MODELAGEM DE FENÔMENOS FÍSICOS NO ENSINO DE TRIGONOMETRIA

Jonathan Melkes Francisco Monzon
Instituto Federal do Paraná
jonathan.melkesf@gmail.com

Carla Renata Garcia Xavier da Silva
Instituto Federal do Paraná
carla.silva@ifpr.edu.br

Resumo

Neste relato de experiência descrevemos o desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática realizada com estudantes de Ensino Médio do Instituto Federal do Paraná. O objetivo da proposta foi discutir como as transformações de Funções Trigonométricas afetam o gráfico da função e também explorar a relação entre o Círculo Trigonométrico e o gráfico de Funções Trigonométricas. Por se tratar de um tema considerado difícil pelos alunos, optamos por fazer uma abordagem a partir fenômenos físicos periódicos presentes no dia a dia deles. A partir da associação entre esses fenômenos, os discentes foram capazes de encontrar um modelo matemático para um problema prático e demonstraram compreensão dos conceitos estudados.

Palavras-chave: Circulo Trigonométrico; Funções Trigonométricas; Fenômenos Físicos.

Introdução

Este trabalho relata uma experiência didática realizada com alunos de Ensino Médio do Instituto Federal do Paraná (IFPR). As atividades foram conduzidas durante as aulas regulares de matemática com a colaboração do monitor da disciplina, primeiro autor deste trabalho, acadêmico do curso de Licenciatura em Física.

A finalidade da proposta foi discutir como as transformações de Funções Trigonométricas afetam o gráfico da função e também explorar a relação entre o Círculo Trigonométrico e o gráfico de Funções Trigonométricas de forma mais concreta.

A partir de reflexões a respeito das dúvidas manifestadas pelos alunos nas aulas anteriores à atividade, foi possível perceber que apesar de se tratar de um conteúdo considerado difícil pelos alunos, a dificuldade não estava relacionada apenas ao conteúdo em si, mas também à forma como este estava sendo abordado.

Assim sendo, optamos por associar os conceitos estudados a fenômenos físicos periódicos, descritos por funções trigonométricas, com o intuito de despertar maior interesse nos estudantes. Além disso buscamos uma metodologia diferenciada.

Nesta perspectiva, a Modelagem Matemática apresentou-se como uma boa alternativa, pois favorece a compreensão da matemática e possibilita fazer relações com outras áreas do conhecimento (BIEMBENGUT, 2009).

No contexto da Educação Matemática, a Modelagem Matemática é uma ferramenta para ensino e aprendizagem de matemática, que pode ser compreendida de diversas formas. De acordo com CARVALHO (2017, p. 31 apud Almeida, Silva e Vertuan, 2016, p.17), trata-se de uma “alternativa pedagógica na qual fazemos uma abordagem, por meio da Matemática, de uma situação-problema não essencialmente Matemática”.

Para os autores, o processo de Modelagem Matemática parte de uma Situação Inicial (Problemática) e, a partir de determinados procedimentos, chega a uma Situação Final (Solução da Problemática). Tais procedimentos são denominados por CARVALHO (2017, p. 32 apud Almeida, Silva e Vertuan, 2016, p.15) como “fases da modelagem matemática”, que são: Inteiração, Matematização, Resolução, Interpretação dos dados e validação.

Na fase de inteiração, é feito um reconhecimento da situação a ser estudada com o objetivo de compreender o problema e definir metas para sua resolução. Já na fase de matematização, o problema inicial é traduzido para a linguagem matemática. Durante a resolução, os alunos devem construir o modelo matemático que representa a solução do problema, de forma que seja possível fazer previsões relacionadas a situação investigada. E por fim, na fase de interpretação dos dados e validação, os alunos devem analisar o modelo proposto com a finalidade de verificar sua validade (CARVALHO, 2017).

A seguir, são definidos o Movimento Circular Uniforme (MCU) e o Movimento Harmônico Simples (MHS) e são estabelecidas as relações com o Círculo Trigonométrico e com o gráfico de Funções Trigonométricas, respectivamente. Após, é descrita a relação entre os dois movimentos. E, por fim, é relatada a atividade de modelagem desenvolvida com os alunos.

