A MOBILIZAÇÃO DE CONCEITOS DO CÁLCULO NA CONSTRUÇÃO DE MODELOS MATEMÁTICOS PARA SUPERFÍCIES

Daniela Barbieri Vidotti
Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR)/Universidade Estadual de Maringá (UEM)
dnbarbieri@hotmail.com

Priscila Amara Patricio de Melo
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)/Universidade Estadual de Maringá
pri.pmelo@gmail.com

Lilian Akemi Kato
Universidade Estadual de Maringá (UEM)
lilianakemikato@gmail.com

RESUMO

Considerando a Modelagem Matemática como uma estratégia para o ensino de Matemática, nesse trabalho, descrevemos e refletimos acerca de uma experiência realizada com discentes de graduação em Matemática e Física em um minicurso de extensão numa universidade pública paranaense. Foi utilizado problemas de volume e área de superfícies com o intuito de aplicar conceitos já estudados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral e objetivando mobilizar conhecimentos e habilidades dos acadêmicos nessa componente curricular. Por meio da atividade desenvolvida foi possível perceber diferentes maneiras de abordar um conteúdo matemático bem como estabelecer relações existentes entre diversos conceitos e como a Modelagem Matemática pode ser útil nesse processo, possibilitando a quebra da linearidade na abordagem de conteúdos e favorecendo o resgate dos conhecimentos dos alunos, a tomada de decisões e a validação dos resultados.

Palavras-chave: Ensino de Cálculo; Integral; Volume.

INTRODUÇÃO

O Cálculo Diferencial e Integral (CDI) constitui parte do currículo de diversos cursos superiores das universidades brasileiras, de modo que, o ensino dessa disciplina tem sido objeto de estudo de muitos pesquisadores da Educação Matemática, visto as dificuldades, os resultados insatisfatórios e os altos índices de reprovação associados a ela (CURY; CASSOL, 2004; FONSECA, 2016).

Nesse sentido, estudos relacionados à prática da Modelagem Matemática[1] nas aulas de CDI à luz do olhar teórico e metodológico de diversas teorias educacionais e direcionados à melhoria do processo de ensino-aprendizagem dessa disciplina têm alcançado resultados positivos, como exemplo, podemos citar os trabalhos de Borssoi (2004), Vertuan (2007), Santos (2008) e Barros (2017).

Nesse trabalho, descrevemos e buscamos refletir sobre uma atividade de Modelagem desenvolvida no minicurso intitulado "Um estudo das funções de várias variáveis por meio da Modelagem Matemática" ministrado na XXVIII Semana da Matemática, realizada pela Universidade Estadual de Maringá (UEM), no ano de 2017, no qual assumiu-se como objetivo mobilizar conhecimentos e habilidades dos acadêmicos na área de CDI.

A ideia do minicurso surgiu dos anseios e inquietações da nossa prática docente com ensino de Matemática no Ensino Superior e as atividades foram preparadas com base no trabalho de doutorado, em andamento, da primeira autora. Na pesquisa, a autora investiga sobre os erros cometidos por licenciandos em Matemática na aprendizagem de conteúdos relacionados ao CDI em várias variáveis.

A escolha da Modelagem nesse trabalho justifica-se por possibilitar a abordagem de problemas do cotidiano do aluno e, assim, dar mais significado aos conteúdos matemáticos estudados e também por permitir um trabalho colaborativo entre alunos e professores tornando-os responsáveis pela construção do próprio conhecimento.

No que segue, apresentamos uma breve fundamentação teórica sobre a Modelagem, descrevemos os procedimentos adotados, relatamos o desenvolvimento da atividade e por fim tecemos considerações sobre os resultados alcançados.

