O MÉTODO HÚNGARO PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

João Cesar Guirado
Universidade Estadual de Maringá
E-mail: jcguirado@gmail.com

Márcio Roberto da Rocha
Universidade Estadual de Maringá
E-mail: profdarocha@hotmail.com

RESUMO

O presente minicurso pretende abordar um problema básico em pesquisa operacional como uma das aplicações da Álgebra Linear, que consiste em distribuir univocamente tarefas para instalações de um modo otimizado, como, por exemplo, encontrar a melhor distribuição de trabalhadores em empregos, maquinário em locais de construção, jogadores de um esporte em posição no campo ou quadra, além de outros. Para matrizes quadradas não muito elevadas, há métodos de "busca exaustiva", que são eficazes e rápidos, mas como abordar situações que envolvem matrizes quadradas de grande porte? Por exemplo, para matrizes-custo 10 x 10, há um total de 10! = 3.628.800 alocações possíveis, tornando a utilização desse método impraticável. Por isso, nesse minicurso será utilizado um método prático para resolver qualquer problema de alocações, conhecido como "O Método Húngaro", criado pelos húngaros D. König e E. Everváry. Esse algoritmo é baseado na manipulação de matrizes, exigindo requisitos mínimos de matemática, o que facilita sua compreensão. A metodologia será uma apresentação da teoria por meio de slides e exemplos e, em seguida, serão propostos exercícios de aplicação. O resultado será a constatação de que o algoritmo é válido para resolver qualquer problema de alocação, não importando a ordem da matriz-custo.

Palavras-Chave: Matriz-custo. Alocação de tarefas. Método Húngaro.

Introdução

Um problema básico em pesquisa operacional é distribuir univocamente tarefas para instalações de um modo otimizado. Por exemplo, o problema pode ser encontrar a melhor distribuição de trabalhadores em empregos, jogadores de um esporte em posições no campo ou na quadra, maquinário em locais de construção e muitos outros.

O problema da alocação de tarefas requer que haja o mesmo número de instalações e tarefas, digamos n. Neste caso, há exatamente n! maneiras distintas de alocar univocamente as tarefas às instalações. Isso ocorre, pois há n maneiras de alocar a primeira tarefa, (n-1) maneiras de alocar a segunda tarefa, (n-2) maneiras de alocar a terceira tarefa e assim por diante, totalizando n.(n-1).(n-2). ... .3.2.1 = n! maneiras de alocar tarefas. Entre essas n! alocações devemos encontrar uma que é ótima em algum sentido.

Para a noção de alocação ótima, define-se matriz-custo C como segue:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

em que c_{ij} é o custo de alocar à i-ésima instalação a j-ésima tarefa, para $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq n$. As unidades de c_{ij} podem ser quilômetros, horas, ou seja, o que for apropriado ao problema.

Exigir que a cada instalação seja atribuída uma tarefa de maneira única é equivalente à condição que não haja duas entradas c_{ij} da mesma linha ou coluna.

Aportes teóricos preliminares

Dado um problema prático de nosso cotidiano, no qual se pretende determinar um custo-mínimo, uma forma de interpretá-lo pode ser por meio matricial. Para isso, podemos apresentar a seguinte definição: "Dada uma matriz-custo C de ordem n, uma alocação de tarefas é um conjunto de n entradas da matriz tais que não há duas da mesma linha ou coluna".

Definimos, também, uma alocação ótima como segue: "A soma de n entradas de uma alocação é chamada custo da alocação. Uma alocação com o menor custo possível é denominada alocação ótima".

O problema da alocação de tarefas é encontrar uma alocação ótima em uma dada matriz-custo. Por exemplo, para distribuir n unidades de máquinas para n locais de construção, c_{ij} poderia ser a distância em quilômetros entre a i-ésima máquina e o j-ésimo local de construção. Uma alocação ótima é aquela cuja soma das distâncias percorridas pelas n máquinas é a menor possível. Por exemplo, suponhamos que problema seja o seguinte:

Uma faculdade pretende instalar aparelhos de ar-condicionado em três de seus prédios num período de uma semana que estará em recesso escolar. As propostas de orçamento (em 1000 reais) são apresentadas na tabela a seguir:

	Prédio 1	Prédio 2	Prédio 3
Firma 1	53	96	37
Firma 2	47	87	41
Firma 3	60	92	36

Cada firma só consegue instalar aparelhos de ar-condicionado em um dos prédios durante o período de recesso, de modo que a faculdade precisa contratar uma firma diferente para cada

ISSN 2175 - 2044

prédio. Para qual prédio deveria ser contratada cada firma para minimizar a soma das propostas correspondentes?