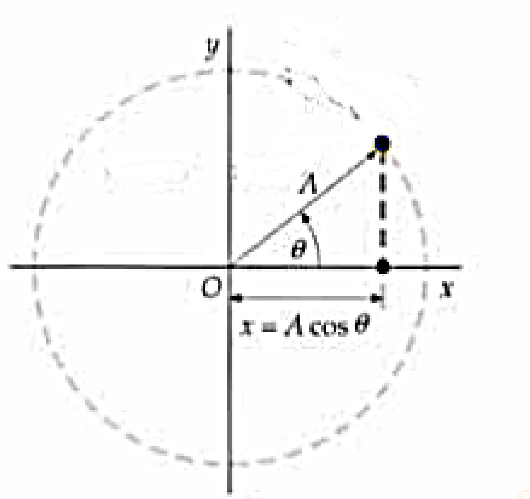
MOVIMENTO CIRCULAR UNIFORME E O CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

O MCU consiste num movimento de trajetória circular em que o módulo da velocidade é constante (TIPLER, MOSCA, 2006).

Para o desenvolvimento da proposta não foi necessário aprofundar conceitos específicos do movimento, como utilização de abordagem vetorial para decomposição da velocidade, aceleração centrípeta, entre outros.

Na Figura 1, é possível observar a sobreposição de um objeto em rotação no plano cartesiano de modo que o seu centro geométrico de rotação coincida com a origem do plano.

Figura 1 - Posição do objeto em função do ângulo



Fonte: (TIPLER, MOSCA, 2006).

A partir desta imagem, observa-se que se soubermos o *ângulo horário* formado pela sua posição no círculo, em um determinado instante, podemos definir sua posição na trajetória. Para encontrar o par ordenado que indica a posição do objeto, utilizamos as equações

$$y = r \, . \, sen(\theta)$$

$$x = r \, . \cos(\theta)$$

que expressam a posição em relação a ordenada e a abscissa respectivamente.

Em outras palavras, podemos dizer que cada ponto da trajetória está associada a um ângulo, que determina a *posição angular* do objeto em movimento.

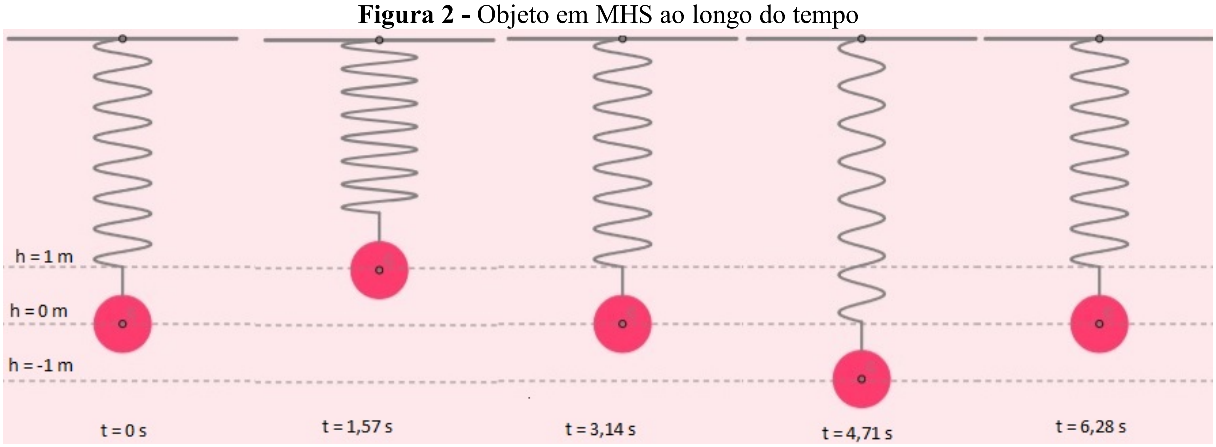
Se considerarmos que o raio da trajetória mede uma unidade, a Figura 1 pode ser interpretada como uma imagem do círculo trigonométrico. De fato, cada ponto do círculo está associado a um ângulo central e as projeções nos eixos X e Y definem o cosseno e o seno do ângulo em questão, respectivamente.

MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES E SUA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

O MHS é um movimento oscilatório caracterizado por um "sobe e desce", "balanços para frente e para trás", de um lado para o outro, etc. Exemplificar o MHS através situações do nosso cotidiano não é uma tarefa muito difícil. As ondas do mar, o pêndulo de um relógio, uma criança se balançando no parque, um objeto preso a uma mola subindo e descendo, todos representam essa característica de oscilação (HEWITT, 2015).