A CONCEPÇÃO DE MODELAGEM MATEMÁTICA ASSUMIDA

A Modelagem foi empreendida nesse trabalho como estratégia de ensino-aprendizagem de Cálculo Diferencial Integral. Com isso, conforme assegura Bassanezi (2013), aspiramos combinar aspectos lúdicos da matemática com o seu potencial de aplicações. De acordo com esse autor "a modelagem matemática consiste na arte de

[1] O termo Modelagem será utilizado no texto referindo-se a Modelagem Matemática no âmbito da Educação Matemática.

transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real (Bassanezi, 2013, p. 16)". Nesse sentido, é vista como um processo que associa teoria e prática quando se deseja entender alguma porção da realidade a qual o indivíduo está inserido.

Esse processo envolve a obtenção de um modelo matemático, isto é, "um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado (Bassanezi, 2013, p. 20)". Assim, na Modelagem Matemática, trabalha-se com aproximações da realidade, visto que os modelos são representações de um sistema, e por isso, considera-se sempre haver imprecisões que podem ser maiores ou menores dependendo de diversos fatores que compõem o sistema.

No sentido de descrever e/ou orientar a sua prática, Bassanezi (2013) sugere algumas etapas que podem ser seguidas pelo modelador: experimentação, abstração, resolução, validação, modificação e aplicação. De acordo com o autor, essas etapas, constituídas na Modelagem Matemática enquanto um método de pesquisa da matemática aplicada, não são lineares e nem inflexíveis quando desenvolvidas em situações de ensino-aprendizagem, pois, nesse caso, o processo percorrido pelos sujeitos é mais importante que o modelo final obtido, visto que o principal objetivo é aprender enquanto o fenômeno estudado serve como cenário motivador.

O planejamento de uma atividade de Modelagem para a sala de aula envolve uma série de questões tais como: Qual o tempo necessário para desenvolver a atividade? Quais tarefas serão atribuídas aos alunos? O tema será escolhido pelo aluno ou professor? O problema será delimitado pelo professor ou em conjunto com os alunos? E os dados serão levantados por quem? Diante dessas questões, o professor pode se sentir inseguro na implementação de uma atividade de Modelagem em sala de aula. Nesse sentido, Barbosa (2001, 2004) apresentou alguns direcionamentos que se configuram como um quadro de possibilidades que ele denominou de "casos", o qual segue exposto no Quadro 1:

Quadro 1 - Tarefas no processo de Modelagem

	Caso 1	**Caso 2**	**Caso 3**
Elaboração da situação-problema	Professor	Professor	professor/aluno
Simplificação	Professor	professor/aluno	professor/aluno
Dados qualitativos e quantitativos	Professor	professor/aluno	professor/aluno
Resolução	professor/aluno	professor/aluno	professor/aluno

Fonte: Barbosa (2001, 2004)

Do caso 1 ao caso 3 as tarefas vão sendo mais compartilhadas com os alunos e a duração de tempo da atividade vai aumentando, visto a flexibilidade das escolhas. Dependendo dos objetivos da aula e do tempo disponível, o professor deve definir a melhor forma de implementar a atividade. Em nosso minicurso, a primeira atividade esteve mais alinhada ao caso 1 e a segunda atividade ao caso 2.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

A atividade descrita a seguir, foi desenvolvida em um minicurso ministrado pelas autoras desse trabalho na XXVIII Semana da Matemática, realizada pela Universidade Estadual de Maringá, no ano de 2017, intitulado “Um estudo das funções de várias variáveis por meio da Modelagem Matemática”. O público-alvo eram alunos de graduação que já tivessem cursado a disciplina de Cálculo Diferencial Integral II (CDI II), ou outra disciplina que abordasse os conteúdos de funções de várias variáveis reais e integrais múltiplas, pois esses temas seriam abordados no minicurso.

Entretanto, por conta de um problema técnico no ato das inscrições, no momento da implementação constatamos que apenas três dos 22 inscritos já haviam integralizado a disciplina de CDI II. No Quadro 2 apresentamos o período e o curso em que cada participante estava matriculado, já distribuídos nos grupos que foram constituídos para a realização das atividades do minicurso.

Quadro 2 – Sujeitos da pesquisa.