Para resolvê-lo, vamos, inicialmente, escrever a matriz-custo correspondente, ou seja,

$$\begin{bmatrix} 53 & 96 & 37 \\ 47 & 87 & 41 \\ 60 & 92 & 36 \end{bmatrix}$$

Como há 3! alocações possíveis, calculamos o custo de cada uma delas. Destacamos as entradas associadas, em negrito, e calculamos a soma, como segue:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{53} & 96 & 37 \\ 47 & \mathbf{87} & 41 \\ 60 & 92 & \mathbf{36} \end{bmatrix}$$
53 + 87 +36 = 176

$$\begin{bmatrix} 53 & \mathbf{96} & 37 \\ \mathbf{47} & 87 & 41 \\ 60 & 92 & \mathbf{36} \end{bmatrix}$$
96 + 47+ 36 = 179

$$\begin{bmatrix} 53 & 96 & \mathbf{37} \\ \mathbf{47} & 87 & 41 \\ 60 & \mathbf{92} & 36 \end{bmatrix}$$
37 + 47 + 92 = 176

$$\begin{bmatrix} \mathbf{53} & 96 & 37 \\ 47 & 87 & \mathbf{41} \\ 60 & \mathbf{92} & 36 \end{bmatrix}$$
53 +92 + 41= 186

$$\begin{bmatrix} 53 & \mathbf{96} & 37 \\ 47 & 87 & \mathbf{41} \\ \mathbf{60} & 92 & 36 \end{bmatrix}$$
96 + 60 + 41 = 197

$$\begin{bmatrix} 53 & 96 & \mathbf{37} \\ 47 & \mathbf{87} & 41 \\ \mathbf{60} & 92 & 36 \end{bmatrix}$$
37 + 87 + 60 = 184

O custo mínimo é de R$ 176.000,00 e as possibilidades de contratação são:

Firma 1 para o prédio 1		Firma 1 para o prédio 3
Firma 2 para o prédio 2	ou	Firma 2 para o prédio 1
Firma 3 para o prédio 3		Firma 3 para o prédio 2

Observe que esse método torna-se impraticável para matrizes-custo de ordem elevada. Por exemplo, para uma matriz 10x10, há um total de 10! alocações possíveis, ou seja, 3.628.800 alocações. Por isso, em pesquisa operacional há métodos eficazes de resolver qualquer problema de alocação. Nesse trabalho, o método a ser utilizado é conhecido como “método húngaro”. É claro que, dependendo da matriz-custo, um problema pode se tornar simples, mesmo se a ordem da matriz for, por exemplo, 5.

Suponhamos que um problema específico de alocação de tarefas tenha a matriz-custo

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & 3 & 7 & 7 \\ 7 & 9 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ISSN 2175 - 2044

Note que todas as entradas desta matriz-custo são não-negativas e que ela contém muitos zeros. Neste caso, podemos encontrar uma alocação consistindo somente de zeros, o que resulta em custo zero e, portanto, é ótima. Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & 5 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & \mathbf{0} & 2 & 5 \\ 6 & \mathbf{0} & 3 & 7 & 7 \\ 7 & 9 & 4 & 0 & \mathbf{0} \\ 3 & 2 & 0 & \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que a solução não é única e que também nem todos os problemas são tão simples como este. Por isso, o teorema a seguir leva a um método de converter um problema arbitrário de alocação de tarefas em um que pode ser resolvido tão facilmente como este.

TEOREMA: Se um número é somado ou subtraído de todas as entradas de uma linha ou coluna de uma matriz-custo, então uma alocação de tarefas ótima para a matriz-custo resultante é também uma alocação de tarefas ótima para a matriz-custo original.