A figura 2, mostra um objeto em MHS ao longo do tempo.

Figura 2 - Objeto em MHS ao longo do tempo



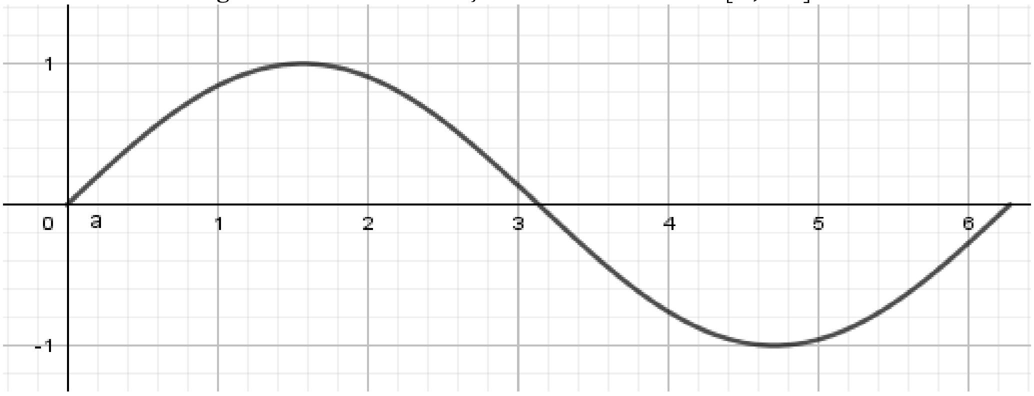
Fonte: Dos autores.

Essa imagem foi produzida a partir de *prints* sucessivos de um simulador MHS[1] desenvolvido pela segunda autora deste artigo. É possível visualizar que no instante inicial, $t=0s$, definimos nosso referencial como tendo altura zero. A partir daí, o objeto sobe e desce atingindo uma altura máxima de 1 m e mínima de -1 m, voltando a repetir esse ciclo em $t=6,28s$

[1]Disponível em <https://www.geogebra.org/m/frA7eH6p>

Apenas observando a Figura 2, já é possível perceber sua semelhança com o gráfico da função seno no intervalo $[0,2\pi]$, exibido na Figura 3.

Figura 3 - Gráfico da função seno no intervalo $[0,2\pi]$

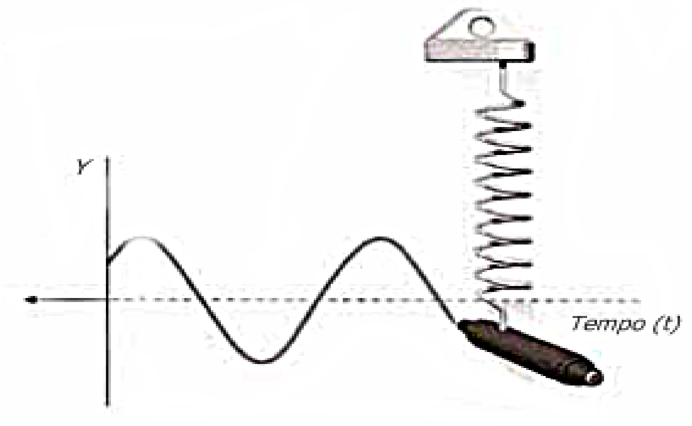


Fonte: Dos autores.

Fazendo a associação entre as figuras 2 e 3, é possível concluir de forma intuitiva que a altura da massa presa à mola em função do tempo pode ser expressa em linguagem matemática pela função $h(t)=sen(t)$

Outra forma de perceber a relação entre a posição de um objeto em MHS e sua representação gráfica é colocar uma caneta presa na extremidade da mola. Pondo o objeto para oscilar, percebemos claramente que a caneta se movimenta de modo que faz um risco sempre nos mesmos pontos, ora esta é sua posição no eixo y. Se tomarmos a seta do tempo(t) com referência no eixo x e movimentar a mola uma velocidade constante para a direita, o resultado obtido é plotagem gráfica exibida na Figura 4.