Grupos	Nº de acadêmicos	Período/Curso
Grupo 1	4, codificados por A1; B1; C1; D1	1º ano/Física; 1º ano/Física; 2º ano/Física; 3º ano/Física
Grupo 2	4, codificados por A2; B2; C2; D2	1º ano/Física; 1º ano/Física; 1º ano/Matemática; 1º ano/Matemática
Grupo 3	5, codificados por A3; B3; C3; D3; E3	1º ano/Matemática; 2º ano/Física; 2º ano/Física; Bacharel/ Matemática; Licenciada/Matemática-Mestranda/Bioestatística
Grupo 4	6, codificados por A4; B4; C4; D4; E4; F4	2º ano/Matemática (todos)
Grupo 5	3, codificados por A5, B5, C5	1º ano/Matemática; 1º ano/Matemática; 3º ano/Ensino Médio

Fonte: As autoras.

Assim, verificamos que haviam 9 alunos cursando a disciplina de CDI II (matriculados no 2º ano de Matemática ou Física) e estes tiveram contato com as funções de várias variáveis, mas não conheciam as integrais múltiplas; 9 alunos estavam cursando CDI I (matriculados no 1º ano de Matemática ou Física); e uma participante não estava matriculada no Ensino Superior e não teve nenhum contato com os conteúdos de CDI.

Em vista disso, à medida em que desenvolvíamos as atividades, nos preocupávamos em introduzir os conceito de quádricas, funções de várias variáveis, integral definida, coordenadas polares, integral dupla, mas sempre de forma sucinta e objetiva, devido ao curto período de tempo que dispomos.

O minicurso teve duração de 8 horas/aulas e foi organizado da seguinte forma: iniciamos com uma breve introdução à Modelagem a partir da concepção e encaminhamentos propostos por Bassanezi (2013); desenvolvemos duas atividades de Modelagem: a atividade do copo e a atividade da laranja; e finalizamos expondo outras atividades desenvolvidas pelas autoras relacionadas ao ensino de CDI. A primeira atividade, sobre a construção de um modelo matemático para a superfície de um copo, foi adaptada de Vidotti e Kato (2017) e não será descrita nesse relato, porque atribuímos às ministrantes a maior parte das ações durante o seu desenvolvimento e também por ter se dado de forma bastante semelhante ao que foi descrito no trabalho citado.

A segunda atividade, sobre o volume da laranja, foi adaptada de Bassanezi (2013) e teve seus encaminhamentos mais alinhados ao "caso 2" da configuração de Barbosa (2004), pois a elaboração do problema foi feita pelas ministrantes, mas todas as outras ações foram compartilhadas entre professoras e alunos, o que favoreceu o surgimento de diferentes estratégias de simplificação e resolução do problema. Na próxima seção descrevemos o seu desenvolvimento em cada um dos grupos.

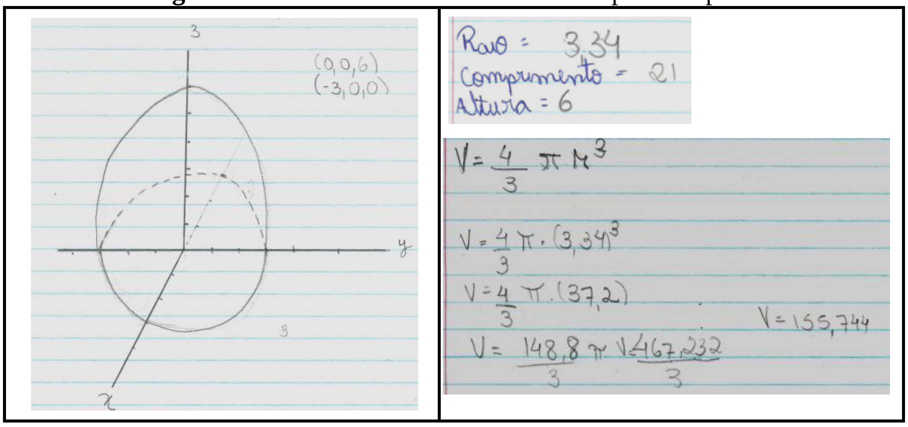
DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE PROPOSTA

Disponibilizamos aos participantes algumas laranjas e propusemos que eles encontrassem possíveis maneiras para estimar a quantidade de suco contida nelas, ou seja, calcular o seu volume, de preferência utilizando conhecimentos de CDI. Também ficaram a disposição deles réguas e barbantes para auxiliar a verificação das medidas e alguns livros de Cálculo e Geometria Analítica para consulta: Stewart (2010) e Leithold (1994).