Não vamos demonstrar o teorema, mas é fácil verificar que ele é válido. Suponhamos que cinco é somado (ou subtraído) a cada entrada da segunda fila (linha ou coluna) de uma matriz-custo. Como cada alocação contém exatamente uma entrada da segunda linha (ou coluna), segue que o custo de cada alocação para a nova matriz é exatamente cinco a mais (a menos) do que o custo da alocação correspondente para a matriz original. Assim, alocações correspondentes preservam seu ordenamento em relação ao custo, de modo que alocações ótimas de cada matriz correspondem a alocações ótimas da outra matriz.

O Método Húngaro

O método húngaro, criado pelos húngaros D. König e E. Everváry, é um procedimento de cinco passos para aplicar o teorema acima a uma dada matriz-custo de ordem n e obter outra matriz com entradas não-negativas que contém uma alocação consistindo inteiramente de zeros.

I. Subtraia a menor entrada de cada linha de todas as entradas da mesma linha. Dessa forma, cada linha terá pelo menos uma entrada zero e todas as outras entradas são não-negativas.

II. Subtraia a menor entrada de cada coluna de todas as entradas de mesma coluna. Dessa forma, cada coluna terá pelo menos uma entrada zero e todas as outras entradas são não-negativas.

III. Risque um traço ao longo de linhas e colunas de tal modo que todas as entradas zero da matriz-custo fiquem riscadas. Para isso, utilize um número mínimo de traços.

IV. Teste de otimização

ISSN 2175 - 2044

a. Se o número mínimo de traços necessários para cobrir os zeros é n, então uma alocação ótima de zeros é possível e encerramos o procedimento.
b. Se o número mínimo de traços necessários para cobrir os zeros é menor do que n, então ainda não é possível uma alocação ótima de zeros. Nesse caso, vá para o passo V.

V. Determine a menor entrada não riscada por nenhum traço. Subtraia esta entrada de todas as entradas não riscadas e depois a some a todas as entradas riscadas tanto horizontais quanto verticalmente. Retorne ao passo III.

Algumas observações são importantes:

- **A matriz-custo precisa ser quadrada**. Quando isso não ocorrer, deve-se introduzir uma linha ou coluna fictícia de zeros.
- **As entradas da matriz-custo devem ser números inteiros**. Quando isso não ocorrer, deve-se multiplicar a matriz-custo por uma potência conveniente de dez.
- **O problema deve ser de minimização**. O problema de maximizar a soma das entradas de uma matriz-custo é facilmente convertido em um problema de minimizar a soma das entradas multiplicando cada entrada da matriz por –1.

Aplicação do Método Húngaro

Consideremos o seguinte problema:

Uma construtora tem quatro escavadeiras utilizadas em quatro garagens diferentes. As escavadeiras devem ser transportadas a quatro diferentes locais de construção. As distâncias entre as escavadeiras e os locais de construção são dadas, em quilômetros, na tabela a seguir:

	Local 1	Local 2	Local 3	Local 4
Escavadeira 1	90	75	75	80
Escavadeira 2	35	85	55	65
Escavadeira 3	125	95	90	105
Escavadeira 4	45	110	95	115

Como devem ser transportadas as escavadeiras para os locais de construção para minimizar a distância total percorrida?

Para resolver esse problema, vamos escrever a matriz-custo correspondente:

$$\begin{bmatrix} 90 & 75 & 75 & 80 \\ 35 & 85 & 55 & 65 \\ 125 & 95 & 90 & 105 \\ 45 & 110 & 95 & 115 \end{bmatrix}$$

Passo 1: Subtraímos 75 da primeira linha, 35 da segunda, 90 da terceira, 45 da quarta, obtendo

ISSN 2175 - 2044

$$\begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 50 & 20 & 30 \\ 35 & 5 & 0 & 15 \\ 0 & 65 & 50 & 70 \end{bmatrix}$$

Passo 2: As três primeiras colunas já têm entradas zero; portanto, basta subtrair 5 da quarta coluna.

$$\begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 20 & 25 \\ 35 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 65 & 50 & 65 \end{bmatrix}$$

Passo 3: Riscamos as entradas zero da matriz com um número mínimo de traços horizontais e verticais. Riscamos a primeira linha, a terceira linha e a primeira coluna.

$$\begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 20 & 25 \\ 35 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 65 & 50 & 65 \end{bmatrix}$$

Passo 4: Como o número mínimo de traços é três, ainda não é possível uma alocação ótima de zeros.