Figura 4 - Plotagem da posição da caneta em função do tempo



Fonte: (TIPLER, MOSCA, 2006).

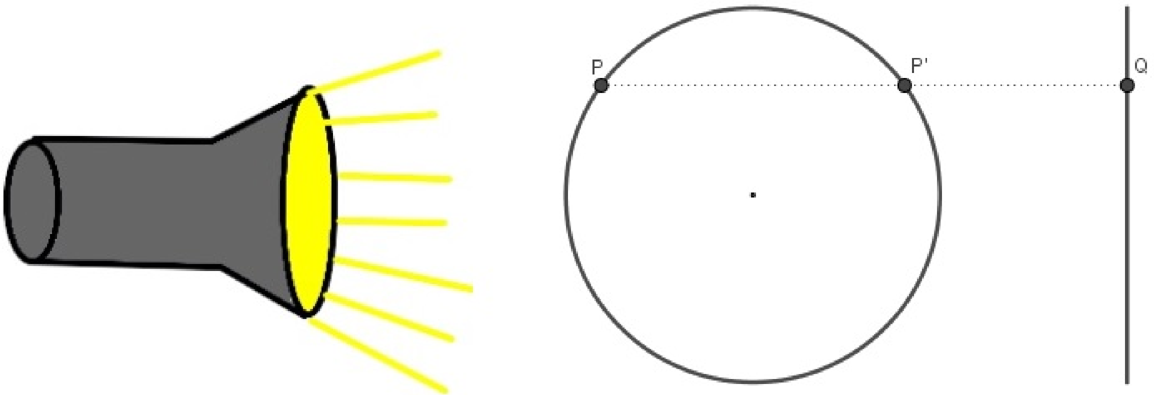
A imagem acima assemelha-se aos gráficos das funções seno e cosseno, porém não podemos descrevê-lo como $y = sen(t)$ uma vez que em $t = 0s$ o objeto não está em $y = 0$ e nem como $y = \cos(t)$, pois em $t = 0s$ não está em $y = 1$. Nessa figura especifica, sequer podemos afirmar que a altura máxima do objeto seja um.

No entanto, é possível descrever a posição da caneta realizando transformações dessas funções trigonométricas. Esse movimento pode ser descrito pela função $y = a.sen(b.t + c) + d$, onde a é a amplitude, b a frequência, c a constante de fase e d o *offset* do movimento. Essas transformações serão exemplificadas ao longo do texto.

Relação entre MCU e MHS e suas Representações Gráficas

Imagine um objeto em MCU projetado em uma parede vertical de acordo com o que mostra a Figura 5.

Figura 5 - Projeção de um objeto em MCU em uma parede vertical



Fonte: Dos autores.

Esta representação mostra que quando o objeto está tanto no ponto P quanto no ponto P' sua projeção na parede vertical é a mesma, no ponto Q. Desta forma, se olharmos para a projeção na parede, veremos o objeto apenas subindo e descendo em MHS.

Como fizemos a análise do MHS na posição vertical, utilizaremos apenas a equação da componente *y* no MCU para deduzir essa relação entre os movimentos.

Sabendo que a posição y do objeto em MCU é descrita pela função $y=r.sen(\theta)$ e que a posição angular em função do tempo é dada por $\theta=\omega.t+\phi$, onde ω representa a rapidez tangencial do objeto e ϕ a posição angular inicial. Desta forma, obtemos a função $y=r.sen(\omega.t+\phi)$

A trajetória pode ainda não estar com o centro coincidindo com a origem do plano cartesiano. No caso de ela estar deslocada verticalmente a posição y no objeto deve acompanhar esse deslocamento e a função seria $y=r.sen(\omega.t+\phi)+\delta$ onde δ representa quantas unidades a trajetória foi deslocada na posição vertical. Se $\delta>0$ a trajetória foi deslocada para cima e se $\delta<0$, para baixo.

Comparando as funções $y=r.sen(\omega.t+\phi)+\delta$ e $y=a.sen(b.t+c)+d$ concluímos que se uma partícula está em movimento circular com rapidez constante, a sua projeção no eixo *y*, de fato, representa o movimento harmônico simples.

Através da conexão entre os dois movimentos é possível compreender a construção do gráfico da função seno a partir da análise do círculo trigonométrico. De forma análoga, é possível esclarecer a construção da função cosseno ao comparar um objeto em MHS na horizontal com a componente *x* de um objeto em MCU.

DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES

A proposta foi desenvolvida em três etapas. A primeira consistiu em discutir o MCU e o MHS na perspectiva apresentada neste trabalho, relacionando estes movimentos aos conceitos trigonométricos que estavam sendo estudados. Essa ação foi realizada a partir de aulas expositivas dialogadas.

Na segunda etapa, os alunos tiveram a oportunidade de compreender melhor como a mudança de cada um dos parâmetros a , b , c e d afetam o gráfico da função $y=a.sen(b.t+c)+d$

A partir do movimento retratado no simulador, já mencionado na Figura 2, foram propostas as seguintes questões:

i. Que função trigonométrica descreve a posição da bola em função do tempo?

ii. É possível descrever este movimento utilizando a função cosseno?

iii. Se a altura variasse de -2 m a 2 m, qual seria a função que representa o movimento e como seria o seu gráfico?

iv. Se a altura variasse de 0 m a 2 m, qual seria a função que representa o movimento e como ficaria o seu gráfico?

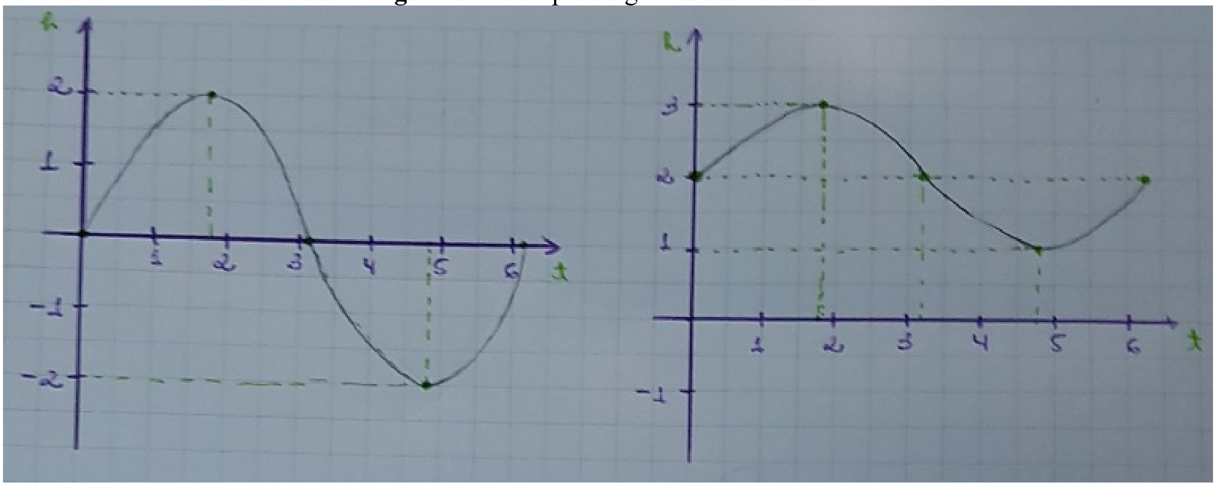
v. Se o movimento ocorresse com o dobro da velocidade, qual seria a função que representa esse movimento e como ficaria o gráfico?

Os alunos conseguiram responder todas as questões após análise do movimento. Na primeira questão, descobriram rapidamente que a solução seria $h(t)=sen(t)$

Já na segunda questão, os estudantes apresentaram um pouco mais de dificuldade, mas após algumas verificações e comparações entre os gráficos das funções seno e cosseno, conseguiram encontrar a solução $h(t)=\cos(t-\frac{\pi}{2})$

Nas questões iii e iv a altura do objeto varia em um intervalo diferente de $[-1,1]$ o que levou os alunos a concluírem que essas transformações deveriam ser consequência de alterações dos parâmetros a e d . A justificativa foi que independente do ângulo, argumento, o valor da função seno sempre varia de -1 a 1, então a mudança deveria ocorrer “fora do ângulo”. Após realizarem alguns testes, conseguiram responder corretamente que a função que descreve o movimento do exercício iii é $h(t)=2.sen(t)$ enquanto que a solução da questão iv é $h(t)=sen(t)+2$ Na Figura 6, é possível ver exemplos dos gráficos obtidos por essas transformações.