Inicialmente os estudantes compararam a laranja com uma esfera, mas logo perceberam que o elipsoide também seria um modelo matemático apropriado para representar a laranja. Assim, os grupos 1 e 5 optaram pela esfera, e suas ações serão descritas à frente. Os outros grupos optaram pela elipse.

O **grupo 5** permaneceu com a ideia da esfera, embora tenha observado dois diâmetros distintos, sendo que um deles foi denominado de altura (igual a 6 cm) e o outro forneceu um raio igual a 3,34 cm. Desse modo, utilizaram a fórmula do volume da esfera $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ e assumindo $r = 3{,}34$ obtiveram o valor de $155{,}744\ \text{cm}^3$. Embora não tenham utilizado a representação gráfica para resolver o problema, observamos que o grupo desenhou uma representação equivocada da esfera no espaço tridimensional, conforme pode ser visualizado na Figura 1. No eixo das cotas, o traço da esfera foi feito com medida de 6 unidades, enquanto o centro da esfera foi colocado na origem do sistema.

Figura 1 – Recortes da atividade realizada pelo Grupo 5.



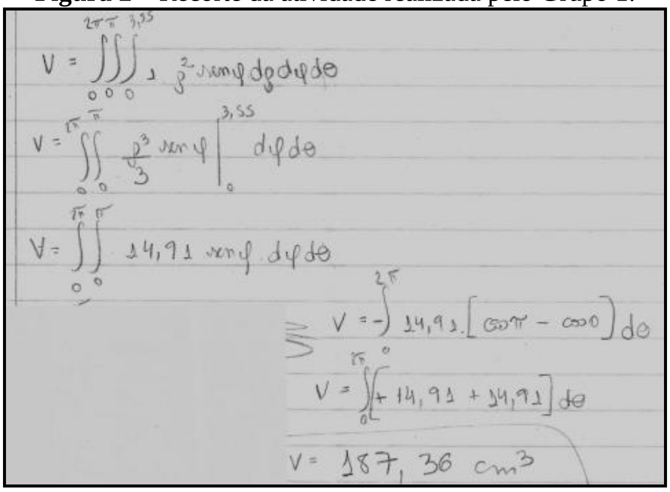
Fonte: Registro dos estudantes.

A representação de sólidos geométricos, como a esfera, o elipsoide e o cone, no espaço tridimensional foi um assunto abordado durante o minicurso, no momento da socialização dos grupos e pelas ações realizadas na lousa pelas ministrantes, e acreditamos que essa noção constituiu uma contribuição valiosa para o grupo 5 que apresentou essa dificuldade.

O **grupo 1** também utilizou o modelo matemático da esfera para representar a laranja, entretanto, valeu-se das integrais triplas em coordenadas esféricas para calcular o volume, influenciados pela aluna D1 do 3º ano de Física, que já havia estudado este conteúdo no curso. Após verificar o raio $(r = 3{,}55 \text{ cm})$ e a altura $(h = 6{,}8 \text{ cm})$ da laranja, escreveu a equação da esfera $x^2 + y^2 + z^2 - (3{,}55)^2 = 0$. Porém equivocou-se ao montar a integral tripla, pois considerou $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 12{,}6$ na fórmula $V = \iiint\limits_E f(x, y, z)\rho^2 sen(\theta) drd\varphi d\theta$ e utilizou a seguinte conversão para coordenadas esféricas: $z = \rho\cos\theta$, $x = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta$, $y = \rho\cos\varphi \operatorname{sen}\theta$. Assim, observamos que o primeiro erro cometido ao montar a integral tripla foi tentar colocar uma representação matemática do objeto estudado (a esfera) no integrando. Esse mesmo tipo de erro pôde ser observado em Vidotti e Kato (2017), em uma atividade em que se calculou o volume de um copo, utilizando integrais duplas.

