâmico*, quando simula variações expressas nos fenômenos; *Educacional*, quando simplificações são necessárias para a obtenção de soluções analíticas; *Aplicativo*, baseado em hipóteses realísticas com interrelações de um grande número de variáveis e parâmetros; *Estocástico* ou *Determinístico*, de acordo com o uso ou não de fatores aleatórias nas equações.

Por meio de nossa investigação percebemos que os diferentes tipos de modelos matemáticos desvelados podem ter relações com o ensino e a aprendizagem de Matemática. De modo geral, todos os tipos de modelos matemáticos evidenciados nas atividades de modelagem matemática tinham um fim educacional, seja para aprendizagem de conceitos matemáticos ou por exemplo, para a discussão do uso de diferentes procedimentos matemáticos em uma determinada sociedade.

Agradecimentos

Agradeço à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo apoio financeiro no desenvolvimento da pesquisa.

Referências

BASSANEZI, R. C. **Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática**. 3ª ed. São Paulo: Editora Contexto, 2002.

BICUDO, M. A.V. A pesquisa qualitativa fenomenológica à procura de procedimentos rigorosos. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Fenomenologia**: confrontos e avanços. 1ª ed. São Paulo: Cortez, 2000. p.71-102.

BICUDO, M. A. V. Filosofia da Educação Matemática segundo uma perspectiva fenomenológica. In: **Filosofia da Educação Matemática**: Fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas. 1ª ed. São Paulo: UNESP, 2010. p. 23-47.

BICUDO, M. A. V. **Pesquisa qualitativa segundo a visão fenomenológica**. 1ª ed. São Paulo: Cortez, 2011.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Proposta preliminar. Terceira versão revista. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br /documentos/bncc-2versao.revista.pdf>. Acesso em: 23 mar. 2017.

BRITO, D. dos S. **Aprender Geometria em Práticas de Modelagem Matemática**: Uma Compreensão Fenomenológica. 2018. 205 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

DOERR, H. M.; ÄRLEBÄCK, J.B.; MISFELDT, M. Representations of Modelling in Mathematics Education. In: Stillman G., Blum W., Kaiser G. (Eds.). **Mathematical Modelling and Applications**: International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling. Suiça: Springer, Cham, 2017. p. 71-82.

GALBRAITH, P. Modelling, Education, and the Epistemic Fallacy. In: Stillman G., Blum W., Salett Biembengut M. (Eds.). **Mathematical Modelling in Education Research and Practice**: International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling. Suiça: Springer, Cham, 2015. p. 339-350.

KLÜBER, T. E; BURAK, D. A fenomenologia e suas contribuições para a Educação Matemática. **Práxis Educativa**, Ponta Grossa, v. 3, n. 1, p. 95-99, jan.-jun. 2008.

NISS, M. Models and modelling in mathematics education. **Mathematics Education**, EMS Newsletter, 2012, p. 49-52.

PERRENET, J.; ZWANEVELD, B. The Many Faces of the Mathematical Modeling Cycle. **Journal of Mathematical Modelling and Application**, v. 1, n. 6, p. 3-21, 2012.