Figura 6 - Exemplo de gráficos construídos.

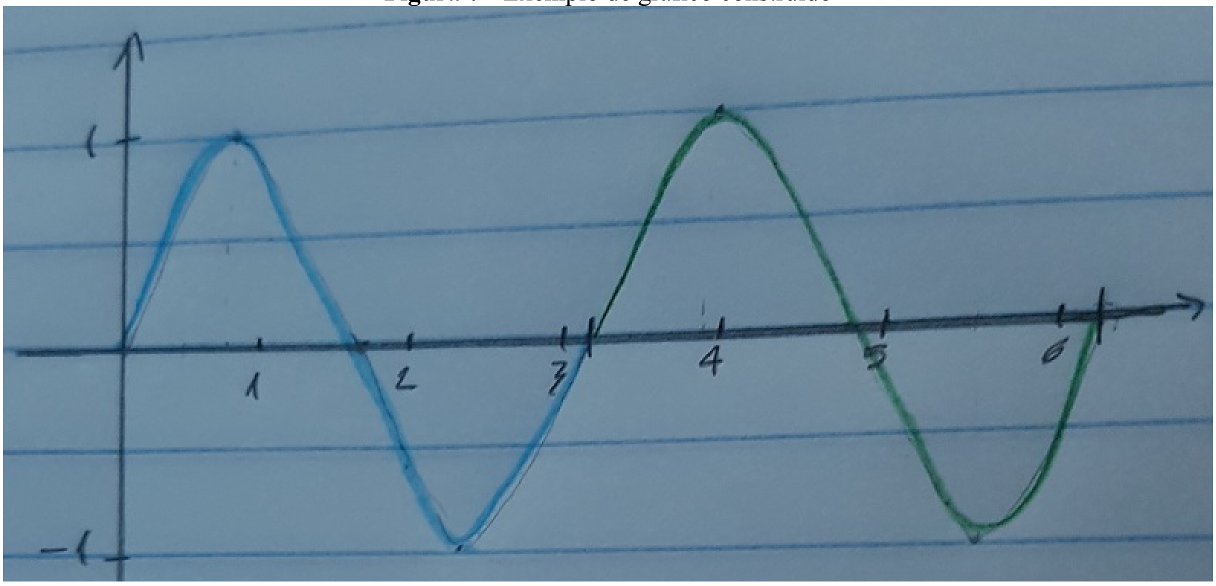


Fonte: Dos autores.

O gráfico do lado esquerdo representa a função $h(t)=2.sen(t)$ e o outro, a função $h(t)=sen(t)+2$

Na questão v, os alunos conseguiram responder fazendo uma associação com o MCU. Eles imaginaram dois objetos em trajetórias circulares idênticas, sendo que em uma delas o objeto estava a uma certa velocidade enquanto na outra, o objeto apresentava o dobro dessa velocidade. Assim concluíram que “quando o mais lento der meia volta o mais rápido já terá completado a volta, sempre será o dobro do ângulo, então temos que multiplicar o ângulo por dois”. Desta forma, chegaram na função $h(t)=sen(2t)$ A Figura 7, mostra um dos gráficos construídos.

Figura 7 - Exemplo de gráfico construído



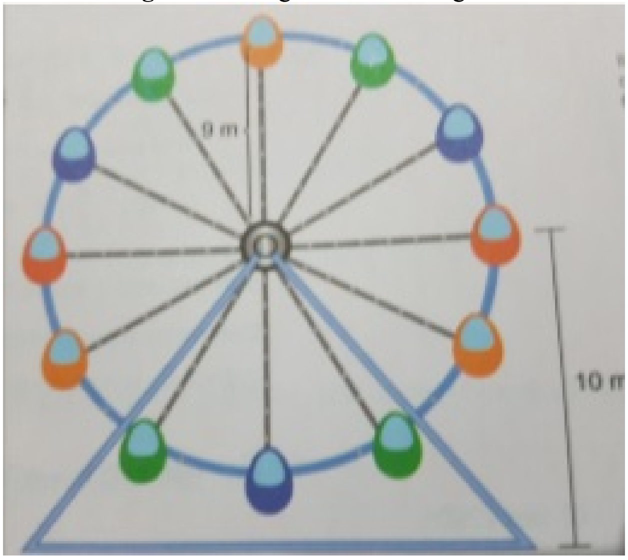
Fonte: Dos autores.