Observando essa dificuldade orientamos o grupo a rever no livro didático disponibilizado durante o minicurso a relação entre o cálculo de volumes dos sólidos e integrais triplas. Em seguida, com o nosso auxílio, foi obtida a seguinte integral $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{3,55} \rho^2 \operatorname{sen}\varphi d\rho d\varphi d\theta$ que resultou no volume desejado, $V = 187{,}36 \text{ cm}^3$. Esse cálculo pode ser visualizado na Figura 2.

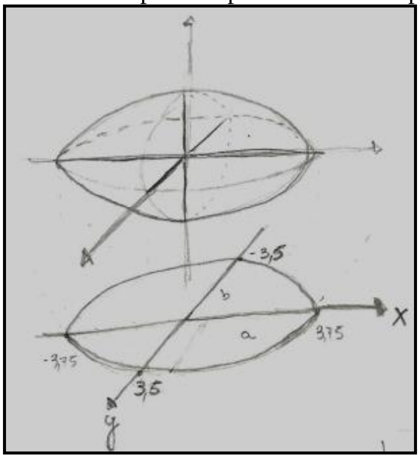
Figura 2 – Recorte da atividade realizada pelo Grupo 1.



Fonte: Registro dos estudantes.

O **grupo 2**, decidiu usar o modelo matemático do elipsoide de revolução para representar a laranja e para calcular o volume aplicaram a integral definida utilizando os seus conhecimentos de CDI em uma variável. As medidas $D = 7,5$ cm e $d = 7$ cm obtidas na laranja, foram usadas para construir uma elipse no plano *xy*, cujo eixo maior de medida *D* foi representado no eixo das abscissas, o eixo menor de medida *d* foi representado no eixo das ordenadas e o centro na foi situado na origem do sistema, conforme ilustrado na Figura 3.

Figura 3 – Gráfico da elipse e elipsoide realizado pelo grupo 2.

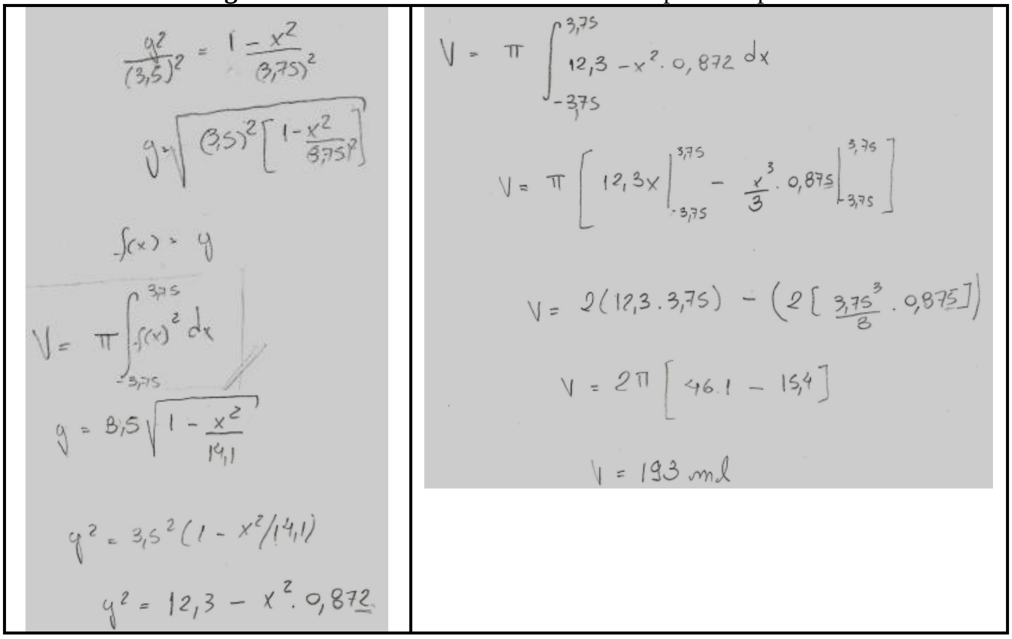


Fonte: Registros dos estudantes.