Passo 5: Subtraímos 20, que é a menor entrada não riscada da matriz, de cada uma das entradas não riscadas e somamos 20 às duas entradas riscadas por dois traços.

$$\begin{bmatrix} 35 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 5 \\ 55 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 45 & 30 & 45 \end{bmatrix}$$

Passo 6: Riscamos as entradas zero com um número mínimo de traços horizontais e verticais. Riscamos a primeira linha e a primeira e terceira colunas.

$$\begin{bmatrix} 35 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 5 \\ 55 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 45 & 30 & 45 \end{bmatrix}$$

Passo 7: O número mínimo de traços é três e, portanto, ainda não é possível uma alocação ótima de zeros.

ISSN 2175 - 2044

Passo 8: Subtraímos 5, que é a menor entrada não riscada, de cada uma das entradas não riscadas e somamos 5 às duas entradas riscadas por dois traços.

$$\begin{bmatrix} 40 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 55 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 40 & 30 & 40 \end{bmatrix}$$

Passo 9: Riscamos as entradas zero com um número mínimo de traços horizontais e verticais. Riscamos as quatro primeiras linhas.

$$\begin{bmatrix} \cancel{40} & \cancel{0} & \cancel{5} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{25} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{55} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{5} \\ \cancel{0} & \cancel{40} & \cancel{30} & \cancel{40} \end{bmatrix}$$

Passo 10: Como as entradas zero não podem ser riscadas com menos do que quatro traços, a matriz deve conter uma alocação ótima de zeros.

$$\begin{bmatrix} 40 & 0 & 5 & \mathbf{0} \\ 0 & 25 & \mathbf{0} & 0 \\ 55 & \mathbf{0} & 0 & 5 \\ \mathbf{0} & 40 & 30 & 40 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 40 & \mathbf{0} & 5 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & \mathbf{0} \\ 55 & 0 & \mathbf{0} & 5 \\ \mathbf{0} & 40 & 30 & 40 \end{bmatrix}$$

Esse resultado permite concluir que a otimização ocorre alocando a:

Escavadeira 1 na construção 4	(80 km)		Escavadeira 1 na construção 2	(75 km)
Escavadeira 2 na construção 3	(55 km)	ou	Escavadeira 2 na construção 4	(65 km)
Escavadeira 3 na construção 2	(95 km)		Escavadeira 3 na construção 3	(90 km)
Escavadeira 4 na construção 1	(45 km)		Escavadeira 4 na construção 1	(45 km)

Em qualquer dos casos, a soma das distâncias é 275 km, que corresponde à menor distância percorrida.

Considerações finais

Neste trabalho apresentamos o método húngaro para alocação de tarefas de modo otimizado. Esse método pode ser implementado para inúmeros problemas do cotidiano e traz uma importante contribuição em termos de otimização, pois para matrizes quadradas de ordem elevada, minimizam-se os passos para obtenção do ótimo. Embora outros métodos mais modernos sejam eficientes, como o de Hopcroft e Karp, com tempo de processamento inferior se

ISSN 2175 - 2044

comparado ao algoritmo húngaro, acredita-se que esse último ainda continuará sendo utilizado dada a sua facilidade. Embora esse método não seja comumente contemplado na maioria dos programas de Álgebra Linear dos cursos de graduação, acreditamos na sua possibilidade de apresentação aos alunos, como forma de motivação e de aplicação do conceito de matrizes.

Referências

HOWARD, A.; RORRES, C. **Álgebra linear com aplicações**. 8.ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

KUHN, H. W. The Hungarian Method for the Assigment Problem. In: **Naval Research Logistics Quartely**. vol. 2, n. 1 e 2, p. 83-97, 1955.

PRADO, D. **Programação Linear**. 3.ed. Belo Horizonte: Editora DG, 2003.