Para a construção do gráfico exibido na figura acima, os alunos afirmaram que "é o gráfico da função seno, porque é o mesmo movimento, mas como tem o dobro de velocidade, temos que fazer o gráfico duas vezes no mesmo tempo". Por isso, podemos ver a primeira metade do gráfico em azul, representando o primeiro ciclo do movimento e a segunda metade em verde, representando o segundo.

Por fim, chegamos à última etapa, na qual propomos o seguinte problema[2]: *A roda gigante é uma das atrações mais tradicionais dos parques de diversões. A roda gigante da figura tem 12 cadeiras igualmente distribuídas ao longo da circunferência, que tem 9 m de raio. Uma estrutura de ferro sustenta a roda gigante a partir do seu centro, mantendo-a presa ao solo. A distância do centro da roda gigante ao solo é 10 m. Sabendo que a roda gigante gira lentamente a uma velocidade de 3º por segundo, qual a expressão que descreve matematicamente a altura, em relação ao solo, de uma pessoa t segundos após entrar na roda gigante?*

[2]Adaptado de (IEZZI, 2013, p. 60)

Figura 8 - Imagem da Roda Gigante



Fonte: (IEZZI, 2013, p. 60)

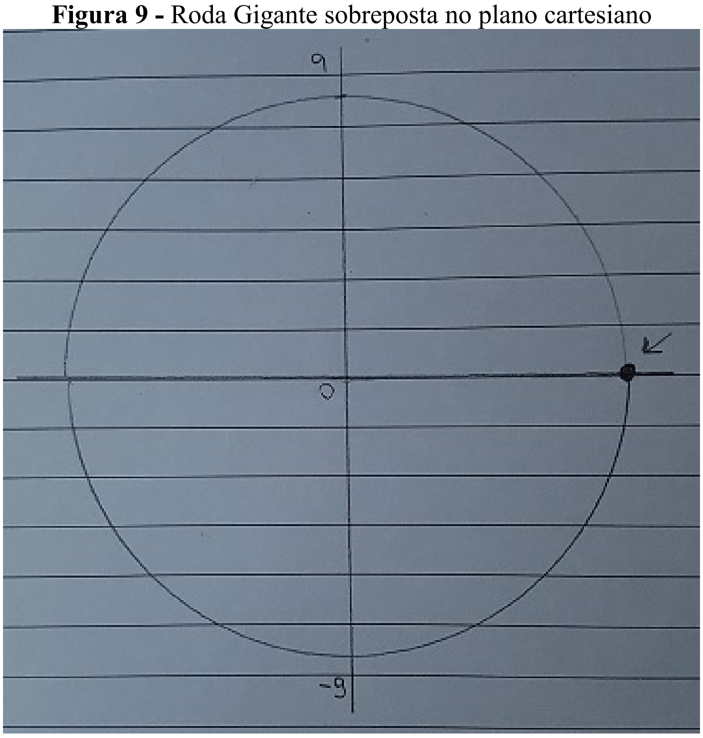
Para responder a esta questão os alunos fizeram algumas considerações, durante a fase de inteiração. Primeiro, que se a trajetória da pessoa sentada na Roda Gigante é circular e se sua velocidade é constante igual à 3 m/s, então a pessoa está em MCU.

No entanto, não estamos interessados na trajetória em si, mas apenas na altura em que a pessoa estará em determinado instante. Analisando o desenho e as medidas, eles calcularam que a pessoa entra no ponto mais baixo da roda gigante à 1 m do solo, sobe até o ponto máximo de 19 m e desce novamente para completar uma volta. Desta forma, a pessoa ficará "subindo e descendo", o que caracteriza o MHS caso seja observada lateralmente à roda gigante. Além disso, como visto anteriormente, esse movimento pode ser interpretado como sendo a projeção da pessoa em MCU.

Assim sendo, imediatamente fizeram associação com as funções trigonométricas. Comparando a roda gigante com o círculo trigonométrico, optaram por fazer a modelagem usando a função seno, uma vez que a altura em que a pessoa está é medida na vertical e que no círculo encontramos o seno de um determinado ângulo fazendo a projeção no eixo vertical.