Desse modo, encontraram a seguinte equação da elipse $\frac{x^2}{(3,5)^2} + \frac{y^2}{(3,75)^2} = 1$ e a parte da curva situada acima do eixo *x*, pôde ser descrita por $y = f(x) = \sqrt{(3,5)^2\left[1 - \frac{x^2}{(3,75)^2}\right]}dx$.

Em seguida, a fórmula $V = \pi\int_{-3,75}^{3,75}[f(x)]^2 dx$ foi aplicada, de onde obteve-se, $V = \pi\int_{-3,75}^{3,75}(3,5)^2\left(1 - \frac{x^2}{(3,75)^2}\right)dx$ que resultou em $V = 193$ ml. Esses cálculos podem ser visualizados na Figura 4.

Figura 4 – Recortes da atividade realizada pelo Grupo 2.



$$\frac{y^2}{(3,5)^2} = 1 - \frac{x^2}{(3,75)^2}$$

$$y = \sqrt{(3,5)^2\left[1 - \frac{x^2}{(3,75)^2}\right]}$$

$$f(x) = y$$

$$V = \pi \int_{-3,75}^{3,75} f(x)^2\, dx$$

$$y = 3,5\sqrt{1 - \frac{x^2}{14,1}}$$

$$y^2 = 3,5^2(1 - x^2/14,1)$$

$$y^2 = 12,3 - x^2 . 0,872$$

$$V = \pi \int_{-3,75}^{3,75} 12,3 - x^2 . 0,872\, dx$$

$$V = \pi \left[12,3x \Big|_{-3,75}^{3,75} - \frac{x^3}{3} . 0,875 \Big|_{-3,75}^{3,75} \right]$$

$$V = 2(12,3 . 3,75) - \left(2\left[\frac{3,75^3}{3} . 0,875\right]\right)$$

$$V = 2\pi\,[46,1 - 15,4]$$

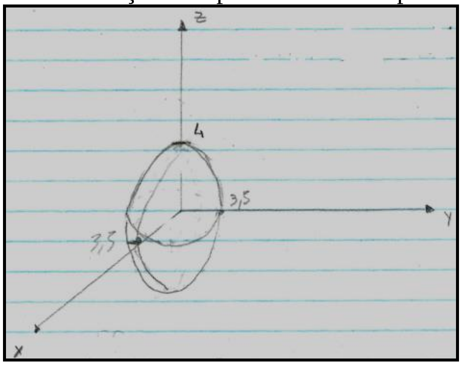
$$V = 193 \text{ ml}$$

Fonte: Registro dos estudantes.

O **grupo 4** também utilizou o modelo matemático do elipsoide para representar a laranja, mas aplicaram a integral dupla para calcular o volume. Deste modo, para o cálculo do volume, utilizaram estratégias semelhantes a que nós havíamos discutido no dia anterior, na primeira atividade do minicurso. Essas estratégias possibilitaram discutirmos a respeito das funções de várias variáveis que constituía o foco do minicurso, e por isso as resoluções desse grupo foram expostas na lousa pelas ministrantes que puderam nesse momento esclarecer algumas dúvidas do grupo.

Primeiramente, os estudantes utilizaram a equação do elipsoide centrado na origem $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. As constantes a,b e c deveriam ser encontradas a partir das medidas da laranja que foram verificadas por meio de um barbante e uma régua, em que se obteve: circunferência 23 cm; diâmetro 7 cm; raio 3,5 cm; altura 8cm; comprimento da elipse 25 cm. Desse modo, observamos que eles consideraram um elipsoide de revolução (ver Figura 5), em que o corte $z=0$ é uma circunferência de raio 3,5 cm e os cortes verticais passando pela origem são elipses com eixo maior medindo 8 cm e eixo menor 7 cm.

Figura 5 – Esboço do elipsoide realizado pelo Grupo 4



Fonte: Registro dos estudantes.

Assim, assumindo $a = b = 3,5$ e $c = 4$ obteve-se a equação $\frac{x^2}{(3,5)^2} + \frac{y^2}{(3,5)^2} + \frac{z^2}{4^2} = 1$. Contudo, para encontrar o volume utilizando integral dupla era necessário escrever a equação em forma de função de duas variáveis. Assim, a variável z foi isolada nesta equação, obtendo duas equações $z_1 = \sqrt{16 - \frac{16}{12,25}\left(x^2 + y^2\right)}$ e $z_2 = -\sqrt{16 - \frac{16}{12,25}\left(x^2 + y^2\right)}$. Reconhecendo que z_1 representa a parte do gráfico situada acima do plano *xy*, e z_2 a parte situada abaixo do plano *xy*, sendo $z_1 \geq 0$ escrevemos $z_1 = f(x,y) = \sqrt{16 - 1,3\left(x^2 + y^2\right)}$ e discutimos o conceito de função de duas variáveis.

Para calcular o volume, era preciso resolver $V = 2\iint\limits_R f(x,y)dxdy$ onde $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq (3,5)^2\}$, mas como a região de integração é circular os alunos sugeriram que fizéssemos a conversão para coordenadas polares. Nesse momento, explicamos rapidamente sobre essa conversão e realizamos a mudança de coordenadas obtendo $V = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{3,5}(16 - 1,3r^2)^{1/2}rdrd\theta$. Os estudantes tentaram calcular esta integral, mas os resultados divergiram e por isso nós a resolvemos na lousa encontrando o valor de $V \approx 205,4\ \text{cm}^3$.

O **grupo 3** não disponibilizou os registros, mas as suas estratégias foram semelhantes às apresentadas pelo grupo 4, porém os integrantes concluíram o cálculo da integral dupla e também discutiram sobre a possibilidade de utilizar a integral tripla em coordenadas esféricas para calcular o volume do elipsoide. Nesse grupo, dois integrantes eram graduados e conheciam os conteúdos de CDI II, assim não apresentaram dificuldades em desenvolver os cálculos, embora fez-se necessária a mediação pelas ministrantes em alguns momentos.

Ao término das atividades, os estudantes receberam jarras graduadas com água e uma seringa para verificarem de forma empírica o volume da laranja. Mergulhando totalmente a laranja na jarra cheia de água, o deslocamento do líquido forneceu-lhes o volume da fruta. A seringa foi usada para obter maior precisão, pois a graduação marcada na jarra possuía um espaçamento de 50 ml. Dessa forma, puderam validar as suas soluções.

Ao final do minicurso, solicitamos aos participantes que respondessem um questionário explicitando suas impressões sobre as atividades. Entre os pontos positivos, a possibilidade de explorar matematicamente objetos comuns foi o item mais citado pelos estudantes. Em relação às dificuldades, foi um consenso os assuntos de CDI II que ainda não conheciam ou não se lembravam. Porém, conforme justificou um dos estudantes *"por não conhecer todo o assunto de Cálculo II a atividade tornou-se mais difícil, porém com o auxílio das professoras conseguimos manipular melhor as atividades"*.

De forma geral, consideramos o trabalho produtivo, pois os estudantes engajaram-se nas atividades, participaram, mostraram os conhecimentos que possuíam e empenharam-se em compreender os novos conceitos abordados.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

No desenvolvimento da "atividade da laranja" o processo de Modelagem, concebido de acordo com Bassanezi (2013), se deu na evolução dos conceitos matemáticos utilizados pelos acadêmicos para resolver o problema. Os modelos matemáticos empregados para estimar o volume da laranja apresentaram graus de complexidade conceituais distintos, entretanto, isso não implica que a precisão do resultado obtido seja maior ou menor conforme a complexidade do modelo, o que vai ao encontro das ponderações de Bassanezi (2013) sobre o uso da Modelagem como estratégia de ensino e de aprendizagem. Nesse caso específico, o método empírico (feito com a jarra graduada e água) é mais indicado para obter precisão. Contudo, centrados no objetivo de mobilizar conhecimentos de CDI, enfatizamos o processo de Modelagem, mais do que o produto – o resultado do problema.