Muitos alunos desenharam a roda gigante no plano cartesiano de forma que o seu centro coincidisse com a origem do plano, iniciando a etapa de matematização. Além disso, consideraram que a pessoa entrariam na roda gigante no ponto que corresponde ao ângulo zero, como mostra a Figura 9.

Figura 9 - Roda Gigante sobreposta no plano cartesiano



Fonte: Dos autores.

Com essa simplificação os alunos conseguiram desenvolver o raciocínio com muito mais facilidade. Conforme o ponto caminha na trajetória no sentido anti-horário, a projeção no eixo vertical será $h(t)=9sen(t)$, pois "se fosse o círculo de raio um a projeção seria $sen(t)$, mas como o raio foi multiplicado por 9, o valor do seno também será".

Porém, o centro da roda gigante não estava no solo, mas deslocado dez unidades para cima, então eles determinaram $h(t)=9sen(t)+10$

Para ajustar o ponto onde a pessoa entra na roda gigante, usaram a constante de fase. Foi considerado que a pessoa entra no ponto correspondente à 0º, porém ela entra no ponto que corresponde a 270º (no sentido anti-horário) ou -90º no sentido horário. Transformando em radianos, $\frac{3\pi}{2}$ ou $\frac{-\pi}{2}$ respectivamente. Nesse ponto chegaram a duas soluções equivalentes: $h(t)=9sen(t+\frac{3\pi}{2})+10$ e $h(t)=9sen(t-\frac{\pi}{2})+10$.

Para finalizar, consideraram a velocidade em que a pessoa estava girando. Transformando $3°/s$ em radianos, obtiveram $\frac{\pi}{60}rad/s$ chegando então à expressão $h(t)=9sen(\frac{\pi}{60}t+\frac{3\pi}{2})+10$ ou $h(t)=9sen(\frac{\pi}{60}t-\frac{\pi}{2})+10$.

Depois de chegarem ao modelo matemático que expressa a solução do problema, os alunos fizeram alguns testes para verificar se o modelo estava correto e concluírem que deduziram corretamente.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante o desenvolvimento das atividades foi perceptível o maior envolvimento dos alunos. Eles afirmaram ter gostado da proposta e manifestaram interesse em realizar outras tarefas similares, sob o entendimento que esta foi capaz de gerar maior compreensão do tema lecionado.

De fato, os alunos demonstraram ter compreendido os conceitos abordados e foram capazes de encontrar a solução para o problema a eles apresentado.

Sendo assim, consideramos que o uso de modelagem em sala de aula e a relação da matemática com outra área de conhecimento foi enriquecedor e contribuiu positivamente para a aprendizagem dos alunos.

No entanto, a proposta inicial previa a coleta de dados pelos próprios alunos. O objetivo era realizar uma visita técnica ao Marco das Três Fronteiras, na cidade de Foz do Iguaçu, onde atualmente existe uma roda gigante como atração turística. Através de pesquisas, observações e cálculos os alunos deveriam determinar o raio e a velocidade da roda gigante, assim como a altura que seu centro está do solo para então resolver o problema proposto.

Com certeza, esse processo teria sido ainda mais interessante, uma vez que os estudantes tratariam de um problema real e concreto, relacionado com o turismo da cidade onde moram.

Infelizmente, não foi possível concretizar a visita, mas há pretensão de realizá-la futuramente. Além disso, vale a pena registrar a proposta, uma vez que é possível encontrar rodas-gigantes em parques de diversões frequentados por estudantes em diversas cidades.

REFERÊNCIAS

BIEMBENGUT, Maria Salett. 30 anos de modelagem matemática na educação brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. **Alexandria**, Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v.2, n.2, p.7-32, jul. 2009.

CARVALHO, F. J. R. **Introdução à programação de computadores por meio de uma tarefa de modelagem matemática na educação matemática.** Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino.Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Foz do Iguaçu, 2018.

HEWITT, P. G. **Física Conceitual.** 12 ed. Editora Bookman, 2015.

TIPLER, P. A.; MOSCA, G. **Física para cientistas e engenheiros - Mecânica, Oscilações e Ondas, Termodinâmica**. 5.ed. LTC, 2006.

IEZZI, G; et al. **Matemática: ciência e aplicações.** Vol 2. 7.ed. São Paulo: Saraiva, 2013.