A implementação da referida atividade no evento de extensão nos possibilitou suscitar reflexões sobre como poderíamos abordá-la no curso regular. Embora já tivéssemos adotado a prática da Modelagem em sala de aula, foi a primeira vez que a empregamos para ensinar um conteúdo novo, embora não tenha sido esse o propósito inicial, mas que tornou-se relevante em função da qualificação dos participantes. Dessa forma, pensamos que no curso regular, seria ainda mais interessante, pois os novos conceitos poderiam ser tratados com mais detalhes e profundidade, visto que poderíamos nos valer de um período de tempo maior.

Além disso, percebemos que é possível romper a linearidade com que os conteúdos aparecem nos livros didáticos, pois nessa atividade pudemos iniciar o estudo das integrais duplas com uma aplicação que também abordou a mudança de coordenadas. Em uma aula tradicional, dificilmente isso acontece. E apesar da maioria dos participantes não atenderem aos pré-requisitos solicitados na inscrição, conhecer as funções de várias variáveis e integrais múltiplas, eles não se intimidaram e nem desistiram mesmo diante de conteúdos que desconheciam. Eles participaram igualmente das discussões do grupo, dando ideias, independente do nível de conhecimento de CDI de cada membro, e assimilaram os novos conceitos que eram necessários utilizar como mecanismo para aprimorar a medida desejada e não como uma técnica a ser decorada.

Por fim, vale destacar a possibilidade de estabelecer relações entre vários conteúdos matemáticos distintos: volume de sólidos geométricos, quádricas, funções, equações, integral definida, integral dupla, integral tripla, entre outros, todos reunidos em uma única atividade. No curso regular, esses assuntos costumam ser tratados de forma isolada. Essa maneira fragmentada de se ensinar matemática muitas vezes transmite a ideia de que ela não tem relação com a realidade dificultando a aprendizagem e compreensão desses conceitos por parte dos alunos.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, J. C. **Modelagem matemática:** concepções e experiências de futuros professores. 2001. 253 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001.

BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como? **Veritati**, n. 4, p. 73-80, 2004.

BARROS, M. C. de. **Equações diferenciais ordinárias no contexto dos registros de representação semiótica e da modelagem matemática**. 258 f. 2017. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2017.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática:** uma nova estratégia. 3 ed. São Paulo: Contexto, 2013.

BORSSOI, A. H. **A aprendizagem significativa em atividades de modelagem matemática como estratégia de ensino**. 2004. 200 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas. Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2004.

CURY, H. N.; CASSOL, M. Análise de erros em Cálculo: uma pesquisa para embasar mudanças. **Acta Scientiae**, Canoas, v.6, p.27-36, jun. 2004. Semestral.

FONSECA, L. (org.). **Didática do Cálculo:** epistemologia, ensino e aprendizagem. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. v.1 e 2. 3. ed. São Paulo: Harbra Ltda, 1994.

SANTOS, F. V. **Modelagem matemática e tecnologias de informação e comunicação: o uso que os alunos fazem do computador em atividades de modelagem**. 2008. 197 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.

STEWART, J. **Cálculo**. v. 1 e 2, 6. ed., São Paulo: Cengage Learning, 2010.

VERTUAN, R. E. **Um olhar sobre a modelagem matemática à luz da teoria dos registros de representação semiótica**. 2007. 141 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) − Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007.

VIDOTTI, D. B.; KATO, L. A. Atividades de Modelagem Matemática oportunizando a prática como componente curricular na disciplina de Cálculo II**.** In: Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática, 10, 2017, Maringá, **Anais...** Maringá: UEM, 2017.